

Espaces L^p

Corrigé de l'exercice 1 : Fonctions égales presque partout

1. La relation est réflexive, car $\{f \neq f\} = \emptyset$. Elle est symétrique, car $\{f \neq g\} = \{g \neq f\}$. Enfin, elle est transitive. En effet, si $f = g$ hors d'un ensemble négligeable N_1 et $g = h$ hors d'un ensemble négligeable N_2 , alors $f = h$ hors de $N_1 \cup N_2$, qui est négligeable. **C'est donc une relation d'équivalence.**
2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Par σ -additivité, $\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \lambda(\{r\}) = 0$. Ainsi, $1_{\mathbb{Q}}$ est nulle hors de $\mathbb{Q}$, donc presque partout. **Sa classe dans $L^p(\mathbb{R})$ est le vecteur nul.**
3. Si $f = 0$ presque partout, alors $|f|^p = 0$ presque partout et son intégrale est nulle. Réciproquement, supposons $\int |f|^p = 0$. Pour $n \geq 1$, l'inégalité de Markov donne $\lambda(\{|f| > 1/n\}) \leq n^p \int |f|^p = 0$. Or $\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{|f| > 1/n\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles négligeables. **Donc $f = 0$ presque partout.**
4. Les fonctions $f = 1_{\{0\}}$ et $g = 0$ diffèrent seulement en 0 , donc elles ont la même classe. Pourtant, $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$. Par conséquent, la « valeur en 0 » d'une classe n'est pas définie. En revanche, soient f et g continues et égales presque partout. L'ensemble $U = \{f \neq g\}$ est ouvert, car $f - g$ est continue. S'il n'était pas vide, il contiendrait un intervalle $]a, b[$ avec $a < b$, de mesure $b - a > 0$. Ainsi, U est un ouvert négligeable, donc vide. **Une classe contient au plus une fonction continue.**

Point de méthode : pour prouver qu'une propriété vaut presque partout, on écrit l'ensemble exceptionnel comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables.

Corrigé de l'exercice 2 : Inégalité de Jensen sur $[0,1]$

1. La mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est une probabilité. La fonction $g = \ln f$ est intégrable et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Jensen donne alors

$$\exp\left(\int_0^1 \ln f\right) \leq \int_0^1 \exp(\ln f) = \int_0^1 f. \text{ C'est l'inégalité demandée.}$$

2. On pose $f = x_i$ sur $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ pour $1 \leq i \leq n$, et $f(1) = x_n$. Cette fonction étagée est strictement positive et bornée, et $\ln f$ est bornée. Ainsi, les deux fonctions sont intégrables.

De plus, $\int_0^1 \ln f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$ et $\int_0^1 f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. La question 1 donne donc

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i\right) = (x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

C'est l'inégalité arithmético-géométrique.

3. D'abord, $|f| \in L^1([0,1])$, car $L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ sur un espace de mesure finie. Ensuite,

$$\varphi(t) = t^2 \text{ est convexe sur } \mathbb{R}. \text{ Par l'inégalité de Jensen, } \left(\int_0^1 |f|\right)^2 \leq \int_0^1 |f|^2.$$

4. Avec $f(x) = e^x$, on a $\ln f(x) = x$, donc $\exp\left(\int_0^1 x \, dx\right) = e^{1/2} \approx 1,649$. Par

ailleurs, $\int_0^1 e^x \, dx = e - 1 \approx 1,718$. De même, $(e-1)^2 \approx 2,952$ et

$$\int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,195. \text{ Les deux inégalités sont bien vérifiées : } 1,649 \leq 1,718$$

et $2,952 \leq 3,195$.

Corrigé de l'exercice 3 : Puissances de x dans les espaces L^p

1. On a $|f_\alpha|^p = x^{-\alpha p}$. Or l'intégrale $\int_0^1 x^{-\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$. Ainsi, $f_\alpha \in L^p([0,1])$ **si et seulement si** $\alpha p < 1$, c'est-à-dire $p < 1/\alpha$. Si $\alpha \geq 1$, aucun $p \geq 1$ ne convient.
2. De même, $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Donc $f_\alpha \in L^p([1, +\infty[)$ **si et seulement si** $p > 1/\alpha$.
3. Pour $p < +\infty$, il faudrait à la fois $\alpha p < 1$ et $\alpha p > 1$, ce qui est impossible. Pour $p = +\infty$, étudions $]0,1]$. Pour tout $C > 0$, l'ensemble $\{f_\alpha > C\}$ contient $]0, \min(1, C^{-1/\alpha})[$, qui est de mesure strictement positive. Donc $|f_\alpha|_{L^\infty([0,1])} = +\infty$. En revanche, $0 < f_\alpha \leq 1$ sur $[1, +\infty[$ et f_α est continue, donc $|f_\alpha|_{L^\infty([1, +\infty[)} = 1$. **Ainsi, f_α n'appartient à aucun espace $L^p([0, +\infty[)$, pour $p \in [1, +\infty]$.**
4. On effectue le changement de variable $x = e^{-u}$, avec $u \in [0, +\infty[$ et $dx = -e^{-u} du$. Comme $|\ln x| = u$, on obtient
- $$\int_0^1 g(x)^p dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{pu/2}}{(1+u)^p} e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(p/2-1)u}}{(1+u)^p} du.$$
- Si $p = 2$, l'intégrale vaut $\int_0^{+\infty} (1+u)^{-2} du = 1$. Si $p < 2$, l'intégrande est majorée par $e^{(p/2-1)u}$, qui est intégrable. Si $p > 2$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance : l'intégrande tend vers $+\infty$, et l'intégrale diverge. Enfin, g tend vers $+\infty$ en 0 , donc $g \notin L^\infty$. **Finalement, $g \in L^p([0,1])$ si et seulement si $p \leq 2$, et $\|g\|_2 = 1$.**

Point de méthode : le facteur logarithmique permet d'obtenir une fonction qui appartient à L^p exactement jusqu'à l'exposant critique, bornes comprises.

Corrigé de l'exercice 4 : Inégalité de Hölder sur des exemples

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz, cas $p = q = 2$ de Hölder, donne

$$\left| \int_0^1 x f(x) dx \right| \leq \left(\int_0^1 x^2 dx \right)^{1/2} \|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_2. \text{ Dans l'espace préhilbertien } L^2([0,1]), \text{ l'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si les deux vecteurs sont liés.}$$

Vérifions : pour $f(x) = cx$, on a $\left| \int_0^1 cx^2 dx \right| = \frac{|c|}{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{|c|}{\sqrt{3}} = \frac{|c|}{3}$.

L'égalité a lieu si et seulement si $f(x) = cx$ presque partout, pour une constante c .

2. On applique Hölder avec $p = 4$ et $q = 4/3$ au produit $|f| \cdot x^{-1/2}$. Or

$$(x^{-1/2})^{4/3} = x^{-2/3} \text{ et } \int_0^1 x^{-2/3} dx = 3. \text{ Donc } \|x^{-1/2}\|_{4/3} = 3^{3/4}. \text{ Par}$$

conséquent, $\int_0^1 |f(x)| x^{-1/2} dx \leq 3^{3/4} \|f\|_4.$

3. Prenons la fonction g de l'exercice 3, qui appartient à $L^2(]0,1])$. Alors

$$g(x) x^{-1/2} = \frac{1}{x(1+|\ln x|)}. \text{ Avec } x = e^{-u}, \text{ on obtient}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+|\ln x|)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u} = +\infty. \text{ Le produit n'est donc pas intégrable. Ce n'est pas}$$

contradictoire : $x^{-1/2} \notin L^2(]0,1])$, car $\int_0^1 x^{-1} dx = +\infty$. L'inégalité de Hölder ne fournit alors que la majoration triviale par $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 5 : Hölder généralisée

1. Si $q = +\infty$, alors $r = p$ et $|fg| \leq |f| |g|_\infty$ presque partout. On intègre la puissance r et on obtient le résultat. Le cas $p = +\infty$ est symétrique. Supposons donc $p, q < +\infty$. Alors $P = p/r$ et $Q = q/r$ vérifient $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = r\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1$. Ce sont donc des

exposants conjugués de $[1, +\infty[$. L'inégalité de Hölder appliquée à $|f|^r$ et $|g|^r$ donne

$$\int |f|^r |g|^r \leq \left(\int |f|^p \right)^{r/p} \left(\int |g|^q \right)^{r/q}.$$

En élevant à la puissance $1/r$, on obtient $|fg|_r \leq |f|_p |g|_q$.

2. On définit r par $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{s}$. Ainsi, $r > 1$ et r est le conjugué de s . D'après Hölder, puis la question 1, $\int |fgh| \leq |fg|_r |h|_s \leq |f|_p |g|_q |h|_s$.

3. On a $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. De plus, $|\sqrt{x}|_2 = \left(\int_0^1 x \, dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La question 2 donne donc

$$\int_0^1 |f| |g| \sqrt{x} \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |f|_4 |g|_4.$$

Au passage, la question 1 avec $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ montre que $fg \in L^2$.

Corrigé de l'exercice 6 : Minkowski et exposants inférieurs à 1

1. D'après Minkowski, $|f|_p = |(f - g) + g|_p \leq |f - g|_p + |g|_p$. De même, en échangeant les rôles, $|g|_p \leq |g - f|_p + |f|_p$. Ainsi, $||f|_p - |g|_p| \leq |f - g|_p$, et l'application $f \rightarrow |f|_p$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

2. On a $\int_0^1 |f|^{1/2} = \frac{1}{2}$, donc $N(f) = \frac{1}{4}$. De même, $N(g) = \frac{1}{4}$. Or $f + g = 1$ sur $[0, 1]$, donc $N(f + g) = 1$. Par conséquent, $N(f + g) = 1 > \frac{1}{2} = N(f) + N(g)$.
L'inégalité triangulaire est fautive : N n'est pas une norme.

3. Si $a = 0$, l'inégalité est une égalité. Sinon, on pose $t = b/a \geq 0$ et $k(t) = 1 + t^p - (1+t)^p$. D'une part, $k(0) = 0$. D'autre part, pour $t > 0$, $k'(t) = p(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}) \geq 0$, car $p - 1 < 0$ et $t < 1 + t$. Donc $k \geq 0$, et en multipliant par a^p , on obtient $(a+b)^p \leq a^p + b^p$. Montrons ensuite que d est une distance. D'abord, $d(f, g)$ est finie, car $|f - g|^p \leq |f|^p + |g|^p$. Ensuite, $d(f, g) = 0$ équivaut à $f = g$ presque partout, comme dans l'exercice 1. La symétrie est claire. Enfin,

$|f - h| \leq |f - g| + |g - h|$ et la croissance de $t \rightarrow t^p$ donnent
 $|f - h|^p \leq |f - g|^p + |g - h|^p$. **En intégrant**, $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$: d est une distance.

Corrigé de l'exercice 7 : Calcul de normes infinies

1. Clairement, $\sup f = 5$. Cependant, f coïncide avec $x \rightarrow x$ hors de $\mathbb{Q}$, donc presque partout. Ainsi, $f \leq 1$ presque partout, et $|f|_\infty \leq 1$. Inversement, pour $c < 1$, l'ensemble $\{f > c\}$ contient $] \max(c, 0), 1] \setminus \mathbb{Q}$, de mesure $1 - \max(c, 0) > 0$. Donc $|f|_\infty \geq c$ pour tout $c < 1$. **Finalement**, $\sup f = 5$ et $|f|_\infty = 1$.
2. La fonction g coïncide presque partout avec $2 \cdot 1_{[0, 1/2]}$. Or cette dernière vaut 2 sur un ensemble de mesure $\frac{1}{2}$ et 0 ailleurs. **Donc** $|g|_\infty = 2$, alors que $\sup g = 3$.
3. Si $|f|_\infty = +\infty$, il n'y a rien à prouver. Sinon, par définition de la borne inférieure, pour tout $n \geq 1$ il existe $C_n < |f|_\infty + 1/n$ avec $|f| \leq C_n$ presque partout. Ainsi, $A_n = \{|f| > |f|_\infty + 1/n\}$ est négligeable. **Donc** $\{|f| > |f|_\infty\} = \bigcup_n A_n$ est négligeable, et $|f| \leq |f|_\infty$ presque partout.
4. D'abord, $|\varphi| \leq \sup |\varphi|$ partout, donc $|\varphi|_\infty \leq \sup |\varphi|$. Ensuite, soit $c < \sup |\varphi|$. Il existe x_0 avec $|\varphi(x_0)| > c$. Par continuité, $|\varphi| > c$ sur un intervalle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ inclus dans $]0, 1[$, de mesure $2\delta > 0$. Donc $|\varphi|_\infty \geq c$. **Ainsi**, $|\varphi|_\infty = \sup_{]0, 1[} |\varphi|$.

Corrigé de l'exercice 8 : Inclusions sur un espace de mesure finie

1. On peut supposer $|f|_q < +\infty$. On applique Hölder à $|f|^p \cdot 1$ avec l'exposant $P = q/p > 1$ et son conjugué $Q = \frac{q}{q-p}$:

$$\int |f|^p \leq \left(\int |f|^q \right)^{p/q} \left(\int 1 \right)^{1 - p/q} = |f|_q^p \mu(X)^{1 - p/q}.$$

En élevant à la puissance $1/p$, on obtient $|f|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |f|_q$. Pour $q = +\infty$, on intègre $|f|^p \leq |f|_\infty^p$, valable presque partout. Ainsi, $|f|_p \leq \mu(X)^{1/p} |f|_\infty$, ce qui correspond à la formule avec $\frac{1}{q} = 0$.

2. Si $f \in L^q$, la question 1 montre que $|f|_p < +\infty$. L'injection $L^q \rightarrow L^p$ est linéaire et vérifie $|f|_p \leq C |f|_q$, avec $C = \mu(X)^{1/p - 1/q}$. **Elle est donc continue.** En particulier, $|f_n - f|_p \leq C |f_n - f|_q$, donc la convergence dans L^q entraîne la convergence dans L^p .

3. Soit $f \in L^q$. D'après la question 2, $|f|^p$ est intégrable. La fonction $\varphi(t) = |t|^{q/p}$ est convexe sur $\mathbb{R}$, car $q/p > 1$. Par l'inégalité de Jensen, $\left(\int |f|^p\right)^{q/p} \leq \int |f|^q$. **En élevant à la puissance $1/q$, on retrouve $|f|_p \leq |f|_q$.**

4. Soit $f(x) = x^{-1/q}$ sur $]0,1]$. Comme $p/q < 1$, l'intégrale $\int_0^1 x^{-p/q} dx$ converge, donc $f \in L^p$. En revanche, $\int_0^1 x^{-1} dx = +\infty$, donc $f \notin L^q$. **L'inclusion $L^q([0,1]) \subset L^p([0,1])$ est stricte.**

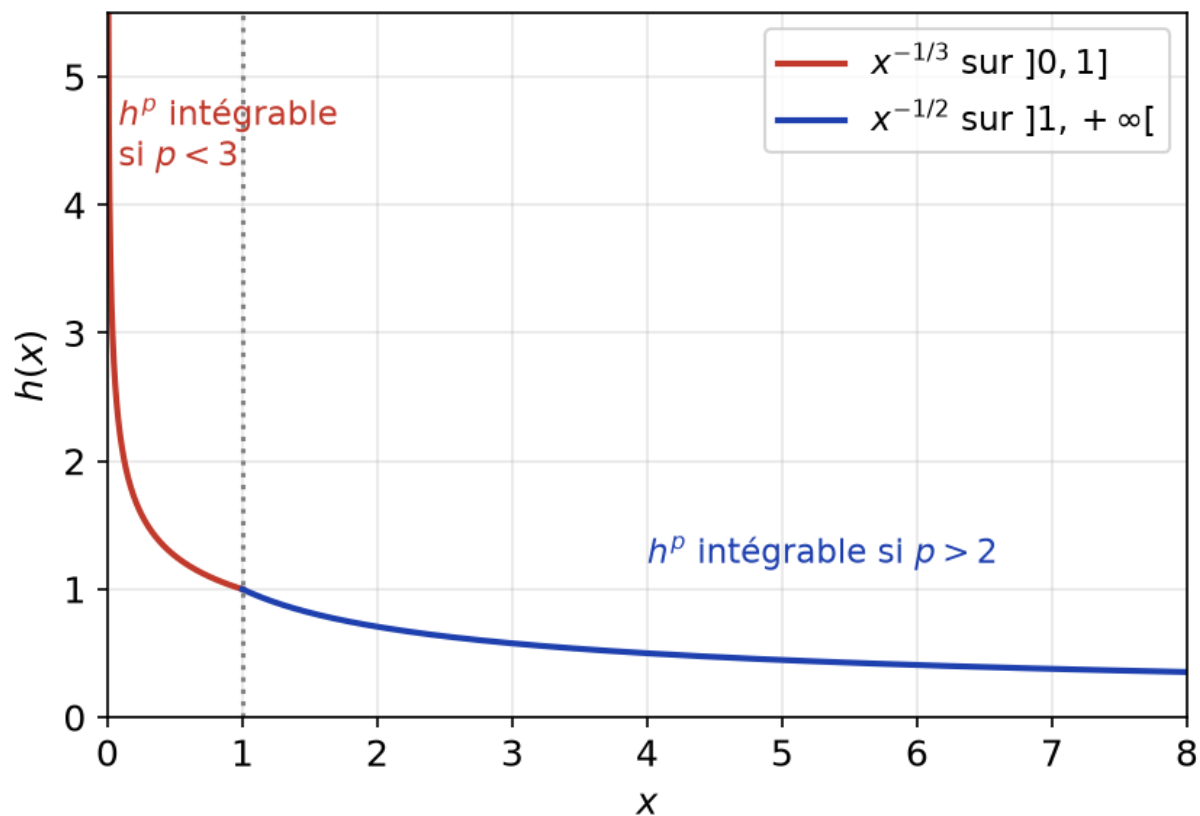
Corrigé de l'exercice 9 : Des espaces L_p non emboîtés sur $\mathbb{R}$

1. On a $\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2$, donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. En revanche, $\int_0^1 x^{-1} dx = +\infty$. **Donc $f \in L^1(\mathbb{R}) \setminus L^2(\mathbb{R})$.**

2. On a $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx = 1$, donc $g \in L^2(\mathbb{R})$. En revanche, $\int_1^{+\infty} x^{-1} dx = +\infty$. **Donc $g \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.**

3. Pour $p < +\infty$, on découpe l'intégrale : $\int_{\mathbb{R}} h^p = \int_0^1 x^{-p/3} dx + \int_1^{+\infty} x^{-p/2} dx$. La première intégrale converge si et seulement si $p/3 < 1$, soit $p < 3$. La seconde converge si et

seulement si $p/2 > 1$, soit $p > 2$. Par ailleurs, h n'est pas essentiellement bornée, car $h > C$ sur $]0, \min(1, C^{-3})[$. La figure ci-dessous montre les deux régimes. **Ainsi, $h \in L^p(\mathbb{R})$ si et seulement si $2 < p < 3$.**



4. Posons $u = x^{-1/q} 1_{]0,1]}$. Comme $p/q < 1$, on a $\int_0^1 u^p = \int_0^1 x^{-p/q} dx < +\infty$, tandis que $\int_0^1 u^q = \int_0^1 x^{-1} dx = +\infty$. Ensuite, posons $v = x^{-1/p} 1_{[1, +\infty[}$. Comme $q/p > 1$, on a $\int_1^{+\infty} v^q = \int_1^{+\infty} x^{-q/p} dx < +\infty$, tandis que $\int_1^{+\infty} v^p = \int_1^{+\infty} x^{-1} dx = +\infty$. **Donc $u \in L^p \setminus L^q$ et $v \in L^q \setminus L^p$: aucune inclusion n'a lieu.**

Corrigé de l'exercice 10 : Interpolation entre deux espaces L^p

1. Si $|f|_p$ ou $|f|_q$ est nulle, alors $f = 0$ presque partout et tout est nul. Si l'une est infinie, il n'y a rien à prouver. On suppose donc ces normes finies et non nulles. On pose $P = \frac{p}{\theta r}$ et $Q = \frac{q}{(1-\theta)r}$. Alors $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = r \left(\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} \right) = 1$. Ce sont donc des exposants conjugués de $]1, +\infty[$. L'inégalité de Hölder donne

$$\int |f|^r \leq \left(\int |f|^p \right)^{\theta r / p} \left(\int |f|^q \right)^{(1-\theta) r / q} = |f|_p^{\theta r} |f|_q^{(1-\theta) r}.$$

En élevant à la puissance $1/r$, on obtient $|f|_r \leq |f|_p^\theta |f|_q^{1-\theta}$.

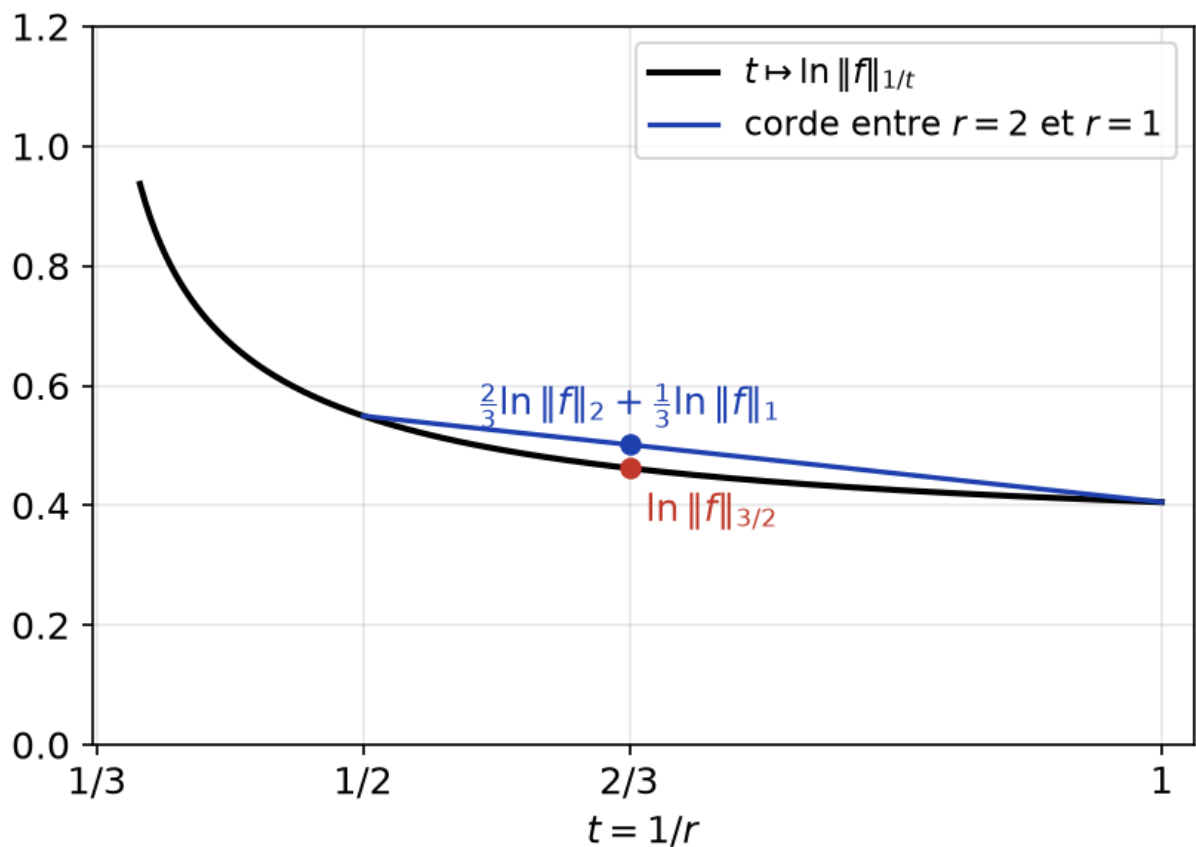
2. Si $f \in L^p \cap L^q$, le membre de droite est fini. **Donc** $f \in L^r$, **et** $L^p \cap L^q \subset L^r$.
3. Presque partout, $|f|^r = |f|^p |f|^{r-p} \leq |f|_\infty^{r-p} |f|^p$. En intégrant, $|f|_r^r \leq |f|_\infty^{r-p} |f|_p^p$. **Donc** $|f|_r \leq |f|_p^{p/r} |f|_\infty^{1-p/r}$. Avec $p = 1$, on obtient $L^1 \cap L^\infty \subset L^r$ pour tout $r \geq 1$.

4. On a $|f|_1 = \int_0^1 x^{-1/3} dx = \frac{3}{2}$. Ensuite, $|f|_2^2 = \int_0^1 x^{-2/3} dx = 3$, donc $|f|_2 = \sqrt{3}$.

. De même, $|f|_{3/2}^{3/2} = \int_0^1 x^{-1/2} dx = 2$, donc $|f|_{3/2} = 2^{2/3} \approx 1,587$. Ensuite,

$\frac{2}{3} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2}$ donne $\theta = \frac{1}{3}$. Le majorant vaut alors $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} (\sqrt{3})^{2/3} = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \approx 1,651$. **On a bien** $1,587 \leq 1,651$.

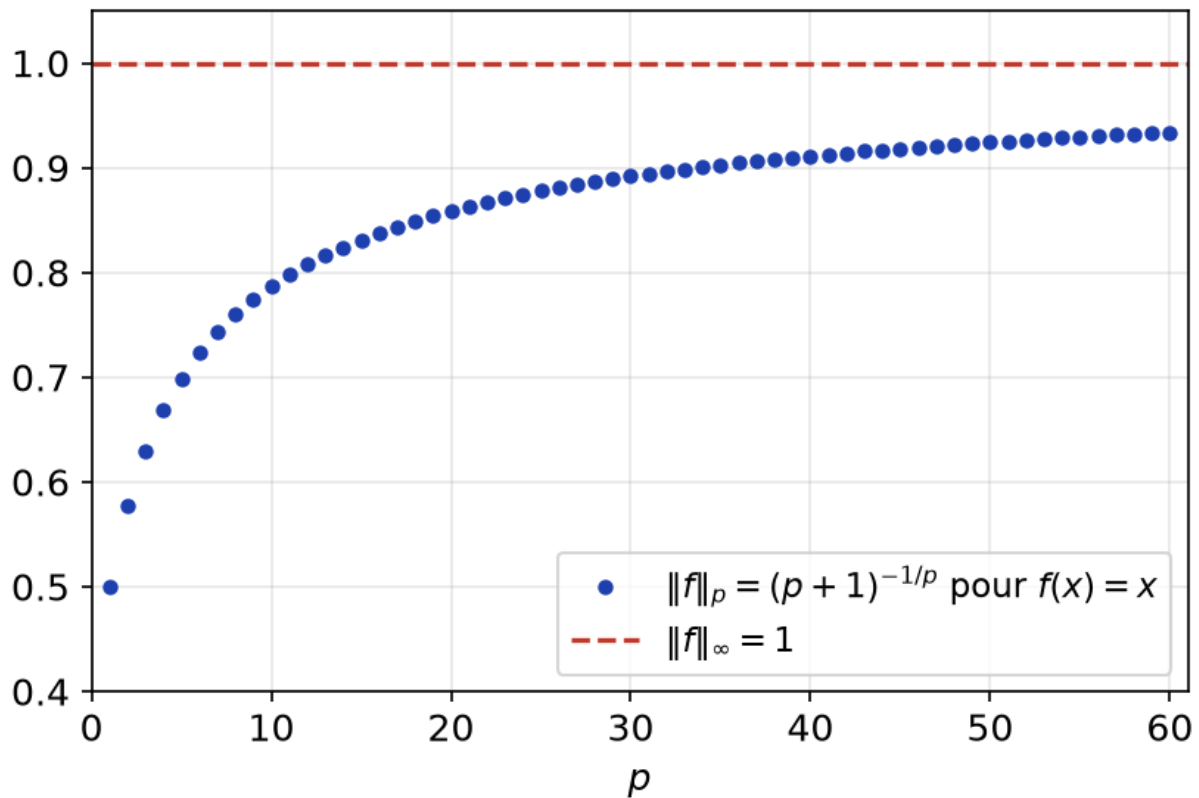
Autrement dit, la fonction $t \rightarrow \ln |f|_{1/t}$ est convexe : c'est la **log-convexité** des normes L^p . Pour ce f , on a $|f|_r^r = \frac{3}{3-r}$ pour $r < 3$. Comme le montre la figure ci-dessous, le point de la courbe en $t = 2/3$ est sous la corde.



Corrigé de l'exercice 11 : Limite de la norme p quand p tend vers l'infini

1. Presque partout, $|f|^p \leq |f|_\infty^p$. En intégrant, $|f|_p \leq \mu(X)^{1/p} |f|_\infty < +\infty$, donc $f \in L^p$. Or $\mu(X)^{1/p} = \exp\left(\frac{\ln \mu(X)}{p}\right) \rightarrow 1$. **Donc** $\limsup_{p \rightarrow +\infty} |f|_p \leq |f|_\infty$.
2. Soit $A_c = \{|f| > c\}$. Si $\mu(A_c) = 0$, on aurait $|f| \leq c$ presque partout, puis $|f|_\infty \leq c$, ce qui est exclu. Donc $\mu(A_c) > 0$. Ensuite, $|f|^p \geq c^p 1_{A_c}$, d'où $|f|_p \geq c \mu(A_c)^{1/p}$. Comme $0 < \mu(A_c) < +\infty$, on a $\mu(A_c)^{1/p} \rightarrow 1$. **Donc** $\liminf_{p \rightarrow +\infty} |f|_p \geq c$.
3. Si $|f|_\infty = 0$, alors $f = 0$ presque partout, et toutes les normes sont nulles. Sinon, la question 2 vaut pour tout $c < |f|_\infty$, donc $\liminf |f|_p \geq |f|_\infty \geq \limsup |f|_p$. **Ainsi**, $|f|_p \rightarrow |f|_\infty$.

4. On a $\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$, donc $|f|_p = (p+1)^{-1/p} = \exp\left(-\frac{\ln(p+1)}{p}\right)$. Cette quantité tend vers 1. Or f est continue et $\sup_{]0,1[} f = 1$, donc $|f|_\infty = 1$ d'après l'exercice 7. **Le résultat est vérifié**, comme le montre la figure ci-dessous.



5. Avec $x = e^{-u}$, on obtient $|g|_n^n = \int_0^1 (-\ln x)^n dx = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du$. Une intégration par parties montre que cette intégrale J_n vérifie $J_n = n J_{n-1}$, avec $J_0 = 1$. Donc $|g|_n^n = n!$. Par ailleurs, $e^n = \sum_k \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!}$, d'où $n! \geq (n/e)^n$. Ainsi, $|g|_n = (n!)^{1/n} \geq \frac{n}{e} \rightarrow +\infty$. C'est cohérent : g est continue et tend vers $+\infty$ en 0, donc $|g|_\infty = +\infty$. Le résultat s'étend ainsi aux fonctions non bornées.

Corrigé de l'exercice 12 : Cas d'égalité et dualité de Hölder

1. On a $|g|^q = |f|^{(p-1)q}$. Or $(p-1)q = (p-1) \cdot \frac{p}{p-1} = p$. Donc

$$\int |g|^q = |f|_p^p < +\infty, \text{ et } g \in L^q. \text{ De plus, } |g|_q = |f|_p^{p/q} = |f|_p^{p-1}, \text{ car } p/q = p-1.$$

2. En tout point, $f \operatorname{sgn}(f) = |f|$, donc $fg = |f|^{p-1} |f| = |f|^p$. Ainsi,

$$\int fg \, d\mu = |f|_p^p.$$

3. D'une part, pour $|h|_q \leq 1$, l'inégalité de Hölder donne $\left| \int fh \right| \leq |f|_p |h|_q \leq |f|_p$. D'autre part, $h_0 = g / |g|_q$ est de norme 1, et $\int f h_0 = \frac{|f|_p^p}{|f|_p^{p-1}} = |f|_p$. **La borne supérieure vaut donc $|f|_p$, et elle est atteinte en h_0 .**

4. Pour $p = 1$, on prend $h = \operatorname{sgn}(f)$, qui vérifie $|h|_\infty \leq 1$ et $\int fh = \int |f| = |f|_1$. Inversement, $\left| \int fh \right| \leq |f|_1 |h|_\infty$. **Donc $|f|_1 = \max \left\{ \left| \int fh \right| : |h|_\infty \leq 1 \right\}$.**

5. Soit h avec $|h|_1 \leq 1$. On a $\left| \int_0^1 xh \right| \leq \int_0^1 x|h|$. Supposons $\int_0^1 x|h| = 1$. Alors

$$\int_0^1 (1-x)|h| = \int |h| - \int x|h| \leq 0. \text{ Comme } (1-x)|h| \geq 0, \text{ on aurait } (1-x)|h| = 0$$

presque partout, donc $h = 0$ presque partout, ce qui contredit $\int x|h| = 1$. Ainsi,

$$\left| \int_0^1 xh \right| < 1. \text{ Ensuite, } h_n = n \mathbf{1}_{[1-1/n, 1]} \text{ vérifie } |h_n|_1 = 1 \text{ et}$$

$$\int_0^1 x h_n(x) \, dx = n \cdot \frac{1 - (1 - 1/n)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

La borne supérieure vaut donc $1 = |f|_\infty$, mais elle n'est pas atteinte.

Corrigé de l'exercice 13 : Convergence presque partout sans convergence en norme

1. En $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout n . Pour $x \in]0,1]$, dès que $n > 1/x$, on a $x \notin]0, 1/n]$, donc $f_n(x) = 0$. Ainsi, $f_n(x) \rightarrow 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
2. On a $|f_n|_p^p = n^p \cdot \frac{1}{n} = n^{p-1}$, donc $|f_n|_p = n^{1-1/p}$. Pour $p = 1$, cette norme vaut 1, et pour $p > 1$, elle tend vers $+\infty$. Donc (f_n) ne tend pas vers 0 dans L^p . Supposons maintenant que $f_n \rightarrow f$ dans L^p . D'après le théorème de Riesz-Fischer, une sous-suite converge presque partout vers f . Or elle converge aussi vers 0, donc $f = 0$ presque partout. C'est absurde. **La suite ne converge dans aucun L^p .**
3. On a $|g_n|_p = n^\alpha \cdot n^{-1/p} = n^{\alpha-1/p}$. Donc $g_n \rightarrow 0$ dans L^p si et seulement si $\alpha < 1/p$.
4. Par passage à la limite dans $|f_n| \leq G$, on obtient $|f| \leq G$ presque partout. Donc $|f_n - f|^p \leq (2G)^p$, fonction intégrable. De plus, $|f_n - f|^p \rightarrow 0$ presque partout. Le théorème de convergence dominée donne alors $\int |f_n - f|^p \rightarrow 0$. Pour notre suite, une fonction dominante devrait majorer $\sup_n f_n$. Or, pour $x \in]0,1]$,
 $\sup_n f_n(x) = \lfloor 1/x \rfloor \geq \frac{1}{x} - 1$. Cette fonction n'est pas intégrable sur $]0,1]$, donc aucune domination n'est possible.

Corrigé de l'exercice 14 : La bosse glissante

1. L'écriture impose $2^k \leq n < 2^{k+1}$, donc $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ est unique, puis $j = n - 2^k$. Ensuite, $|g_n|_p^p = \lambda(I_n) = 2^{-k}$, donc $|g_n|_p = 2^{-k/p}$. Quand $n \rightarrow +\infty$, on a $k \rightarrow +\infty$. Ainsi, $g_n \rightarrow 0$ dans L^p .
2. Fixons $x \in [0,1]$ et $k \geq 2$. Les intervalles $[j 2^{-k}, (j+1) 2^{-k}]$, pour $0 \leq j < 2^k$, recouvrent $[0,1]$. Donc il existe $n \in [2^k, 2^{k+1}[$ avec $g_n(x) = 1$. De plus, x appartient à au plus deux de ces intervalles, alors qu'il y en a $2^k \geq 4$. Donc il existe aussi $n \in [2^k, 2^{k+1}[$ avec $g_n(x) = 0$. **Chaque valeur est prise une infinité de fois, donc**

$(g_n(x))$ ne converge en aucun point.

3. Prenons $n_k = 2^k$, c'est-à-dire $j = 0$. Alors $g_{2^k} = 1_{[0, 2^{-k}]}$. Pour $x > 0$, dès que $2^{-k} < x$, on a $g_{2^k}(x) = 0$. **La sous-suite (g_{2^k}) converge vers 0 en tout point de $]0, 1]$, donc presque partout.**
4. On a $\|g_n\|_\infty = 1$ pour tout n , car I_n est de mesure strictement positive. Si (g_n) convergerait dans L^∞ , elle convergerait dans L^1 , car $[0, 1]$ est de mesure finie, donc vers 0. **C'est impossible : la suite ne converge pas dans L^∞ .**

Corrigé de l'exercice 15 : Sous-suite convergeant presque partout

1. Soit $H_N = \sum_{n \leq N} h_n$. Par l'inégalité de Minkowski, $\|H_N\|_p \leq \sum_{n \leq N} \|h_n\|_p \leq S$.
Ensuite, H_N^p croît vers H^p . Le théorème de convergence monotone donne donc $\int H^p = \lim_N \int H_N^p \leq S^p$. Ainsi, $\|H\|_p \leq S$, et H est finie presque partout. En un point où $H(x) < +\infty$, la série $\sum h_n(x)$ converge. **Donc son terme général $h_n(x)$ tend vers 0 presque partout.**
2. On construit φ par récurrence. Pour $k \geq 1$, il existe un rang N_k tel que $\|f_n - f\|_p \leq 2^{-k}$ pour $n \geq N_k$. On pose $\varphi(k) = \max(N_k, \varphi(k-1) + 1)$. Alors φ est strictement croissante et $h_k = |f_{\varphi(k)} - f|$ vérifie $\sum_k \|h_k\|_p \leq 1$. **D'après la question 1, $f_{\varphi(k)} \rightarrow f$ presque partout.**
3. Soit $H = \sum_k |f_{\varphi(k)} - f|$. On a $\|H\|_p \leq 1$ d'après la question 1. De plus, $|f_{\varphi(k)}| \leq |f| + |f_{\varphi(k)} - f| \leq |f| + H$. **Ainsi, $G = |f| + H$ convient, avec $\|G\|_p \leq \|f\|_p + 1$.**
4. La sous-suite $(f_{\varphi(k)})$ converge vers f hors d'un ensemble négligeable N_1 . Elle converge aussi vers g hors d'un ensemble négligeable N_2 , comme suite extraite. Par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$, $f = g$ hors de $N_1 \cup N_2$, **donc presque partout.**

Corrigé de l'exercice 16 : Approcher une indicatrice par des fonctions continues

1. Sur $[-1/n, 0]$, on a $\varphi_n(x) = 1 + nx$ et $f(x) = 0$, sauf en 0 où les deux valent 1.

Avec $t = 1 + nx$, on obtient $\int_{-1/n}^0 (1 + nx)^p dx = \frac{1}{n} \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{n(p+1)}$. Par

symétrie, la contribution de $[1, 1 + 1/n]$ est la même. Ailleurs, $\varphi_n = f$. Donc

$$|\varphi_n - f|_p = \left(\frac{2}{n(p+1)} \right)^{1/p} \rightarrow 0.$$

2. Supposons par l'absurde que $c = |\varphi - f|_\infty < \frac{1}{2}$. D'après l'exercice 7, $|\varphi - f| \leq c$ presque partout. Donc $\varphi \geq 1 - c$ presque partout sur $]0, 1[$. L'ensemble $\{x \in]1, 1 + 1/n[: \varphi(x) < 1 - c\}$ est ouvert par continuité, et négligeable. Il est donc vide, et $\varphi \geq 1 - c$ sur $]0, 1[$. Par continuité en 0, $\varphi(0) \geq 1 - c$. De même, $\varphi \leq c$ sur $]-1, 0[$, donc $\varphi(0) \leq c$. On obtient $1 - c \leq c$, soit $c \geq \frac{1}{2}$: contradiction. **Ainsi, $|\varphi - f|_\infty \geq \frac{1}{2}$, et $C_c(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$.**

3. Pour un intervalle borné d'extrémités $a < b$, on construit de même le trapèze $\varphi_n^{a,b}$, égal à 1 sur $[a, b]$, nul hors de $[a - 1/n, b + 1/n]$. Le calcul de la question 1 donne encore

$$|\varphi_n^{a,b} - 1_{[a,b]}|_p = \frac{2}{n(p+1)}.$$

Les extrémités, ouvertes ou fermées, forment un ensemble négligeable. Soit maintenant $s = \sum_{i=1}^m c_i 1_{J_i}$ en escalier. On pose $\psi_n = \sum_i c_i \varphi_n^{J_i}$, qui

est continue à support compact. Par Minkowski, $|s - \psi_n|_p \leq \left(\sum_i |c_i| \right) \left(\frac{2}{n(p+1)} \right)^{1/p}$. **Donc**

$$\psi_n \rightarrow s \text{ dans } L^p(\mathbb{R}).$$

Corrigé de l'exercice 17 : Continuité des translations dans L_p

1. Si $f = g$ hors d'un ensemble négligeable N , alors $\tau_h f = \tau_h g$ hors de $N + h$. Or la mesure de Lebesgue est invariante par translation, donc $\lambda(N + h) = 0$. Ainsi, τ_h est bien défini sur les classes. De plus, par la même invariance, $\int |f(x - h)|^p dx = \int |f(x)|^p dx$, **soit** $|\tau_h f|_p = |f|_p$.

2. Soit $A > 0$ tel que φ soit nulle hors de $[-A, A]$. Par le théorème de Heine, φ est uniformément continue. Ainsi, $\omega(\delta) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : |x - y| \leq \delta\}$ tend vers 0 quand $\delta \rightarrow 0$. Pour $|h| \leq 1$, la fonction $\tau_h \varphi - \varphi$ est nulle hors de $[-A-1, A+1]$ et majorée par $\omega(|h|)$ en module. **Donc** $|\tau_h \varphi - \varphi|_p \leq (2A+2)^{1/p} \omega(|h|) \rightarrow 0$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ avec $|f - \varphi|_p \leq \varepsilon$. Par Minkowski et la question 1,

$$|\tau_h f - f|_p \leq |\tau_h(f - \varphi)|_p + |\tau_h \varphi - \varphi|_p + |\varphi - f|_p \leq 2\varepsilon + |\tau_h \varphi - \varphi|_p.$$

D'après la question 2, $\limsup_{h \rightarrow 0} |\tau_h f - f|_p \leq 2\varepsilon$. **Comme ε est arbitraire,**
 $|\tau_h f - f|_p \rightarrow 0$.

4. Prenons $f = 1_{[0,1]}$ et $0 < h < 1$. Alors $\tau_h f = 1_{[h, 1+h]}$. La différence vaut -1 sur $[0, h[$, 1 sur $]1, 1+h]$, et 0 ailleurs. Elle est donc de module 1 sur un ensemble de mesure $2h > 0$. **Ainsi, $|\tau_h f - f|_\infty = 1$ pour tout $h \in]0, 1[$, et la propriété est fausse dans L^∞ .** On retrouve ainsi la situation de la figure de l'énoncé.

5. On a $\tau_h 1_A = 1_{A+h}$, donc $u(h) = \int 1_A \tau_h 1_A$. Comme $\lambda(A) < +\infty$, la fonction 1_A appartient à L^2 . Par Cauchy-Schwarz,

$$|u(h) - u(0)| = \left| \int 1_A (\tau_h 1_A - 1_A) \right| \leq \|1_A\|_2 \|\tau_h 1_A - 1_A\|_2.$$

D'après la question 3 avec $p = 2$, ce majorant tend vers 0. Donc u est continue en 0, avec $u(0) = \lambda(A) > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $u(h) > 0$ pour $|h| < \delta$. Dans ce cas, $A \cap (A+h)$ n'est pas vide : il contient un $y = a + h$ avec $a \in A$. **Donc**
 $h = y - a \in A - A$, et $]-\delta, \delta[\subset A - A$.

Corrigé de l'exercice 18 : Lemme de Riemann-Lebesgue par densité

1. La fonction $x \rightarrow f(x) \cos(\xi x)$ est mesurable et majorée en module par $|f|$, intégrable. Donc $I_f(\xi)$ est défini. Ensuite, par linéarité,

$$|I_f(\xi) - I_g(\xi)| = \left| \int (f - g)(x) \cos(\xi x) dx \right| \leq \|f - g\|_1.$$

2. On a $\int_a^b \cos(\xi x) dx = \frac{\sin(\xi b) - \sin(\xi a)}{\xi}$. **Donc** $|I_f(\xi)| \leq \frac{2}{\xi} \rightarrow 0$.

3. Soit $s = \sum_{i=1}^m c_i 1_{[a_i, b_i]}$ en escalier. Par linéarité, $|I_s(\xi)| \leq \frac{2}{\xi} \sum_i |c_i| \rightarrow 0$. Montrons ensuite que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ nulle hors de $[-A, A]$, avec $\|\varphi\|_1 \leq \varepsilon$. Par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta$ entraîne $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2A}$. On découpe $[-A, A]$ en intervalles $[x_i, x_{i+1}[$ de longueur au plus δ , et on pose $s = \varphi(x_i)$ sur chacun d'eux, $s = 0$ ailleurs. Alors $\|\varphi - s\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2A}$ sur $[-A, A]$, donc $\|\varphi - s\|_1 \leq \varepsilon$. Finalement, $\|f - s\|_1 \leq 2\varepsilon$, et la question 1 donne

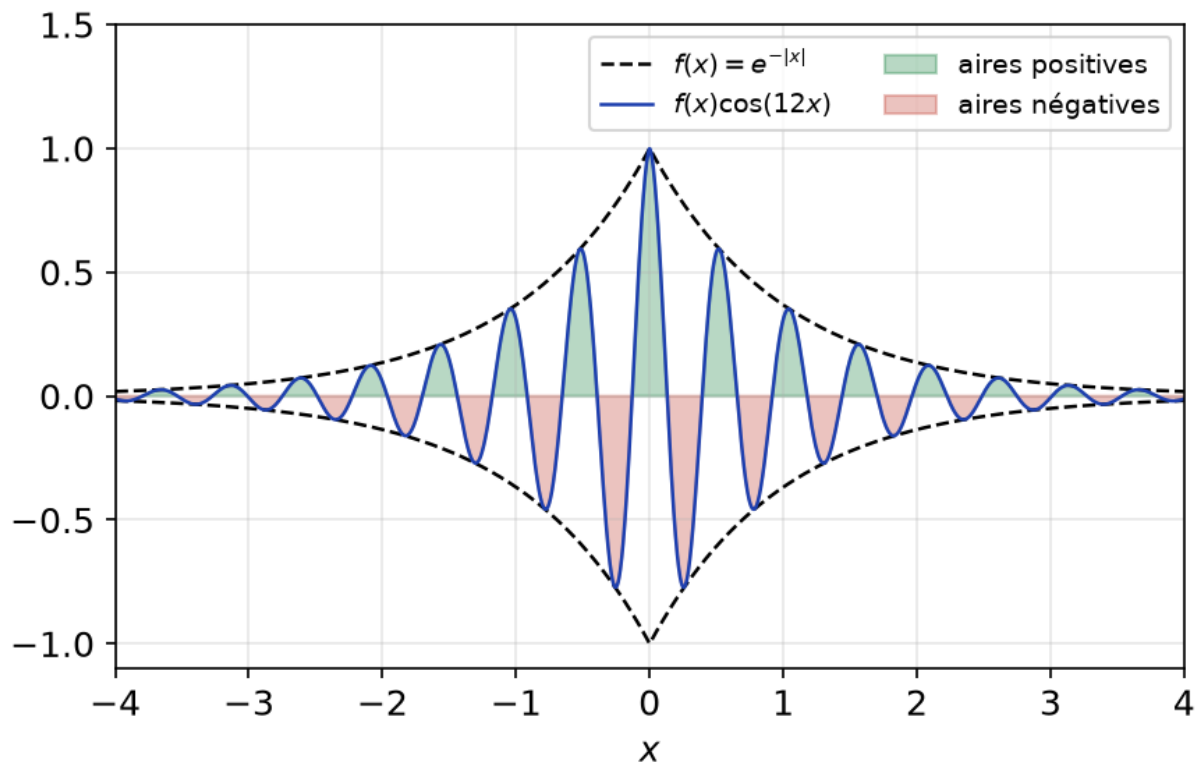
$$|I_f(\xi)| \leq |I_f(\xi) - I_s(\xi)| + |I_s(\xi)| \leq 2\varepsilon + |I_s(\xi)|.$$

Ainsi, $\limsup_{\xi \rightarrow +\infty} |I_f(\xi)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. **Donc** $I_f(\xi) \rightarrow 0$ **pour toute** $f \in L^1(\mathbb{R})$.

4. La fonction f est paire, donc $I_f(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(\xi x) dx$. Or

$$\int_0^{+\infty} e^{(-1 + i\xi)x} dx = \frac{1}{1 - i\xi} = \frac{1 + i\xi}{1 + \xi^2}. \text{ En prenant la partie réelle, } I_f(\xi) = \frac{2}{1 + \xi^2},$$

qui tend bien vers 0. La figure ci-dessous montre pourquoi : les oscillations rapides font se compenser les aires positives et négatives.



Corrigé de l'exercice 19 : Convergence presque partout et convergence des normes

1. La fonction $t \rightarrow t^p$ est convexe sur $[0, +\infty[$. Donc $\left(\frac{|a| + |b|}{2}\right)^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}$. Comme $|a - b| \leq |a| + |b|$, on obtient $|a - b|^p \leq 2^p \cdot \frac{|a|^p + |b|^p}{2} = 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$.
2. D'après la question 1, $g_n \geq 0$. De plus, $g_n \rightarrow 2^{p-1} \cdot 2|f|^p = 2^p |f|^p$ presque partout. Le lemme de Fatou donne alors

$$\int 2^p |f|^p \leq \liminf_n \int g_n = 2^p \int |f|^p - \limsup_n \int |f_n - f|^p,$$

car $\int |f_n|^p \rightarrow \int |f|^p$. Comme $\int |f|^p$ est fini, on peut le simplifier. **Donc**
 $\limsup_n \int |f_n - f|^p \leq 0$, et $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

3. Reprenons l'exercice 13 avec $p = 1$: $f_n = n \mathbb{1}_{]0, 1/n]} \rightarrow 0$ partout. Cependant, $\|f_n\|_1 = 1$ ne tend pas vers $\|0\|_1 = 0$. **Et en effet, $\|f_n - 0\|_1 = 1$ ne tend pas vers 0**

: l'hypothèse sur les normes est indispensable.

4. On applique la question 2 avec $p = 1$. En effet, $f_n \rightarrow f$ presque partout, et

$|f_n|_1 = \int f_n = 1 = |f|_1$. **Donc** $\int |f_n - f| \rightarrow 0$. Ce résultat porte le nom de lemme de Scheffé.

Corrigé de l'exercice 20 : Inégalité de Young pour la convolution

1. Par le théorème de Tonelli, puis par invariance de la mesure de Lebesgue par translation,

$$\int \left(\int |f(y)| |g(x-y)| dx \right) dy = \int |f(y)| |g|_1 dy = |f|_1 |g|_1.$$

Ainsi, $F(x) = \int |f(y)| |g(x-y)| dy$ est une fonction intégrable, donc finie presque partout.

En un tel x , l'intégrale définissant $f * g(x)$ converge absolument, et $|f * g(x)| \leq F(x)$. **Par conséquent, $f * g$ est défini presque partout et $|f * g|_1 \leq |f|_1 |g|_1$.**

2. On fixe x . On applique l'inégalité de Hölder, avec les exposants q et p , aux fonctions

$y \rightarrow |f(y)|^{1/q}$ et $y \rightarrow |f(y)|^{1/p} |g(x-y)|$. **On obtient**

$$\int |f(y)| |g(x-y)| dy \leq \left(\int |f| \right)^{1/q} \left(\int |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

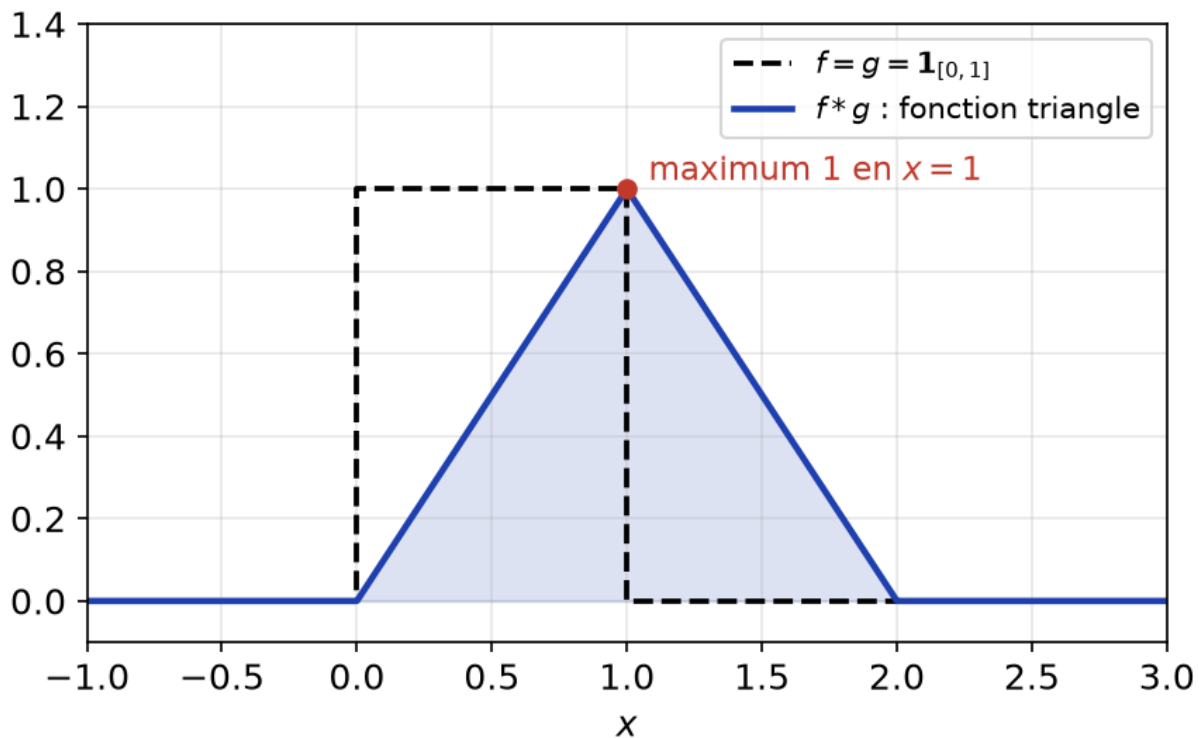
3. On élève à la puissance p , puis on intègre en x . Le théorème de Tonelli et l'invariance par translation donnent

$$\int F(x)^p dx \leq |f|_1^{p/q} \int |f(y)| \left(\int |g(x-y)|^p dx \right) dy = |f|_1^{p/q+1} |g|_p^p.$$

Or $\frac{p}{q} + 1 = p \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \right) = p$. Ainsi, $F \in L^p$, donc F est finie presque partout, et $f * g$ est défini presque partout. **Comme $|f * g| \leq F$, on conclut que $|f * g|_p \leq |f|_1 |g|_p$.**

4. On a $f * g(x) = \int 1_{[0,1]}(y) 1_{[0,1]}(x-y) dy = \lambda([0,1] \cap [x-1, x])$. Donc $f * g(x) = x$ sur $[0,1]$, $2-x$ sur $[1,2]$, et 0 ailleurs : c'est la fonction triangle de la

figure ci-dessous. Ensuite, $|f * g|_2^2 = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$. Ainsi,
 $|f * g|_2 = \sqrt{2/3} \approx 0,816 \leq 1 = |f|_1 |g|_2$.



Corrigé de l'exercice 21 : Problème : les espaces de suites ℓ^p

1. Pour la mesure de comptage, un ensemble est négligeable si et seulement s'il est vide. Ainsi, « $u = v$ presque partout » signifie $u_n = v_n$ pour tout n : chaque classe contient une seule suite. De même, $|u_n| \leq C$ presque partout signifie $|u_n| \leq C$ pour tout n . **La borne supérieure essentielle est donc la borne supérieure.**
2. Pour tout n , $|u_n|^p \leq \sum_k |u_k|^p$, donc $|u_n| \leq |u|_p$, et $|u|_\infty \leq |u|_p$. Ensuite, pour $q < +\infty$, on écrit $|u_n|^q = |u_n|^{q-p} |u_n|^p \leq |u|_p^{q-p} |u_n|^p$. En sommant,
 $\sum |u_n|^q \leq |u|_p^{q-p} \sum |u_n|^p = |u|_p^q$. **Donc $|u|_q \leq |u|_p$, et $\ell^p \subset \ell^q$.**
3. Pour $u_n = n^{-1/p}$, la série $\sum n^{-1}$ diverge, donc $u \notin \ell^p$. En revanche, $\sum n^{-q/p}$

converge car $q/p > 1$, et u est bornée. **Donc** $u \in \ell^q \setminus \ell^p$: **l'inclusion est stricte**. Dans l'exercice 8, la mesure est finie, et les obstructions viennent des singularités locales : les grands exposants sont plus exigeants. Ici, la mesure de comptage est infinie, mais chaque point pèse 1. Ainsi, il n'y a pas de « petits ensembles », et seule la décroissance à l'infini compte : les petits exposants sont plus exigeants.

4. D'après la question 2, $|u_n^{(k)} - u_n| \leq |u^{(k)} - u|_\infty \leq |u^{(k)} - u|_p$. **Donc chaque coordonnée converge**. Il n'y a pas besoin d'extraire, car chaque point a une masse 1. Autrement dit, le seul ensemble négligeable est vide, et la bosse glissante n'a pas d'analogue ici.
5. Soit $(u^{(k)})$ une suite de Cauchy de ℓ^p . D'après la question 4, pour chaque n , la suite $(u_n^{(k)})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge vers un réel u_n . Soit $\varepsilon > 0$ et K tel que $|u^{(k)} - u^{(m)}|_p \leq \varepsilon$ pour $k, m \geq K$. Pour tout N , on a $\sum_{n=1}^N |u_n^{(k)} - u_n^{(m)}|^p \leq \varepsilon^p$. On fait tendre m vers $+\infty$ dans cette somme finie, puis N vers $+\infty$. On obtient $|u^{(k)} - u|_p \leq \varepsilon$ pour $k \geq K$. Par Minkowski, $u = u^{(K)} - (u^{(K)} - u) \in \ell^p$. **Ainsi, $u^{(k)} \rightarrow u$ dans ℓ^p , qui est complet.**
6. Soit $u \in \ell^p$ et $v^{(N)} = (u_1, \dots, u_N, 0, 0, \dots)$. Alors $|u - v^{(N)}|_p^p = \sum_{n > N} |u_n|^p$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0. Dans ℓ^∞ , en revanche, la suite constante $e = (1, 1, \dots)$ vérifie $|e - v|_\infty \geq 1$ pour toute suite v à support fini, car $v_n = 0$ pour n grand. Enfin, une fonction étagée intégrable s'écrit $\sum_i c_i 1_{A_i}$ avec $\text{card}(A_i) < +\infty$: elle est à support fini. Réciproquement, une suite à support fini prend un nombre fini de valeurs, chacune non nulle sur un ensemble fini. **Les suites à support fini sont exactement les fonctions étagées intégrables, denses dans ℓ^p pour $p < +\infty$, mais pas dans ℓ^∞ .**
7. La suite $(1/n)$ appartient à ℓ^2 , avec $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ℓ^2 donne $\sum \frac{|u_n|}{n} \leq \|u\|_2 \left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$. **Donc** $\sum_{n \geq 1} \frac{|u_n|}{n} \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|u\|_2$, avec égalité si et seulement si $(|u_n|)$ est proportionnelle à $(1/n)$, c'est-à-dire $|u_n| = c/n$ avec $c \geq 0$.

Point de méthode : dans ℓ^p , toute la théorie générale se simplifie, car il n'existe pas d'ensemble négligeable non vide. C'est un bon terrain pour tester une intuition avant de passer à $L^p(\mathbb{R})$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [espaces \$L_p\$, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur espaces \$L_p\$](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Lebesgue et théorèmes de convergence](#), [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#)
- Chapitre précédent : [Mesure produit, Fubini et changement de variables](#)
- Chapitre suivant : [Groupes : quotients et actions de groupes](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)