

## Espaces $L^p$

Sauf mention contraire,  $\mathbb{R}$  et ses intervalles sont munis de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . On note  $\|\cdot\|_p$  la norme de  $L^p$ , et  $q$  désigne l'exposant conjugué de  $p$ , défini par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

### Exercice 1 : Fonctions égales presque partout

On travaille sur  $\mathbb{R}$  et on fixe  $p \in [1, +\infty[$ .

1. Montrer que la relation «  $f = g$  presque partout » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables.
2. Montrer que  $1_{\mathbb{Q}}$  est nulle presque partout. Que vaut sa classe dans  $L^p(\mathbb{R})$  ?
3. Soit  $f$  mesurable. Montrer que  $\int |f|^p d\lambda = 0$  si et seulement si  $f = 0$  presque partout. On pourra utiliser l'inégalité de Markov.
4. Montrer qu'on ne peut pas définir l'application « valeur en 0 » sur  $L^p(\mathbb{R})$ . Montrer en revanche qu'une classe contient au plus une fonction continue.

### Exercice 2 : Inégalité de Jensen sur $[0,1]$

On munit  $[0,1]$  de la mesure de Lebesgue, qui est une probabilité.

1. Soit  $f : [0,1] \rightarrow ]0, +\infty[$  mesurable telle que  $f$  et  $\ln f$  soient intégrables. Montrer que

$$\exp\left(\int_0^1 \ln f\right) \leq \int_0^1 f.$$

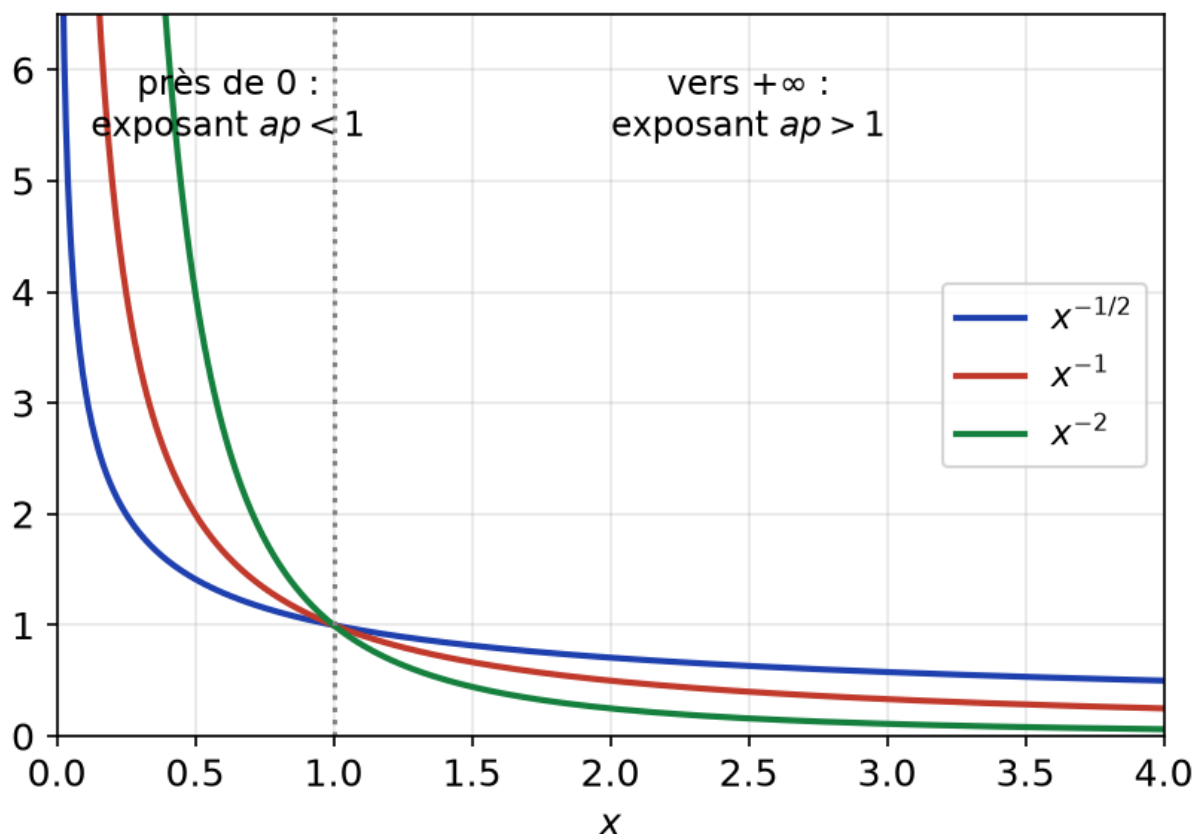
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour  $x_1, \dots, x_n > 0$ ,  
 $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ .

3. Montrer que  $\left(\int_0^1 |f|\right)^2 \leq \int_0^1 |f|^2$  pour toute  $f \in L^2([0,1])$ .

4. Vérifier numériquement les deux inégalités avec  $f(x) = e^x$ .

### Exercice 3 : Puissances de x dans les espaces Lp

Soit  $\alpha > 0$  et  $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$  pour  $x > 0$ . La figure ci-dessous représente  $f_\alpha$  pour trois valeurs de  $\alpha$ .



1. Déterminer les  $p \in [1, +\infty[$  tels que  $f_\alpha \in L^p(]0,1])$ .
2. Déterminer les  $p \in [1, +\infty[$  tels que  $f_\alpha \in L^p([1, +\infty[)$ .
3. La fonction  $f_\alpha$  appartient-elle à un espace  $L^p(]0, +\infty[)$ , pour  $p \in [1, +\infty]$  ? Étudier aussi  $L^\infty(]0,1])$  et  $L^\infty([1, +\infty[)$ .
4. Soit  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\ln x|)}$  sur  $]0,1]$ . Montrer que  $g \in L^p(]0,1])$  si et seulement si  $p \leq 2$ .

#### Exercice 4 : Inégalité de Hölder sur des exemples

1. Soit  $f \in L^2([0,1])$ . Montrer que  $\left| \int_0^1 x f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_2$ , et déterminer les cas d'égalité.
2. Soit  $f \in L^4([0,1])$ . Montrer que  $\int_0^1 |f(x)| x^{-1/2} dx \leq 3^{3/4} \|f\|_4$ .
3. Montrer qu'il existe  $f \in L^2(]0,1])$  telle que  $x \rightarrow f(x) x^{-1/2}$  ne soit pas intégrable sur  $]0,1]$ . Pourquoi l'inégalité de Hölder avec  $p = q = 2$  ne s'applique-t-elle pas ici ?

#### Exercice 5 : Hölder généralisée

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

1. Soient  $p, q \in [1, +\infty]$  et  $r \geq 1$  tels que  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ . Montrer que  $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$  pour toutes  $f, g$  mesurables.
2. Soient  $p, q, s \in ]1, +\infty[$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1$ . Montrer que 
$$\int |fgh| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_s.$$

3. Application : pour  $f, g \in L^4([0,1])$ , montrer que  $\int_0^1 |f(x)g(x)| \sqrt{x} \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|f\|_4 \|g\|_4$ .

### Exercice 6 : Minkowski et exposants inférieurs à 1

- Soient  $p \geq 1$  et  $f, g \in L^p$ . Montrer que  $||f|_p - |g|_p| \leq |f - g|_p$ . Qu'en déduit-on pour l'application  $f \rightarrow |f|_p$  ?
- Sur  $[0,1]$ , on pose  $N(f) = \left( \int_0^1 |f|^{1/2} \right)^2$ . Calculer  $N(f)$ ,  $N(g)$  et  $N(f+g)$  pour  $f = 1_{[0, 1/2]}$  et  $g = 1_{]1/2, 1]}$ . Conclure.
- Soit  $p \in ]0,1[$ . Montrer que  $(a+b)^p \leq a^p + b^p$  pour tous  $a, b \geq 0$ . En déduire que  $d(f,g) = \int_0^1 |f - g|^p$  définit une distance sur l'ensemble des classes de fonctions mesurables  $f$  telles que  $\int_0^1 |f|^p < +\infty$ .

### Exercice 7 : Calcul de normes infinies

On travaille sur  $[0,1]$ .

- Soit  $f(x) = x$  si  $x \notin \mathbb{Q}$  et  $f(x) = 5$  si  $x \in \mathbb{Q}$ . Calculer  $\sup f$  et  $\|f\|_\infty$ .
- Calculer  $\|g\|_\infty$  pour  $g = 1_{\mathbb{Q}} + 2 \cdot 1_{[0, 1/2]}$ .
- Soit  $f$  mesurable. Montrer que  $|f| \leq \|f\|_\infty$  presque partout.
- Soit  $\varphi$  continue sur  $]0,1[$ . Montrer que  $\|\varphi\|_\infty = \sup_{]0,1[} |\varphi|$ .

### Exercice 8 : Inclusions sur un espace de mesure finie

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  avec  $0 < \mu(X) < +\infty$ , et soient  $1 \leq p < q < +\infty$ .

1. À l'aide de l'inégalité de Hölder, montrer que  $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$  pour toute  $f$  mesurable. Traiter aussi le cas  $q = +\infty$ .
2. En déduire que  $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ , que l'injection est continue, et qu'une suite convergeant dans  $L^q$  converge dans  $L^p$ .
3. On suppose  $\mu(X) = 1$ . Retrouver l'inégalité  $\|f\|_p \leq \|f\|_q$  à l'aide de l'inégalité de Jensen.
4. Montrer que l'inclusion  $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$  est stricte.

### Exercice 9 : Des espaces $L^p$ non emboîtés sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que  $f = x^{-1/2} 1_{]0,1]}$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$  mais pas à  $L^2(\mathbb{R})$ .
2. Montrer que  $g = x^{-1} 1_{[1, +\infty[}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  mais pas à  $L^1(\mathbb{R})$ .
3. Soit  $h$  définie par  $h(x) = x^{-1/3}$  sur  $]0,1]$ ,  $h(x) = x^{-1/2}$  sur  $]1, +\infty[$  et  $h(x) = 0$  sur  $] -\infty, 0]$ . Déterminer l'ensemble des  $p \in [1, +\infty]$  tels que  $h \in L^p(\mathbb{R})$ .
4. Soient  $1 \leq p < q < +\infty$ . Construire une fonction de  $L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$  et une fonction de  $L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$ .

### Exercice 10 : Interpolation entre deux espaces $L^p$

Soient  $1 \leq p < r < q < +\infty$  et  $\theta \in ]0,1[$  tel que  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ .

1. En écrivant  $|f|^r = |f|^\theta r |f|^{(1-\theta)r}$ , montrer que  $|f|_r \leq |f|_p^\theta |f|_q^{1-\theta}$ .
2. En déduire que  $L^p \cap L^q \subset L^r$ .
3. Montrer que  $|f|_r \leq |f|_p^{p/r} |f|_\infty^{1-p/r}$  pour  $1 \leq p < r < +\infty$ . En déduire que  $L^1 \cap L^\infty \subset L^r$  pour tout  $r \geq 1$ .
4. Sur  $]0,1]$ , soit  $f(x) = x^{-1/3}$ . Calculer  $|f|_1$ ,  $|f|_2$  et  $|f|_{3/2}$ , puis vérifier l'inégalité de la question 1 avec  $p = 1$ ,  $q = 2$  et  $r = 3/2$ .

### Exercice 11 : Limite de la norme p quand p tend vers l'infini

Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  avec  $0 < \mu(X) < +\infty$ , et soit  $f \in L^\infty(\mu)$ .

1. Montrer que  $f \in L^p$  pour tout  $p \geq 1$  et que  $\limsup_{p \rightarrow +\infty} |f|_p \leq |f|_\infty$ .
2. Soit  $0 < c < |f|_\infty$ . Montrer que  $|f|_p \geq c \mu(\{|f| > c\})^{1/p}$ , puis que  $\liminf_{p \rightarrow +\infty} |f|_p \geq c$ .
3. Conclure que  $|f|_p \rightarrow |f|_\infty$  quand  $p \rightarrow +\infty$ .
4. Calculer  $|f|_p$  pour  $f(x) = x$  sur  $[0,1]$  et vérifier le résultat.
5. Sur  $]0,1]$ , soit  $g(x) = -\ln x$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $|g|_n^n$  et montrer que  $|g|_n \rightarrow +\infty$ . Est-ce cohérent ?

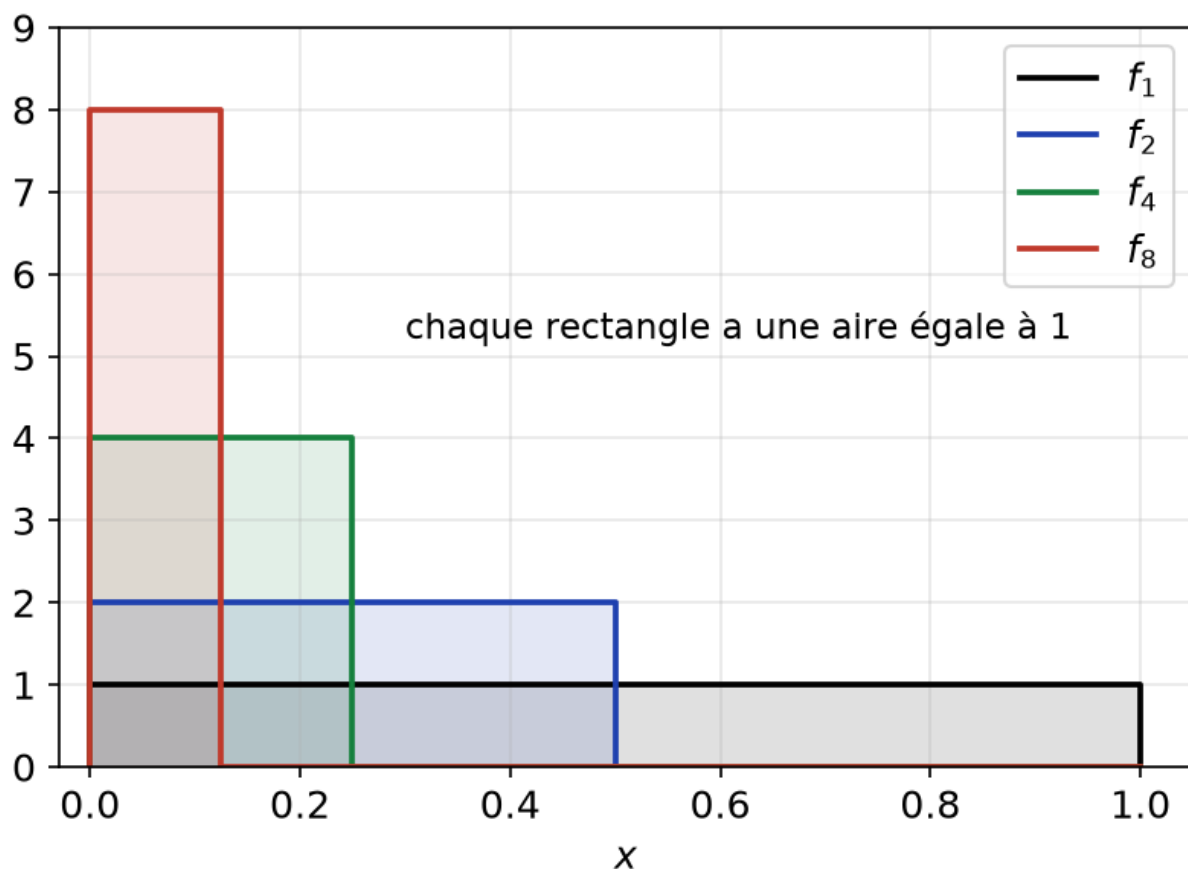
### Exercice 12 : Cas d'égalité et dualité de Hölder

Soient  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $q$  son conjugué et  $f \in L^p(\mu)$  réelle, non nulle. On note  $\text{sgn}(t)$  le signe de  $t$ , avec  $\text{sgn}(0) = 0$ , et on pose  $g = |f|^{p-1} \text{sgn}(f)$ .

1. Montrer que  $g \in L^q$  et que  $|g|_q = |f|_p^{p-1}$ .
2. Calculer  $\int f g \, d\mu$ .
3. En déduire que  $|f|_p = \max \left\{ \left| \int f h \, d\mu \right| : h \in L^q, |h|_q \leq 1 \right\}$ .
4. Établir la formule analogue pour  $p = 1$ , avec  $h \in L^\infty$ .
5. Sur  $[0,1]$ , soit  $f(x) = x$ . Montrer que  $\left| \int_0^1 f h \right| < 1 = |f|_\infty$  pour tout  $h \in L^1$  avec  $|h|_1 \leq 1$ , puis que la borne supérieure de ces intégrales vaut 1. On pourra utiliser  $h_n = n \mathbf{1}_{[1-1/n, 1]}$ .

### Exercice 13 : Convergence presque partout sans convergence en norme

Sur  $[0,1]$ , on pose  $f_n = n \mathbf{1}_{[0, 1/n]}$  pour  $n \geq 1$ . La figure ci-dessous représente quelques termes.



1. Montrer que  $f_n(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
2. Calculer  $\|f_n\|_p$  pour  $p \in [1, +\infty[$ . La suite converge-t-elle vers 0 dans  $L^p$ ? Peut-elle converger dans  $L^p$  vers une autre limite?
3. Pour  $\alpha > 0$ , on pose  $g_n = n^\alpha 1_{]0, 1/n]}$ . Pour quels  $\alpha$  a-t-on  $g_n \rightarrow 0$  dans  $L^p$ ?
4. Démontrer le théorème de convergence dominée dans  $L^p$  : si  $f_n \rightarrow f$  presque partout et  $|f_n| \leq G$  avec  $G \in L^p$ , alors  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ . Expliquer pourquoi la suite  $(f_n)$  n'est dominée par aucune fonction intégrable.

### Exercice 14 : La bosse glissante

Tout entier  $n \geq 1$  s'écrit  $n = 2^k + j$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq j < 2^k$ . On pose  $I_n = [j 2^{-k}, (j+1) 2^{-k}]$  et  $g_n = 1_{I_n}$  sur  $[0, 1]$ .

1. Justifier l'unicité de l'écriture  $n = 2^k + j$ . Calculer  $|g_n|_p$  pour  $p \in [1, +\infty[$  et montrer que  $g_n \rightarrow 0$  dans  $L^p$ .
2. Montrer que, pour tout  $x \in [0,1]$ , la suite  $(g_n(x))$  prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur 0.
3. Expliciter une sous-suite de  $(g_n)$  qui converge vers 0 presque partout.
4. La suite  $(g_n)$  converge-t-elle dans  $L^\infty$  ?

### Exercice 15 : Sous-suite convergeant presque partout

Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $p \in [1, +\infty[$ .

1. Soit  $(h_n)$  une suite de fonctions mesurables positives telle que  $S = \sum_n |h_n|_p < +\infty$ . On pose  $H = \sum_n h_n \in [0, +\infty]$ . Montrer que  $|H|_p \leq S$ , puis que  $h_n \rightarrow 0$  presque partout.
2. En déduire que, si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p$ , il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $f_{\varphi(k)} \rightarrow f$  presque partout.
3. Montrer qu'en outre il existe  $G \in L^p$  telle que  $|f_{\varphi(k)}| \leq G$  presque partout pour tout  $k$ .
4. Montrer que si  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p$  et  $f_n \rightarrow g$  presque partout, alors  $f = g$  presque partout.

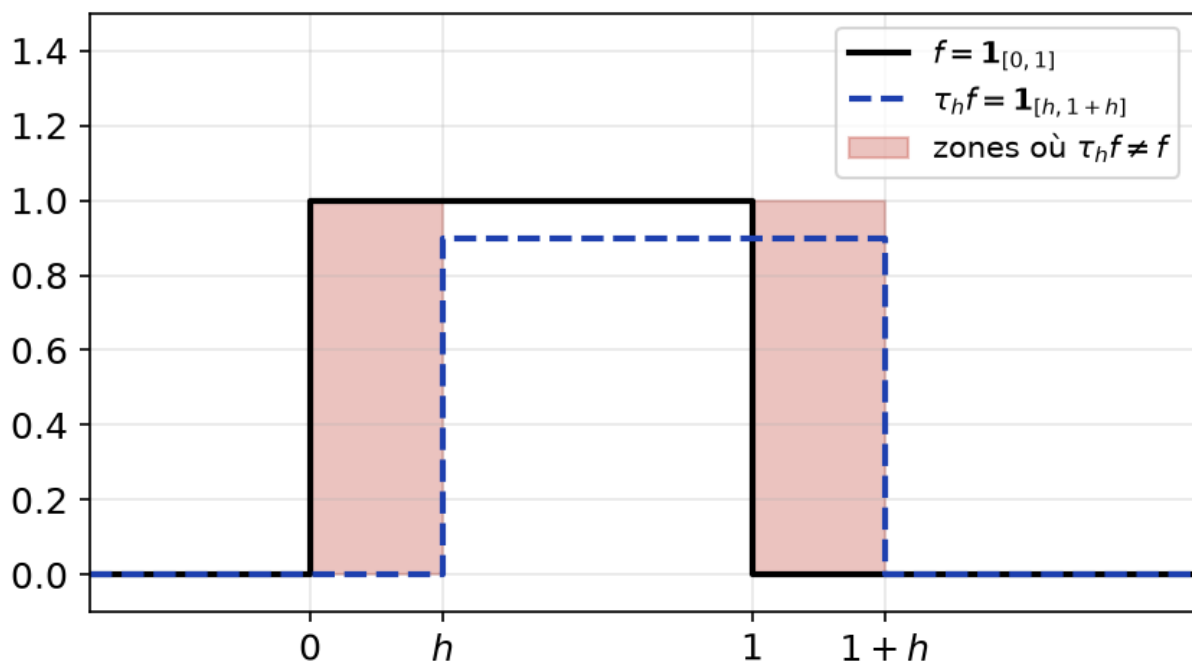
### Exercice 16 : Approcher une indicatrice par des fonctions continues

Sur  $\mathbb{R}$ , soit  $f = 1_{[0,1]}$ . Pour  $n \geq 1$ , soit  $\varphi_n$  la fonction nulle hors de  $[-1/n, 1 + 1/n]$ , égale à 1 sur  $[0,1]$  et affine sur  $[-1/n, 0]$  et sur  $[1, 1 + 1/n]$ .

1. Pour  $p \in [1, +\infty[$ , calculer  $|\varphi_n - f|_p$  et montrer qu'il tend vers 0.
2. Montrer que  $|\varphi - f|_\infty \geq \frac{1}{2}$  pour toute fonction  $\varphi$  continue sur  $\mathbb{R}$ . Conclure.
3. En déduire que toute fonction en escalier sur un segment, c'est-à-dire toute combinaison linéaire finie d'indicatrices d'intervalles bornés, est limite dans  $L^p(\mathbb{R})$  d'une suite de fonctions continues à support compact, pour  $1 \leq p < +\infty$ .

### Exercice 17 : Continuité des translations dans $L^p$

Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $f \in L^p(\mathbb{R})$ . Pour  $h \in \mathbb{R}$ , on pose  $\tau_h f(x) = f(x - h)$ . La figure ci-dessous illustre le cas  $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ .



1. Montrer que  $\tau_h$  est bien défini sur les classes et que  $|\tau_h f|_p = |f|_p$ .
2. Soit  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ . Montrer que  $|\tau_h \varphi - \varphi|_p \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .
3. Par un argument de densité, en déduire que  $|\tau_h f - f|_p \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0$ .

4. Montrer que le résultat est faux dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .
5. Application : soit  $A$  un borélien avec  $0 < \lambda(A) < +\infty$ . En étudiant  $\nu(h) = \lambda(A \cap (A + h))$ , montrer que l'ensemble  $A - A = \{a - b : a, b \in A\}$  contient un intervalle  $] -\delta, \delta[$ , avec  $\delta > 0$ .

### Exercice 18 : Lemme de Riemann-Lebesgue par densité

Pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\xi > 0$ , on pose  $I_f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(\xi x) dx$ .

1. Justifier que  $I_f(\xi)$  est bien défini et que  $|I_f(\xi) - I_g(\xi)| \leq \|f - g\|_1$ .
2. Calculer  $I_f(\xi)$  pour  $f = 1_{[a,b]}$ , et montrer que  $I_f(\xi) \rightarrow 0$  quand  $\xi \rightarrow +\infty$ .
3. En déduire que  $I_f(\xi) \rightarrow 0$  pour toute fonction en escalier, puis pour toute  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .
4. Calculer  $I_f(\xi)$  pour  $f(x) = e^{-|x|}$  et vérifier le résultat.

### Exercice 19 : Convergence presque partout et convergence des normes

Soient  $p \in [1, +\infty[$ ,  $(f_n)$  une suite de  $L^p(\mu)$  et  $f \in L^p(\mu)$ . On suppose que  $f_n \rightarrow f$  presque partout et que  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ .

1. Montrer que  $|a - b|^p \leq 2^{p-1} (|a|^p + |b|^p)$  pour tous réels  $a, b$ .
2. En appliquant le lemme de Fatou à  $g_n = 2^{p-1} (|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ , montrer que  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .
3. Montrer par un exemple que l'hypothèse  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$  ne peut pas être supprimée.
4. Application : soient  $f_n$  et  $f$  des densités de probabilité sur  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire positives et

d'intégrale 1, avec  $f_n \rightarrow f$  presque partout. Montrer que  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ .

### Exercice 20 : Inégalité de Young pour la convolution

Soient  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^p(\mathbb{R})$ , avec  $1 \leq p < +\infty$ . On admet que  $(x, y) \rightarrow f(y)g(x-y)$  est mesurable sur  $\mathbb{R}^2$ , et on utilise librement le théorème de Fubini-Tonelli.

- On suppose  $p = 1$ . Calculer  $\iint |f(y)| |g(x-y)| dy dx$ . En déduire que  $f * g(x) = \int f(y) g(x-y) dy$  est défini pour presque tout  $x$  et que  $|f * g|_1 \leq |f|_1 |g|_1$ .
- On suppose  $p > 1$ . En écrivant  $|f(y)| = |f(y)|^{1/q} |f(y)|^{1/p}$ , montrer que pour tout  $x$ ,  $\int |f(y)| |g(x-y)| dy \leq |f|_1^{1/q} \left( \int |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{1/p}$ .
- En déduire que  $f * g$  est défini presque partout, appartient à  $L^p$  et vérifie  $|f * g|_p \leq |f|_1 |g|_p$ .
- Calculer  $f * g$  pour  $f = g = 1_{[0,1]}$ , puis comparer  $|f * g|_2$  et  $|f|_1 |g|_2$ .

### Exercice 21 : Problème : les espaces de suites $\ell_p$

On munit  $\mathbb{N}^*$  de la mesure de comptage. Pour  $p \in [1, +\infty[$ ,  $\ell^p$  est l'espace des suites réelles  $u = (u_n)_{n \geq 1}$  telles que  $|u|_p = \left( \sum_{n \geq 1} |u_n|^p \right)^{1/p} < +\infty$ , et  $\ell^\infty$  celui des suites bornées, avec  $|u|_\infty = \sup_n |u_n|$ .

- Pourquoi les classes d'égalité presque partout se réduisent-elles ici à des suites ? Pourquoi la borne supérieure essentielle coïncide-t-elle avec la borne supérieure ?

2. Soient  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ . Montrer que  $\|u\|_\infty \leq \|u\|_p$ , puis que  $\|u\|_q \leq \|u\|_p$ . En déduire que  $\ell^p \subset \ell^q$ .
3. Montrer que l'inclusion est stricte si  $p < q$ , à l'aide de  $u_n = n^{-1/p}$ . Comparer avec l'exercice 8 et expliquer la différence.
4. Montrer que la convergence dans  $\ell^p$  entraîne la convergence de chaque coordonnée. Pourquoi n'a-t-on pas besoin d'extraire une sous-suite ?
5. Démontrer directement que  $\ell^p$  est complet pour  $1 \leq p < +\infty$ .
6. Montrer que les suites à support fini sont denses dans  $\ell^p$  pour  $p < +\infty$ , mais pas dans  $\ell^\infty$ . Vérifier que ce sont exactement les fonctions étagées intégrables.
7. Pour  $u \in \ell^2$ , montrer que  $\sum_{n \geq 1} \frac{|u_n|}{n} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_2$ , et préciser le cas d'égalité.

## Le corrigé des exercices

---

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



## Pour aller plus loin en L3

---

- Le cours : [espaces  \$L\_p\$ , cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#), [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Chapitre précédent : [Mesure produit, Fubini et changement de variables](#)

- Chapitre suivant : [Groupes : quotients et actions de groupes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)