

Espaces L^p

I. Inégalités de convexité : Jensen, Young, Hölder, Minkowski

Dans tout le chapitre, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré et les fonctions sont à valeurs réelles ou complexes. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions mesurables sur X . Pour construire les espaces L^p , il faut d'abord disposer de quatre inégalités. Elles reposent toutes sur la convexité.

1. Inégalité de Jensen

Rappelons qu'une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur un intervalle ouvert I , est convexe si $\varphi(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda \varphi(s) + (1-\lambda)\varphi(t)$ pour tous $s, t \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Une telle fonction admet en chaque point m de I une droite d'appui : il existe un réel c tel que $\varphi(t) \geq \varphi(m) + c(t-m)$ pour tout $t \in I$. On peut par exemple prendre pour c la dérivée à droite de φ en m .

Théorème :

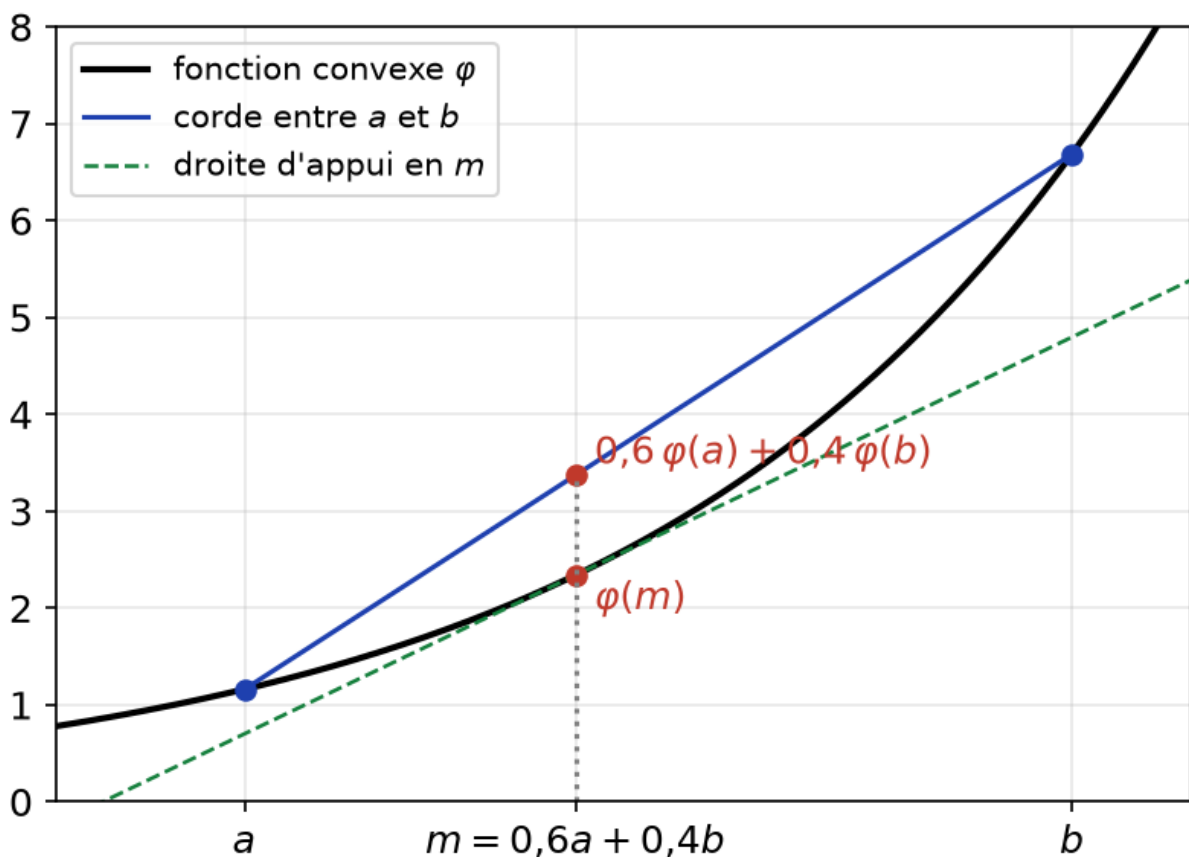
Inégalité de Jensen. On suppose $\mu(X) = 1$. Soient $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ à valeurs dans un intervalle ouvert I et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Alors $\int g \, d\mu \in I$, la partie négative de $\varphi \circ g$ est intégrable et

$$\varphi\left(\int_X g \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ g \, d\mu.$$

Démonstration :

On admet le point $m = \int g \, d\mu \in I$, qui résulte de la positivité de l'intégrale. Soit c la pente d'une droite d'appui en m . Pour tout $x \in X$, on a $\varphi(g(x)) \geq \varphi(m) + c (g(x) - m)$. Le membre de droite est intégrable, donc la partie négative de $\varphi \circ g$ l'est aussi. En intégrant, et puisque $\mu(X) = 1$, on obtient $\int \varphi \circ g \, d\mu \geq \varphi(m) + c (m - m) = \varphi(m)$.

L'inégalité de Jensen généralise la définition de la convexité. En effet, avec deux points a et b pondérés par $0,6$ et $0,4$, elle affirme que $\varphi(0,6a + 0,4b) \leq 0,6 \varphi(a) + 0,4 \varphi(b)$. La figure ci-dessous montre la corde, située au-dessus du graphe, et la droite d'appui utilisée dans la preuve.



Exemple :

Sur $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue, prenons $\varphi(t) = t^2$. Pour toute $f \in \mathcal{L}^2([0,1])$, on obtient $\left(\int_0^1 |f| \right)^2 \leq \int_0^1 |f|^2$. De même, avec $\varphi = \exp$ et $g = \ln f$, on trouve $\exp\left(\int_0^1 \ln f\right) \leq \int_0^1 f$: c'est une inégalité arithmético-géométrique continue.

2. Inégalité de Young et exposants conjugués

Définition :

Deux réels $p, q \in [1, +\infty]$ sont **conjugués** si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Ainsi 1 et ∞ sont conjugués, 2 est conjugué de lui-même et le conjugué de $p \in]1, +\infty[$ vaut $q = \frac{p}{p-1}$.

Lemme :

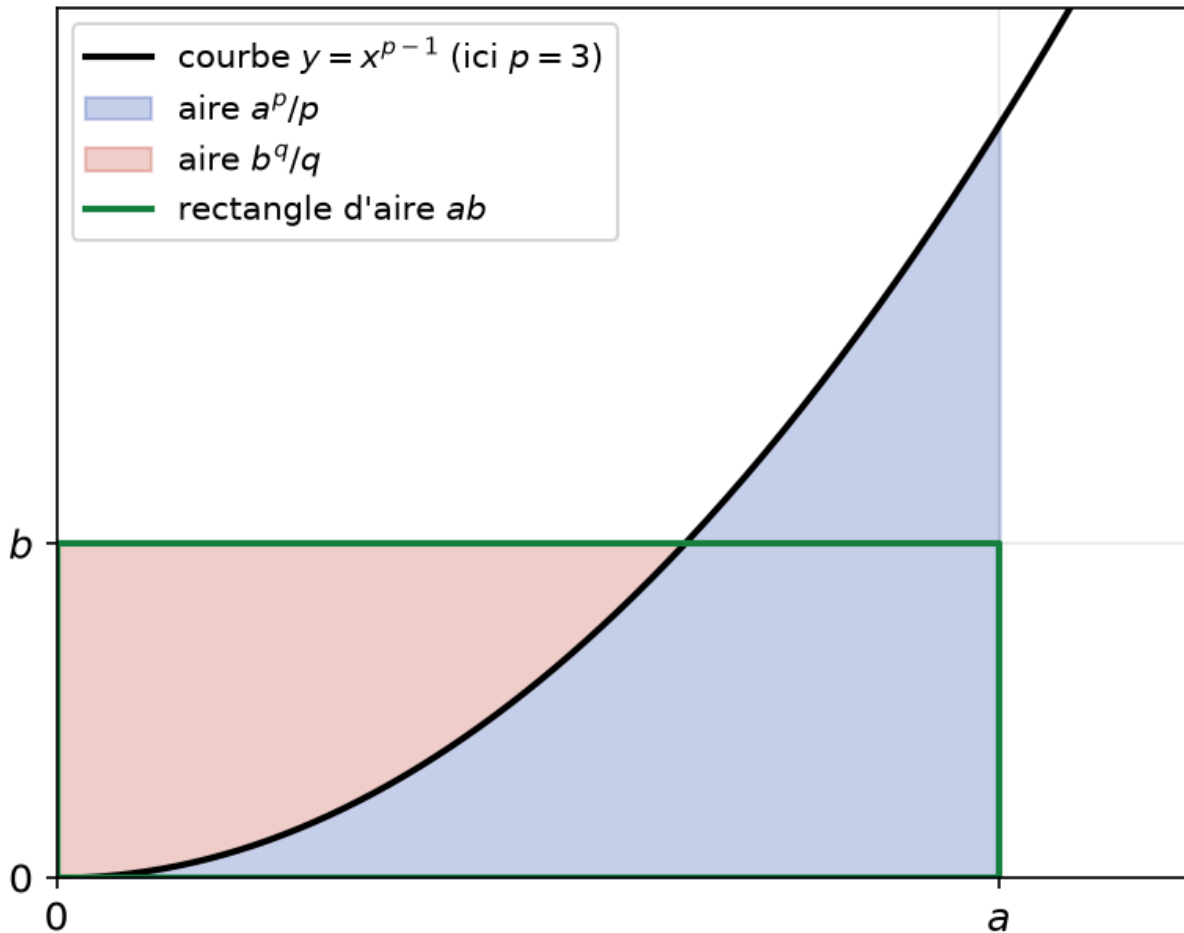
Inégalité de Young. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ conjugués. Pour tous réels $a, b \geq 0$, on a $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Démonstration :

Si $a = 0$ ou $b = 0$, c'est évident. Sinon, la concavité du logarithme donne $\ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab)$. On conclut par croissance de l'exponentielle.

Cette inégalité a une interprétation géométrique simple. D'une part, l'aire sous la courbe $y = x^{p-1}$

entre 0 et a vaut a^p / p . D'autre part, l'aire comprise entre l'axe vertical et la courbe, pour y entre 0 et b , vaut b^q / q . Comme le montre la figure ci-dessous, le rectangle $[0, a] \times [0, b]$ est recouvert par ces deux régions.



3. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Pour $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathcal{M}$, on pose $|f|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \in [0, +\infty]$.

Théorème :

Inégalité de Hölder. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ conjugués et $f, g \in \mathcal{M}$. Alors

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Le cas $p = q = 2$ est l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**.

Démonstration :

Si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ presque partout, donc $fg = 0$ presque partout et l'inégalité est vraie. Il en va de même si $\|g\|_q = 0$. Si l'une des normes est infinie, il n'y a rien à montrer. Sinon, on pose $F = |f| / \|f\|_p$ et $G = |g| / \|g\|_q$. D'après l'inégalité de Young, $FG \leq \frac{F^p}{p} + \frac{G^q}{q}$ en tout point. En intégrant, on obtient $\int FG \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ce qui est l'inégalité annoncée.

Théorème :

Inégalité de Minkowski. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f, g \in \mathcal{M}$ telles que $\|f\|_p$ et $\|g\|_p$ soient finies. Alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Démonstration :

Le cas $p = 1$ découle de $|f + g| \leq |f| + |g|$. Supposons $p > 1$ et notons q son conjugué. D'abord, la convexité de $t \rightarrow t^p$ donne $|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$, donc $\|f + g\|_p < +\infty$. Ensuite, on écrit $|f + g|^p \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$. Or $(p-1)q = p$, donc $\| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f + g\|_p^{p-1}$. L'inégalité de Hölder fournit alors

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}.$$

Enfin, si $|f+g|_p \neq 0$, on divise par $|f+g|_p^{p-1}$.

Méthode :

Pour **appliquer l'inégalité de Hölder** à une intégrale $\int |h|$, on écrit h comme un produit fg , puis on choisit les exposants p et q pour que $|f|_p$ et $|g|_q$ soient finis et calculables. Par exemple, pour $f \in L^4([0,1])$, on a

$$\int_0^1 |f(x)| x^{-1/2} dx \leq |f|_4 \left(\int_0^1 x^{-2/3} dx \right)^{3/4} = 3^{3/4} |f|_4, \text{ avec } q = 4/3. \text{ Pour la}$$

version à trois fonctions, on applique Hölder deux fois.

II. Construction des espaces L^p

1. Semi-norme et classes de fonctions presque partout égales

Définition :

Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$. D'après l'inégalité de Minkowski, c'est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ y est une semi-norme.

Cependant, $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme. En effet, $|f|_p = 0$ équivaut à $f = 0$ presque partout, et non à $f = 0$. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, l'indicatrice 1_Q est non nulle mais vérifie $|1_Q|_p = 0$. C'est pourquoi on passe au quotient.

Définition :

La relation « $f = g$ μ -presque partout » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$. L'ensemble $\mathcal{N}$ des fonctions nulles presque partout est un sous-espace vectoriel. On pose $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}$. La quantité $|f|_p$ ne dépend que de la classe de f , et elle définit une **norme** sur $L^p(\mu)$.

Attention :

Un élément de L^p est une classe de fonctions, pas une fonction. Par conséquent, la valeur $f(x_0)$ en un point n'a aucun sens si $\mu(\{x_0\}) = 0$. En revanche, les intégrales, les inégalités presque partout et les limites presque partout ont un sens. Dans la pratique, on confond une classe avec l'un de ses représentants, en ne l'utilisant que pour des propriétés insensibles aux ensembles négligeables.

2. L'espace L^∞

Définition :

Pour $f \in \mathcal{M}$, on appelle **borne supérieure essentielle** de $|f|$ le nombre

$$|f|_\infty = \inf \left\{ C \geq 0 : |f| \leq C \text{ } \mu\text{-presque partout} \right\} \in [0, +\infty].$$

On note $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'ensemble des f mesurables avec $|f|_\infty < +\infty$, et $L^\infty(\mu)$ son quotient par $\mathcal{N}$.

Propriété :

Pour tout $f \in \mathcal{M}$, on a $|f| \leq |f|_\infty$ presque partout : la borne inférieure est atteinte. De plus,

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $L^\infty(\mu)$, et $\int |fg| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Démonstration :

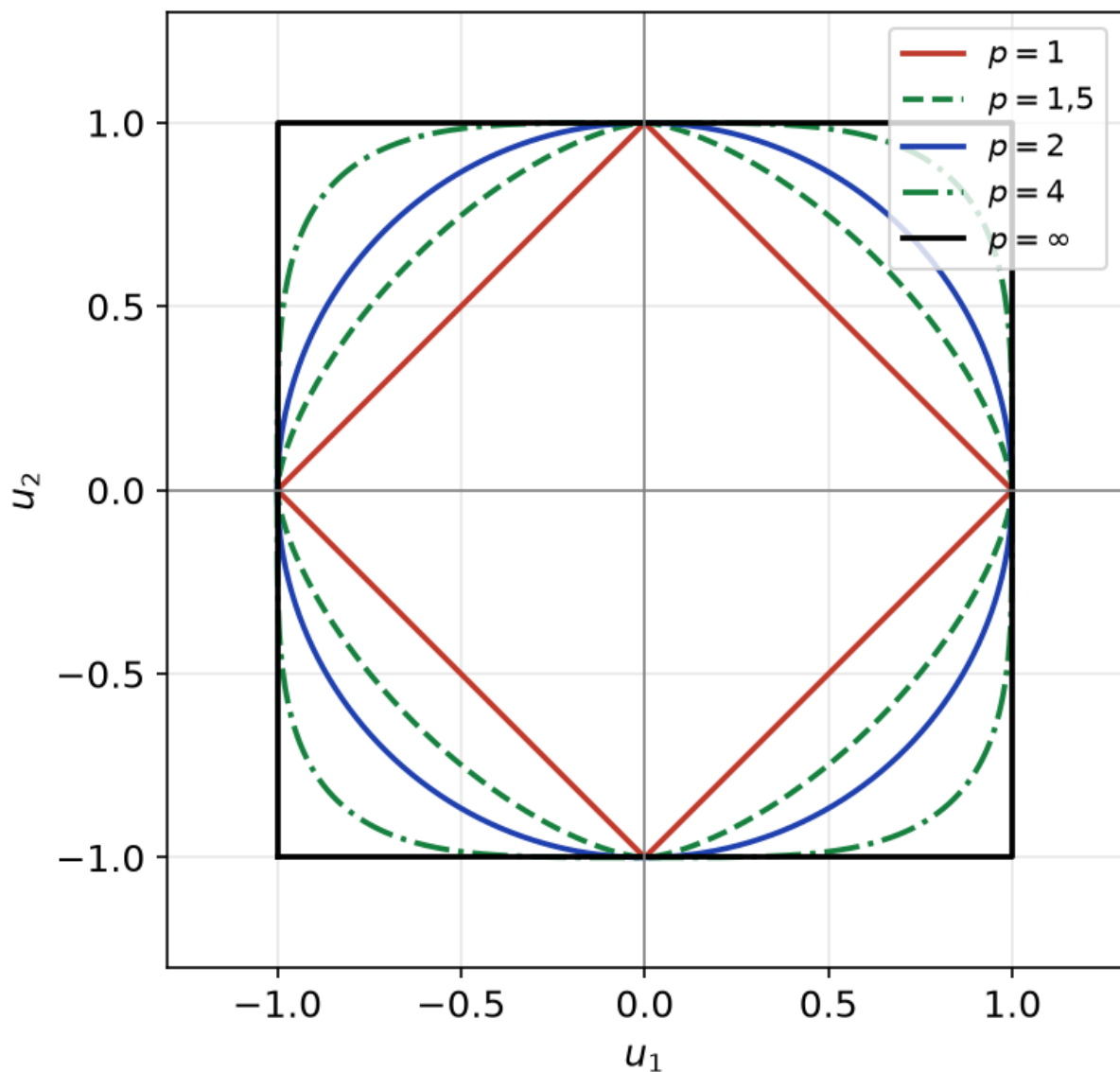
Si $\|f\|_\infty = +\infty$, il n'y a rien à montrer. Sinon, l'ensemble $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est la réunion des ensembles $\{|f| > \|f\|_\infty + 1/n\}$ pour $n \geq 1$. Chacun est négligeable par définition de la borne inférieure. Ainsi, cette réunion dénombrable est négligeable. L'inégalité triangulaire s'en déduit : presque partout, $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Enfin, $|fg| \leq |f| \|g\|_\infty$ presque partout, et on intègre.

Exemple :

Sur $[0,1]$, la fonction f égale à x si $x \notin \mathbb{Q}$ et à 5 si $x \in \mathbb{Q}$ vérifie $\sup |f| = 5$ mais $\|f\|_\infty = 1$. En effet, f coïncide presque partout avec $x \rightarrow x$. Plus généralement, pour une fonction continue sur un intervalle ouvert, la borne supérieure essentielle égale la borne supérieure.

3. Un exemple fondamental : les espaces de suites

Prenons $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Alors seule la partie vide est négligeable, et les classes se réduisent à des suites. On obtient les espaces ℓ^p des suites u telles que $\sum |u_n|^p < +\infty$, et ℓ^∞ celui des suites bornées. Dans $\mathbb{R}^2$, vu comme les suites nulles à partir du rang 2, la figure ci-dessous représente les boules unités des normes $\|\cdot\|_p$. Elles grossissent quand p augmente.



III. Complétude des espaces L^p : théorème de Riesz-Fischer

La propriété essentielle des espaces L^p est leur complétude. C'est elle qui fait de l'intégrale de Lebesgue un outil supérieur à l'intégrale de Riemann.

Théorème :

Théorème de Riesz-Fischer. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\mu)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un **espace de Banach**. De plus, si $p < +\infty$ et si (f_n) converge vers f dans L^p , il existe une sous-suite (f_{n_k}) et une fonction $g \in L^p$ telles que $f_{n_k} \rightarrow g$ presque partout et

$$|f_{n_k}| \leq G \text{ presque partout pour tout } k.$$

Démonstration :

Supposons d'abord $p < +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy. On construit des indices

$$n_1 < n_2 < \dots \text{ tels que } |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|_p \leq 2^{-k}. \text{ On pose } g_K = \sum_{k=1}^K |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

D'après Minkowski, $|g_K|_p \leq 1$. La suite (g_K) croît vers une fonction g à valeurs dans

$[0, +\infty]$. Par convergence monotone, $\int g^p = \lim \int g_K^p \leq 1$, donc g est finie presque partout.

Ainsi, en presque tout point x , la série $\sum (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$ converge absolument. Par conséquent, $f_{n_k}(x)$ converge vers une limite $f(x)$. On pose $f = 0$ ailleurs, et f est mesurable. De plus, $|f_{n_k}| \leq |f_{n_1}| + g = G$, avec $G \in \mathcal{L}^p$.

Montrons enfin la convergence en norme. Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $|f_n - f_m|_p \leq \varepsilon$ pour $n, m \geq N$. Pour $n \geq N$, le lemme de Fatou donne

$$\int |f_n - f|^p = \int \liminf_k |f_n - f_{n_k}|^p \leq \liminf_k \int |f_n - f_{n_k}|^p \leq \varepsilon^p.$$

Donc $f_n - f \in \mathcal{L}^p$, puis $f \in \mathcal{L}^p$, et $|f_n - f|_p \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$.

Pour $p = +\infty$, on note E la réunion des ensembles $\{|f_n - f_m| > |f_n - f_m|_\infty\}$. Elle est négligeable. Hors de E , la suite est uniformément de Cauchy, donc elle converge uniformément vers une fonction bornée f . On pose $f = 0$ sur E .

Remarque :

Pour $p = 2$, la norme provient du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} d\mu$. Ainsi, $L^2(\mu)$ est un **espace de Hilbert**, ce qui sera exploité dans le chapitre consacré à ces espaces.

IV. Convergence en norme L^p et convergence presque partout

Dans ce paragraphe, on suppose $1 \leq p < +\infty$. Les deux modes de convergence ne sont pas comparables. Pourtant, le théorème de Riesz-Fischer établit un pont entre eux.

1. La convergence presque partout n'entraîne pas la convergence en norme

Exemple :

Sur $[0,1]$, la suite $f_n = n \mathbf{1}_{]0, 1/n]}$ converge vers 0 en tout point. Cependant, $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout n . La masse se concentre près de 0 au lieu de disparaître.

Pour passer de la convergence presque partout à la convergence en norme, on dispose d'un outil très commode, conséquence directe du théorème de convergence dominée.

Théorème :

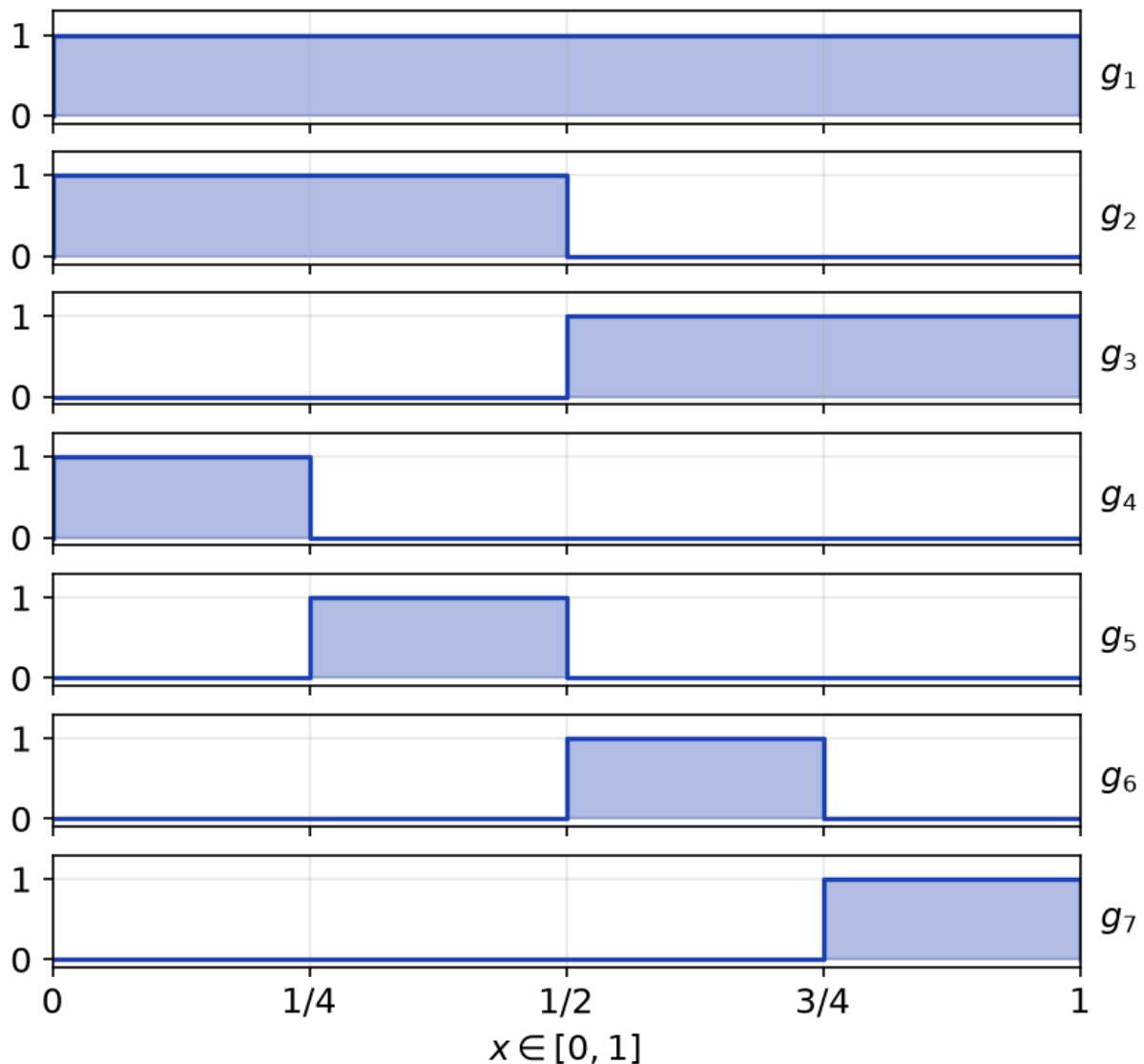
Convergence dominée dans L^p . Si $f_n \rightarrow f$ presque partout et s'il existe $G \in L^p$ telle que $|f_n| \leq G$ presque partout pour tout n , alors $f \in L^p$ et $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Démonstration :

Par passage à la limite, $|f| \leq G$ presque partout, donc $f \in L^p$. Ensuite, $|f_n - f|^p \leq (2G)^p$, qui est intégrable, et $|f_n - f|^p \rightarrow 0$ presque partout. Le théorème de convergence dominée conclut.

2. La convergence en norme n'entraîne pas la convergence presque partout

Pour $n \geq 1$, on écrit de façon unique $n = 2^k + j$ avec $0 \leq j < 2^k$. On pose $g_n = 1_{[j 2^{-k}, (j+1) 2^{-k}]}$. C'est la **bosse glissante** : une bosse de largeur 2^{-k} balaie $[0,1]$ de gauche à droite, puis recommence avec une largeur deux fois plus petite. La figure ci-dessous représente les sept premiers termes.



D'une part, $\|g_n\|_p = 2^{-k/p} \rightarrow 0$, donc $g_n \rightarrow 0$ dans L^p . D'autre part, chaque point de $[0,1]$ est recouvert par une bosse à chaque génération. Ainsi, $g_n(x) = 1$ pour une infinité de n , et $(g_n(x))$ ne converge vers 0 en aucun point.

Méthode :

Pour **extraire une sous-suite convergeant presque partout** d'une suite (f_n) qui converge vers f dans L^p , on choisit n_k strictement croissante avec $\|f_{n_k} - f\|_p \leq 2^{-k}$. Alors $H = \sum_k |f_{n_k} - f|$ vérifie $\|H\|_p \leq 1$ par Minkowski et convergence monotone. Donc H est finie presque partout, et le terme général $|f_{n_k} - f|$ tend vers 0 presque partout. Dans l'exemple de la bosse glissante, la sous-suite $g_{2^k} = 1_{[0, 2^{-k}]}$ converge vers 0 en tout $x > 0$.

Corollaire :

Si $f_n \rightarrow f$ dans L^p et $f_n \rightarrow g$ presque partout, alors $f = g$ presque partout.

V. Inclusions entre espaces L^p

1. Sur un espace de mesure finie

Théorème :

On suppose $\mu(X) < +\infty$. Pour $1 \leq p < q \leq +\infty$ et $f \in \mathcal{M}$, on a

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Par conséquent, $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$, et l'injection est continue.

Démonstration :

Si $q = +\infty$, on intègre $|f|^p \leq |f|_\infty^p$ presque partout. Sinon, on applique Hölder à $|f|^p \cdot 1$ avec l'exposant $r = q/p > 1$ et son conjugué $r' = \frac{q}{q-p}$:

$$\int |f|^p \leq \left(\int |f|^q \right)^{p/q} \mu(X)^{1 - p/q}.$$

On élève ensuite à la puissance $1/p$.

En particulier, sur un espace probabilisé, l'application $p \rightarrow \|f\|_p$ est croissante. On le retrouve aussi par l'inégalité de Jensen appliquée à $t \rightarrow t^{q/p}$. De plus, si $f \in L^\infty$, on montre que $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_\infty$ quand $p \rightarrow +\infty$.

2. Sans hypothèse de mesure finie

Sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue, aucune inclusion n'a lieu. Le comportement près d'une singularité et le comportement à l'infini jouent des rôles opposés. En effet, pour $\alpha > 0$, la fonction $x^{-\alpha}$ est dans $L^p(]0,1])$ si et seulement si $\alpha p < 1$, et dans $L^p([1, +\infty[)$ si et seulement si $\alpha p > 1$. Ainsi, $x^{-1/2} 1_{]0,1]}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$. À l'inverse, $x^{-1} 1_{[1, +\infty[}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, l'inclusion est même renversée : $\ell^p \subset \ell^q$ si $p \leq q$. En effet, $\|u\|_\infty \leq \|u\|_p$, d'où $\sum |u_n|^q \leq \|u\|_\infty^{q-p} \sum |u_n|^p$.

Proposition :

Interpolation. Soient $1 \leq p < r < q \leq +\infty$ et $\theta \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Pour tout $f \in \mathcal{M}$, on a $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$. En particulier, $L^p \cap L^q \subset L^r$.

Méthode :

Pour **montrer qu'une fonction appartient à** L^p , on découpe le domaine en une zone où f est bornée, une zone proche des singularités et une zone à l'infini. Puis on compare $|f|^p$ à des fonctions de référence du type $x^{-\alpha}$ ou $x^{-\alpha} |\ln x|^{-\beta}$. Pour **comparer les espaces** sur une mesure finie, on utilise l'inégalité $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p - 1/q} \|f\|_q$, et on cherche les contre-exemples parmi les puissances.

VI. Densité dans les espaces L^p

1. Densité des fonctions étagées

Théorème :

Soit $1 \leq p < +\infty$. Les fonctions étagées intégrables, c'est-à-dire de la forme $\sum_{i=1}^m c_i 1_{A_i}$ avec $\mu(A_i) < +\infty$, forment un sous-espace dense de $L^p(\mu)$. Les fonctions étagées sont aussi denses dans $L^\infty(\mu)$.

Démonstration :

Soit $f \in \mathcal{L}^p$ positive. Il existe une suite croissante de fonctions étagées positives s_n qui converge simplement vers f . Comme $0 \leq s_n \leq f$, on a $s_n \in \mathcal{L}^p$, donc $\mu(\{s_n \neq 0\}) < +\infty$. De plus, $|f - s_n|^p \leq f^p$, et le théorème de convergence dominée donne $|f - s_n|_p \rightarrow 0$. Pour f réelle, on écrit $f = f^+ - f^-$ et on utilise Minkowski. Pour f complexe, on traite séparément les parties réelle et imaginaire. Enfin, dans L^∞ , une fonction bornée est limite uniforme de fonctions étagées.

2. Densité des fonctions continues à support compact

Théorème :

Soit $1 \leq p < +\infty$. L'espace $C_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ muni de la mesure de Lebesgue. En revanche, il n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration :

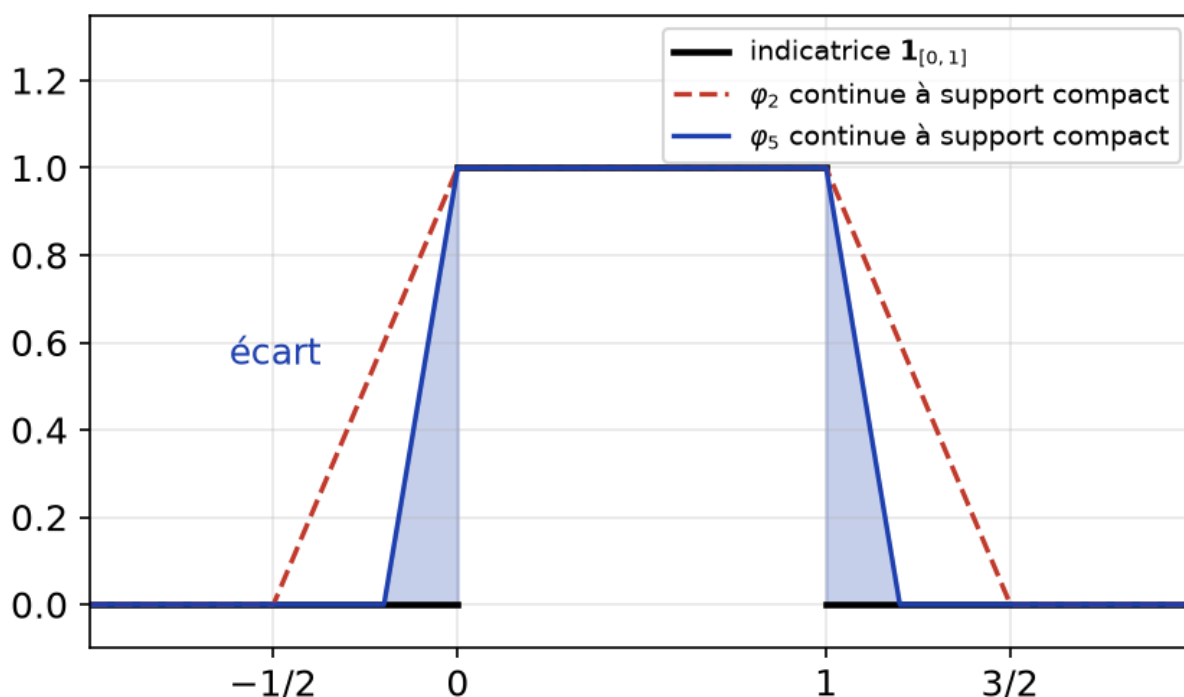
D'après le point précédent et l'inégalité de Minkowski, il suffit d'approcher 1_A avec $\lambda(A) < +\infty$. Par convergence dominée, $1_A \cap [-N, N]^d \rightarrow 1_A$ dans L^p , donc on peut supposer A borné. La régularité de la mesure de Lebesgue fournit, pour $\varepsilon > 0$, un compact K et un ouvert borné U avec $K \subset A \subset U$ et $\lambda(U \setminus K) \leq \varepsilon$. On pose alors

$$\varphi(x) = \frac{d(x, U^c)}{d(x, U^c) + d(x, K)}.$$

Cette fonction est continue, vaut 1 sur K , 0 hors de U , et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Ainsi, $|\varphi - 1_A| \leq 1_{U \setminus K}$, d'où $\|\varphi - 1_A\|_p \leq \varepsilon^{1/p}$. Pour L^∞ , une fonction continue φ vérifie toujours $\|\varphi - 1_{[0,1]}\|_\infty \geq 1/2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour un intervalle, la construction est explicite. Par exemple, la fonction trapèze φ_n , nulle hors de $[-1/n, 1 + 1/n]$, égale à 1 sur $[0, 1]$ et affine entre les deux, vérifie

$\|\varphi_n - 1_{[0,1]}\|_p^p = \frac{2}{n(p+1)}$. Comme le montre la figure ci-dessous, l'écart se réduit à deux petits triangles.



3. Utiliser un argument de densité

Méthode :

Pour **utiliser un argument de densité**, on procède en trois temps. D'abord, on démontre la propriété pour une classe simple de fonctions : indicatrices d'intervalles, fonctions étagées ou fonctions de C_c . Ensuite, on vérifie que les quantités en jeu dépendent continûment de f pour la norme $\|\cdot\|_p$, souvent grâce à Hölder ou Minkowski. Enfin, on conclut par un découpage en $\varepsilon/3$.

Exemple :

Montrons que la translation $\tau_h f = f(\cdot - h)$ vérifie $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, pour $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $p < +\infty$. Pour $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, c'est une conséquence de la continuité uniforme. Ensuite, pour $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$, l'invariance de la mesure par translation donne $\|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p$. Donc la limite supérieure est au plus 2ε , pour tout ε .

Ce qu'il faut retenir

- L'inégalité de Jensen $\varphi\left(\int g\right) \leq \int \varphi \circ g$ vaut sur un espace de probabilité pour φ convexe.
- L'inégalité de Hölder $\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$ découle de l'inégalité de Young $ab \leq a^p/p + b^q/q$.
- L'inégalité de Minkowski fait de $\|\cdot\|_p$ une semi-norme ; le quotient par les fonctions nulles presque partout donne l'espace normé L^p .
- La norme $\|f\|_\infty$ est la borne supérieure essentielle, et $|f| \leq \|f\|_\infty$ presque partout.
- Théorème de Riesz-Fischer : chaque L^p est complet, et L^2 est un espace de Hilbert.
- Une suite convergente dans L^p , avec $p < +\infty$, admet une sous-suite convergeant presque

partout et dominée dans L^p .

- La convergence presque partout avec domination entraîne la convergence dans L^p ; sans domination, c'est faux.
- Si $\mu(X) < +\infty$, alors $L^q \subset L^p$ pour $p \leq q$; sur $\mathbb{R}$, aucune inclusion ; pour ℓ^p , l'inclusion est renversée.
- Pour $p < +\infty$, les fonctions étagées intégrables et les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p , mais C_c n'est pas dense dans L^∞ .

Questions fréquentes sur espaces L^p

Pourquoi les éléments de L^p sont-ils des classes et non des fonctions ?

Parce que $|f|_p = 0$ signifie seulement que f est nulle presque partout. Pour obtenir une norme, on identifie deux fonctions égales presque partout. En conséquence, la valeur d'un élément de L^p en un point n'a pas de sens pour la mesure de Lebesgue.

A-t-on toujours L^q inclus dans L^p quand p est plus petit que q ?

Non. C'est vrai sur un espace de mesure finie, avec $|f|_p \leq \mu(X)^{1/p - 1/q} |f|_q$. Sur $\mathbb{R}$, aucune inclusion n'a lieu, et pour les suites l'inclusion est renversée : $\ell^p \subset \ell^q$.

La convergence dans L^p entraîne-t-elle la convergence presque partout ?

Pas pour la suite entière : la bosse glissante converge vers 0 dans L^p sans converger en aucun point. En revanche, on peut toujours extraire une sous-suite qui converge presque partout, et même dominée par une fonction de L^p .

Pourquoi les fonctions continues ne sont-elles pas denses dans L^∞ ?

Une fonction continue ne peut pas sauter brusquement. Pour l'indicatrice de $[0,1]$, on montre que $\|\varphi - 1_{[0,1]}\|_\infty \geq 1/2$ pour toute φ continue. La densité de C_c n'est vraie que pour $1 \leq p < +\infty$.

Pour aller plus loin en L3

- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur espaces \$L_p\$](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#), [Complétude](#), [espaces de Banach et point fixe](#)
- Chapitre précédent : [Mesure produit, Fubini et changement de variables](#)
- Chapitre suivant : [Groupes : quotients et actions de groupes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)