

## Espaces euclidiens

### Exercice 1 : Reconnaître un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

Pour  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère les trois applications suivantes :

$$\varphi(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2, \quad \psi(x, y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2, \quad \chi(x, y) = x_1 y_2.$$

1. Écrivez la matrice de  $\varphi$  et celle de  $\psi$  dans la base canonique.
2. Montrez que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Montrez que  $\psi$  est bilinéaire et symétrique, mais n'est pas un produit scalaire.
4. L'application  $\chi$  est-elle un produit scalaire ?

### Exercice 2 : Produit scalaire par évaluation sur les polynômes

Pour  $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ , on pose  $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ .

1. Montrez que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Calculez  $\|1\|^2$ ,  $\|X\|^2$ ,  $\langle 1, X^2 \rangle$  et  $\langle X, X^2 \rangle$ .
3. La même formule définit-elle un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_3[X]$  ? Justifiez.

### Exercice 3 : Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

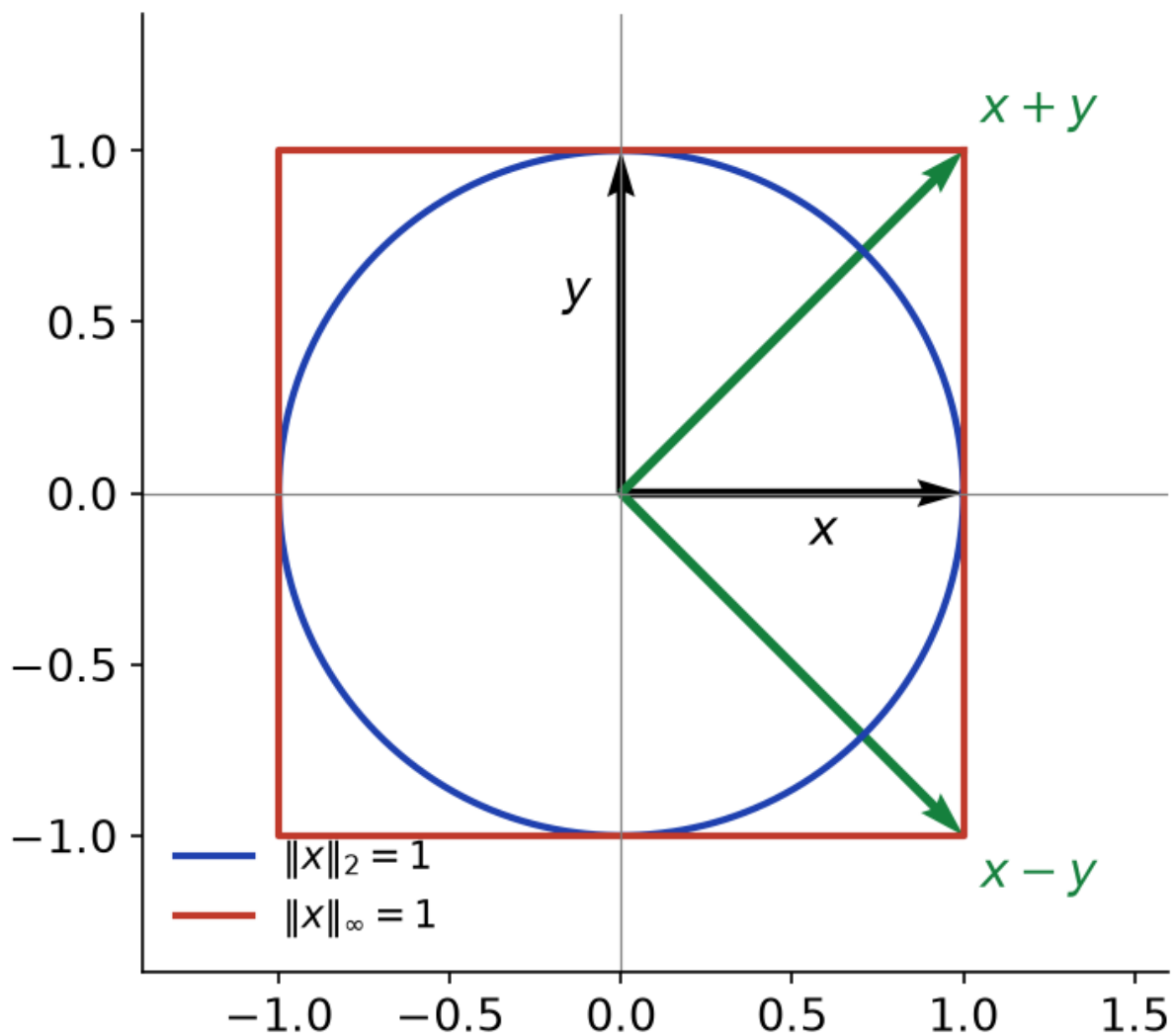
1. Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels. Montrez que  $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$ . Précisez le cas d'égalité.
2. Soit  $f$  continue et strictement positive sur  $[0,1]$ . Montrez que  $\int_0^1 f \times \int_0^1 \frac{1}{f} \geq 1$ .
3. Déterminez le maximum de  $x + 2y + 2z$  lorsque  $(x,y,z)$  parcourt la sphère d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , et le point où il est atteint.
4. Déterminez toutes les fonctions  $f$  continues sur  $[0,1]$  telles que  $\int_0^1 f = 1$  et  $\int_0^1 f^2 = 1$ .

### Exercice 4 : Identité du parallélogramme et normes non euclidiennes

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

1. Démontrez l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.
2. Sur  $\mathbb{R}^2$ , on pose  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$ . En utilisant les vecteurs  $x = (1,0)$  et  $y = (0,1)$ , montrez que cette norme ne provient d'aucun produit scalaire.
3. Même question pour  $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ .

La figure ci-dessous représente les cercles unités des normes  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ , ainsi que les vecteurs  $x$ ,  $y$ ,  $x+y$  et  $x-y$ .



### Exercice 5 : Coordonnées dans une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni du produit scalaire canonique, on pose  $u = (1,1,0)$ ,  $v = (1,-1,2)$  et  $w = (-1,1,1)$ .

1. Montrez que  $(u, v, w)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déduisez-en une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$ .
3. Calculez les coordonnées de  $x = (1,2,3)$  dans cette base, sans résoudre de système.
4. Vérifiez le résultat à l'aide de la formule  $|x|^2 = \sum \langle e_i, x \rangle^2$ .

### Exercice 6 : Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$

Dans  $\mathbb{R}^3$  canonique, on considère  $v_1 = (1,1,0)$ ,  $v_2 = (1,0,1)$  et  $v_3 = (0,1,1)$ .

1. Vérifiez que  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Appliquez le procédé de Gram-Schmidt à cette base.
3. Soit  $P$  la matrice dont les colonnes sont  $v_1, v_2, v_3$  et  $Q$  celle dont les colonnes sont  $e_1, e_2, e_3$ . Déterminez la matrice  $R$  telle que  $P = QR$ , et observez sa forme.

### Exercice 7 : Gram-Schmidt dans un espace de polynômes

On munit  $\mathbb{R}_2[X]$  du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ .

1. Justifiez rapidement qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrez que si  $P$  est pair et  $Q$  impair, alors  $\langle P, Q \rangle = 0$ .
3. Orthonormalisez la base  $(1, X, X^2)$  par le procédé de Gram-Schmidt.

### Exercice 8 : Distance de $X^3$ à un espace de polynômes

On reprend le produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ , cette fois sur  $\mathbb{R}_3[X]$ , et le sous-espace  $F = \mathbb{R}_2[X]$ .

1. Déterminez la projection orthogonale de  $X^3$  sur  $F$ .

2. Calculez  $m = \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - a - bt - ct^2)^2 dt$ .

3. Pour quel triplet  $(a,b,c)$  ce minimum est-il atteint ?

### Exercice 9 : Orthogonal et projection dans $\mathbb{R}^4$

Dans  $\mathbb{R}^4$  canonique, on considère le sous-espace

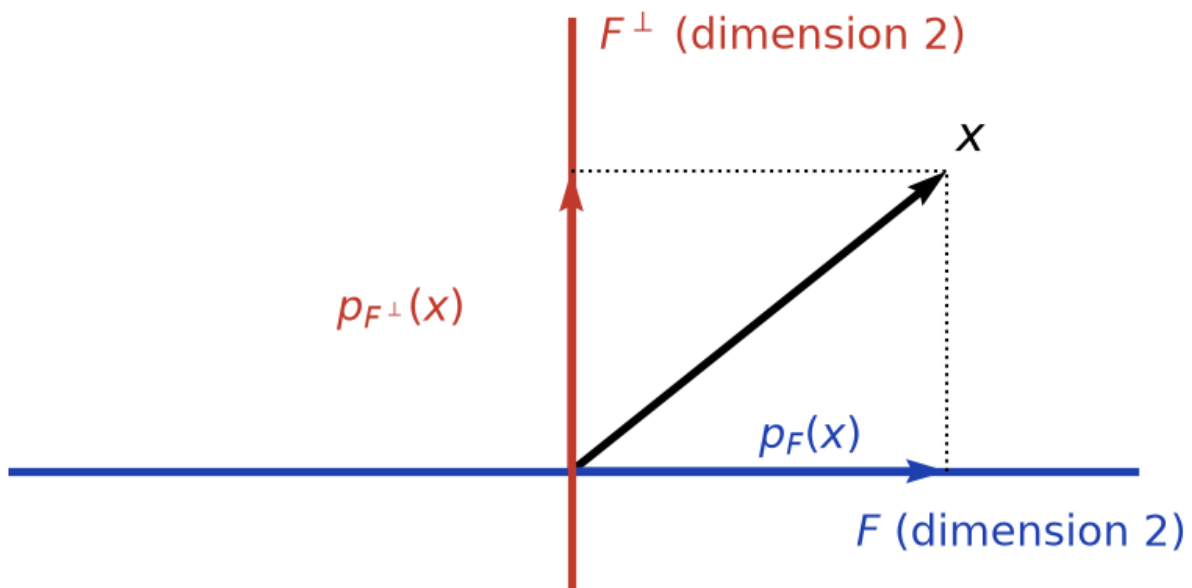
$$F = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ , \text{ et } \\ x_1 \\ , x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

1. Déterminez  $F^\perp$  et donnez-en une base orthogonale.

2. Calculez la projection orthogonale de  $x = (1,2,3,4)$  sur  $F^\perp$ , puis sur  $F$ .

3. Calculez la distance de  $x$  à  $F$ .

Le schéma ci-dessous rappelle la décomposition  $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$  à utiliser : ici, les deux sous-espaces sont de dimension 2.



### Exercice 10 : Distance à un plan de $\mathbb{R}^3$

Dans  $\mathbb{R}^3$  canonique, soit  $P$  le plan d'équation  $x + 2y - 2z = 0$  et  $u = (1,1,1)$ .

1. Donnez un vecteur normal  $n$  à  $P$ , puis déterminez  $P^\perp$ .
2. Calculez la projection orthogonale de  $u$  sur  $P$ .
3. Calculez la distance de  $u$  à  $P$ , puis retrouvez-la par la formule  $d(u, P) = \frac{|\langle n, u \rangle|}{|n|}$ .
4. Écrivez la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur  $P$ .

### Exercice 11 : Matrices de projection et de symétrie orthogonales

Dans  $\mathbb{R}^3$  canonique, soit  $D$  la droite dirigée par  $a = (1,1,1)$ , et  $J$  la matrice de taille 3 dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrez que la matrice de la projection orthogonale  $P_D$  dans la base canonique est  $\frac{1}{3}J$ .
2. Déduisez-en la matrice de la projection orthogonale sur le plan  $D^\perp$ .
3. Vérifiez que ces deux matrices  $M$  sont symétriques et vérifient  $M^2 = M$ .
4. Déterminez la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à  $D^\perp$ , puis l'image de  $(1,0,0)$  par cette symétrie.

### Exercice 12 : Fonctions paires et impaires

Soit  $E = C([-1,1], \mathbb{R})$  muni de  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$ . On note  $\mathcal{P}$  le sous-espace des fonctions paires et  $\mathcal{I}$  celui des fonctions impaires.

1. Montrez que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  sont orthogonaux et que  $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ .
2. Montrez que  $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$ .
3. Montrez que la fonction paire la plus proche de  $\exp$  est  $\cosh$ , puis calculez  $d(\exp, \mathcal{P})$ .

### Exercice 13 : Un sous-espace d'orthogonal nul

Soit  $E = C([0,1], \mathbb{R})$  muni de  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ , et  $F = \{f \in E : f(0) = 0\}$ .

1. Vérifiez que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , distinct de  $E$ .
2. Soit  $g \in F^\perp$ . En considérant  $f : t \rightarrow t g(t)$ , montrez que  $g = 0$ .
3. Déduisez-en  $(F^\perp)^\perp$  et comparez avec  $F$ . A-t-on  $E = F \oplus F^\perp$  ?

4. Expliquez pourquoi ce phénomène est impossible si  $E$  est euclidien.

#### Exercice 14 : Un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^2$

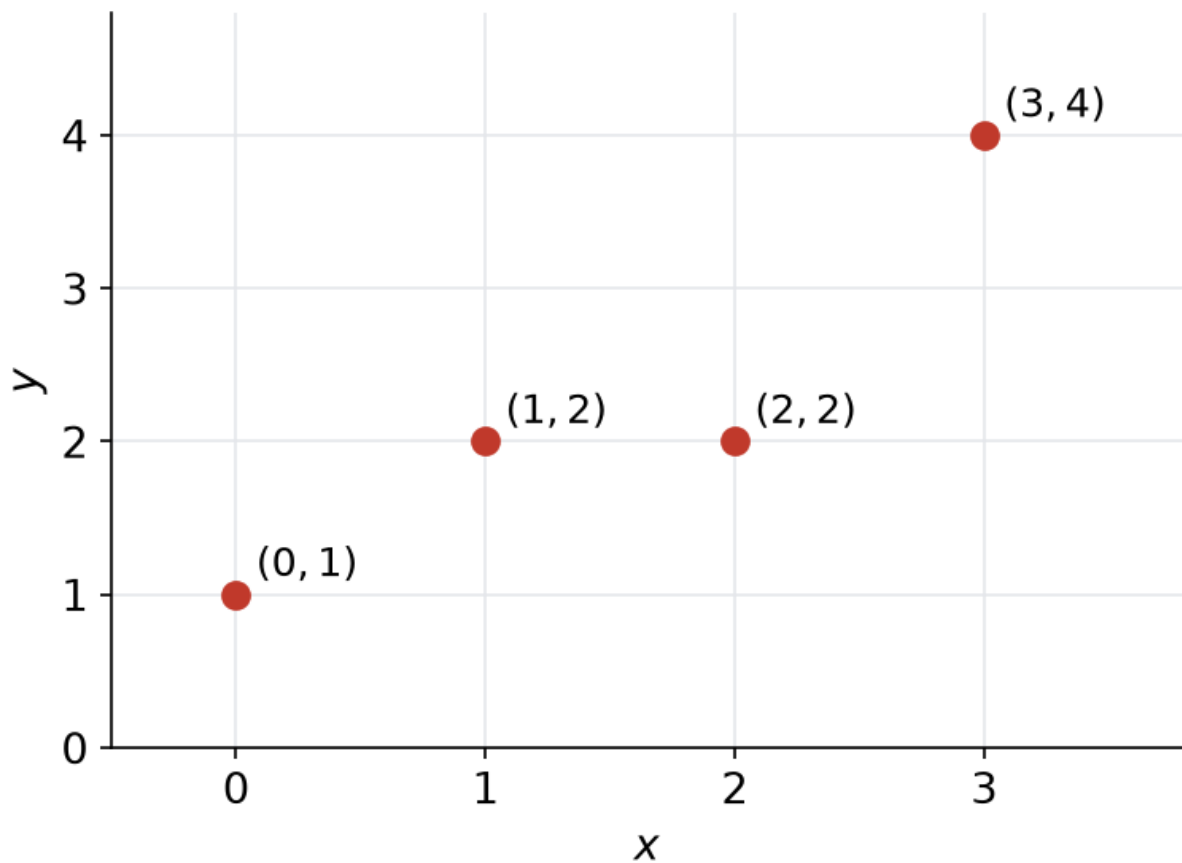
Pour  $x = (x_1, x_2)$  et  $y = (y_1, y_2)$  dans  $\mathbb{C}^2$ , on pose

$$\varphi(x, y) = \overline{x_1} y_1 + i \overline{x_1} y_2 - i \overline{x_2} y_1 + 2 \overline{x_2} y_2.$$

1. Montrez que  $\varphi$  est linéaire en  $y$  et à symétrie hermitienne.
2. Vérifiez que  $\varphi(x, x) = |x_1 + i x_2|^2 + |x_2|^2$ , puis concluez que  $\varphi$  est un produit scalaire hermitien.
3. Orthonormalisez la base canonique  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  pour  $\varphi$ .
4. Trouvez deux vecteurs  $x, y$  tels que  $\varphi(x, x) + \varphi(y, y) = \varphi(x+y, x+y)$  sans que  $\varphi(x, y)$  soit nul.

#### Exercice 15 : Droite de régression par moindres carrés

On dispose des quatre mesures  $(0,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(2,2)$  et  $(3,4)$ , représentées ci-dessous.



1. Écrivez le système surdéterminé  $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Y$  traduisant que les quatre points sont sur la droite  $y = ax + b$ .
2. Résolvez les équations normales et donnez la droite des moindres carrés.
3. Calculez les résidus et vérifiez qu'ils sont orthogonaux aux colonnes de  $A$ .
4. Calculez la valeur minimale de  $\sum_i (y_i - ax_i - b)^2$ .

### Exercice 16 : Système surdéterminé

On considère le système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

1. Montrez que ce système n'a pas de solution.
2. Déterminez la solution au sens des moindres carrés, c'est-à-dire le couple  $(x, y)$  qui minimise  $(x+y-1)^2 + (x-y-2)^2 + (x+2y-4)^2$ .
3. Calculez l'erreur minimale et interprétez-la comme une distance dans  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 17 : Meilleure approximation affine de $x^2$ en moyenne quadratique

On munit  $C([0,1], \mathbb{R})$  du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f g$ .

1. Montrez que  $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$  est atteint en un unique couple  $(a, b)$ .
2. Déterminez ce couple à l'aide des équations normales.
3. Calculez la valeur du minimum.

### Exercice 18 : Produit scalaire sur les matrices

Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ . On note  $\mathcal{S}_n$  et  $\mathcal{A}_n$  les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques.

1. Montrez que  $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ , puis qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrez que  $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp$ .
3. Montrez que, pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $(\text{tr } A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A)$ . Étudiez le cas d'égalité.
4. Calculez la distance de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  à  $\mathcal{S}_2$ .

### Exercice 19 : Problème, déterminant de Gram et distance

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel. Pour  $x_1, \dots, x_p \in E$ , on note  $G(x_1, \dots, x_p) = \det(\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$  le déterminant de Gram de la famille.

1. Soit  $V = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ ,  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  une base orthonormée de  $V$ , et  $M \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$  la matrice des coordonnées des  $x_j$  dans cette base. Montrez que la matrice de Gram vaut  $M^T M$ .
2. Déduisez-en que  $G(x_1, \dots, x_p) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si la famille est liée.
3. Soit  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$  avec  $(x_1, \dots, x_p)$  libre, et  $x \in E$ . Montrez que  $d(x, F)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_p, x)}{G(x_1, \dots, x_p)}$ .
4. Application : calculez la distance de  $(1,1,1)$  au plan de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $(1,0,1)$  et  $(0,1,1)$ . Vérifiez avec un vecteur normal.
5. Application : retrouvez la valeur du minimum de l'exercice 17 en calculant deux déterminants de Gram.

### Exercice 20 : Problème, polynômes orthogonaux de Legendre

On munit  $\mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt$ .

1. Montrez qu'il existe une unique suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  de polynômes unitaires, avec  $\deg P_n = n$ , deux à deux orthogonaux.
2. Montrez que  $P_n$  est orthogonal à  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  pour  $n \geq 1$ .
3. Montrez que  $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$ .
4. Calculez  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .
5. Soit  $n \geq 1$ . On note  $x_1 < \dots < x_k$  les racines de  $P_n$  situées dans  $] -1, 1[$  et d'ordre de multiplicité impair, et  $Q = \prod_{j=1}^k (X - x_j)$ , avec  $Q = 1$  si  $k = 0$ . Montrez que  $P_n Q$  garde un signe constant sur  $[-1, 1]$ , puis que  $k = n$ .
6. Concluez :  $P_n$  possède  $n$  racines réelles simples, toutes dans  $] -1, 1[$ . Vérifiez-le sur  $P_2$  et  $P_3$ .

## Le corrigé des exercices

---

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



## Pour aller plus loin en L2

---

- Le cours : [espaces euclidiens, cours de maths en L2](#)

- Chapitre précédent : [Intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- Chapitre suivant : [Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)