Espaces euclidiens

I. Produit scalaire et espaces euclidiens

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel réel. L'objectif est de définir longueurs, angles et orthogonalité à partir d'une seule donnée algébrique. Ainsi, la géométrie ne dépend plus d'un repère choisi à l'avance. De plus, les mêmes énoncés s'appliqueront à $\mathbb{R}^n$, aux matrices et aux espaces de fonctions.

1. Formes bilinéaires symétriques

Définition :

Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables. Elle est **symétrique** si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tous $x, y \in E$.

Elle est **positive** si $\varphi(x,x) \geq 0$ pour tout x, et **définie** si $\varphi(x,x) = 0$ entraîne $x = 0$.

En dimension finie, une forme bilinéaire se code par une matrice. Soit en effet $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$. Alors, pour x et y de colonnes de coordonnées X et Y, on a $\varphi(x,y) = X^T A Y$. Par conséquent, φ est symétrique si et seulement si A est symétrique.

Définition :

Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive. On le note

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

souvent $\langle x, y \rangle$.

Un espace réel muni d'un produit scalaire est un **espace préhilbertien réel**. S'il est de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

Méthode :

Pour montrer que φ est un produit scalaire, vérifiez dans cet ordre :

- la symétrie $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$;
- la linéarité par rapport à une seule variable (la symétrie donne l'autre) ;
- la positivité $\varphi(x,x) \geq 0$;
- le caractère défini : si $\varphi(x,x) = 0$, alors $x = 0$.

Pour la positivité en dimension finie, écrivez $\varphi(x,x)$ comme une somme de carrés. Pour une intégrale, utilisez qu'une fonction continue, positive et d'intégrale nulle est nulle.

2. Exemples fondamentaux

Exemple :

Sur $\mathbb{R}^n$, le **produit scalaire canonique** est $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Il est défini, car $\sum x_i^2 = 0$ impose que tous les x_i soient nuls.

Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la formule $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ définit aussi un produit scalaire.

Sur $E = C([a,b], \mathbb{R})$ avec $a < b$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$. La symétrie et la bilinéarité viennent de la linéarité de l'intégrale. Ensuite, $\langle f, f \rangle = \int_a^b f^2 \geq 0$. Enfin, si cette intégrale est nulle, la fonction continue et positive f^2 est nulle, donc $f = 0$.

Attention :

La continuité est indispensable dans le dernier exemple. Sur l'espace des fonctions continues par morceaux, une fonction nulle sauf en un point a une intégrale de carré nulle. Autrement dit, la forme y est seulement positive, et non définie.

II. Norme euclidienne et inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition :

La **norme euclidienne** associée au produit scalaire est $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. La **distance** associée est $d(x,y) = |x - y|$.

En développant par bilinéarité, on obtient l'identité $|x + y|^2 = |x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2$. Cette égalité est le point de départ de presque tous les calculs du chapitre.

Théorème :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour tous $x, y \in E$, on a $|\langle x, y \rangle| \leq |x|\ |y|$.

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration :

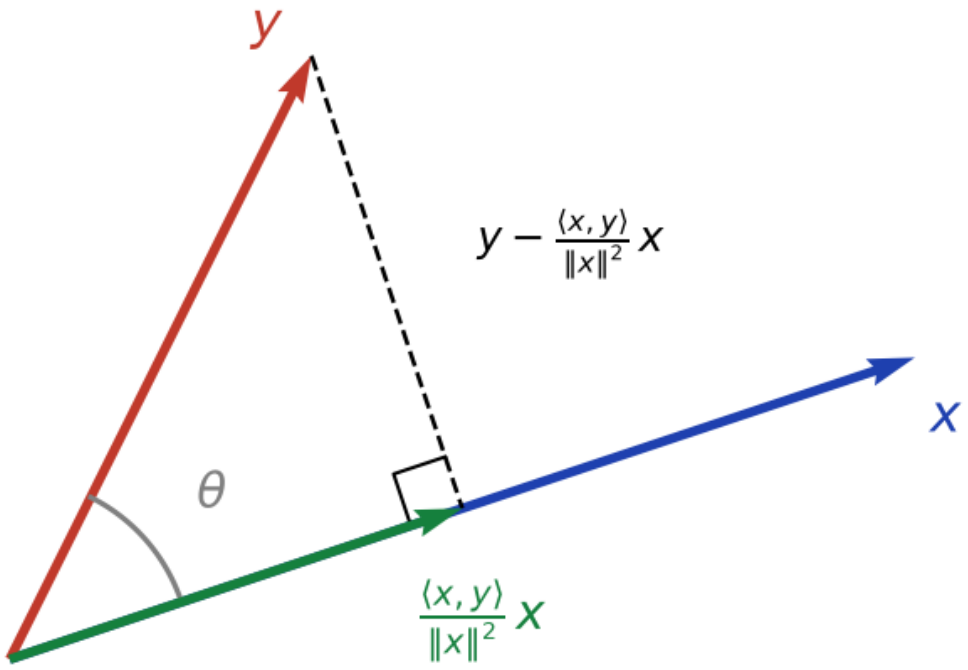
Si $x = 0$, les deux membres sont nuls. Supposons donc $x \neq 0$. Pour tout réel t, on a

$$0 \leq |t\ x + y|^2 = t^2\ |x|^2 + 2\ t\ \langle x, y \rangle + |y|^2 .$$

Ce trinôme en t garde un signe constant. Son discriminant est donc négatif ou nul : $4\ \langle x, y \rangle^2 - 4\ |x|^2\ |y|^2 \leq 0$. C'est exactement l'inégalité annoncée.

En cas d'égalité, le discriminant est nul. Le trinôme admet alors une racine t_0, d'où $|t_0\ x + y| = 0$. Par conséquent, $y = -t_0\ x$, et les vecteurs sont colinéaires. La réciproque est immédiate.

La figure ci-dessous donne le sens géométrique de l'inégalité. Le vecteur y se décompose en une composante le long de x et une composante orthogonale. Le produit scalaire ne « voit » que la première, dont la longueur est au plus $|y|$.



Ainsi, lorsque x et y sont non nuls, le quotient $\frac{\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|}$ appartient à $[-1, 1]$. On définit donc l'**angle non orienté** $\theta \in [0, \pi]$ par $\cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|\,|y|}$.

Proposition :

L'application $x \to |x|$ est une norme. En particulier, elle vérifie l'**inégalité triangulaire** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Démonstration :

La séparation et l'homogénéité sont immédiates. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise Cauchy-Schwarz :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 .$$

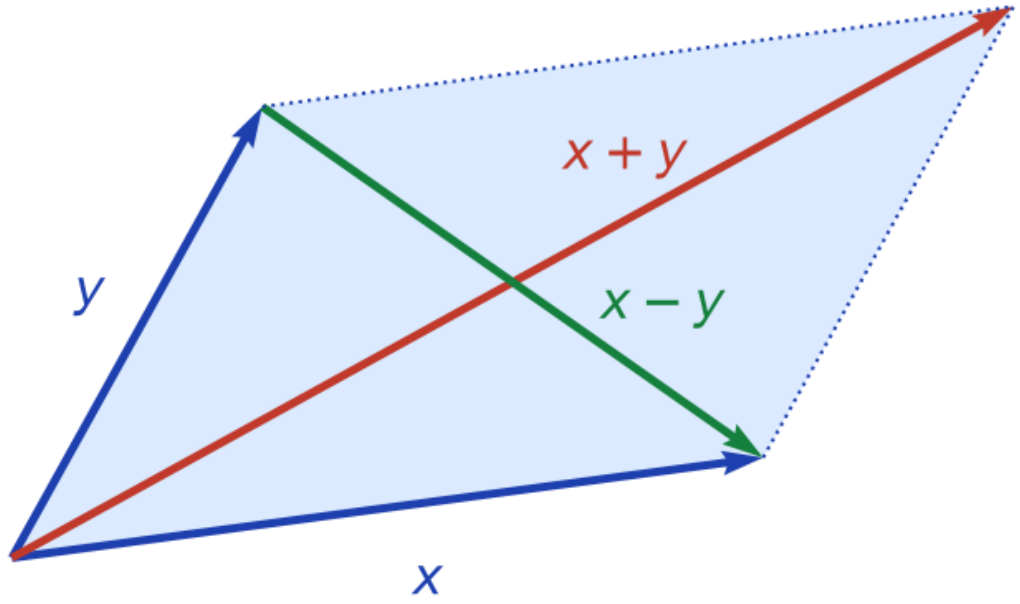
Il suffit ensuite de prendre la racine carrée.

Propriété :

Identité du parallélogramme : $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2\left(|x|^2 + |y|^2\right)$.

Identité de polarisation : $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2\right)$.

Ces deux formules s'obtiennent en ajoutant, puis en retranchant, les développements de $|x+y|^2$ et $|x-y|^2$. Comme le montre la figure ci-dessous, la première relie les diagonales d'un parallélogramme à ses côtés.



Remarque :

La polarisation montre que la norme détermine le produit scalaire. En revanche, une norme qui ne vérifie pas l'identité du parallélogramme ne provient d'aucun produit scalaire. C'est le cas de $|x|_\infty = \max |x_i|$ sur $\mathbb{R}^2$.

III. Orthogonalité et bases orthonormées

1. Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore

Définition :

Deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$. Une famille (x_i) est **orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux. Elle est **orthonormée** si, de plus, chaque vecteur est de norme 1.

Théorème :

Théorème de Pythagore. Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.

Plus généralement, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est orthogonale, alors $\left\| \sum x_i \right\|^2 = \sum |x_i|^2$.

Attention :

La réciproque est fausse pour trois vecteurs ou plus. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, prenez $x_1 = (1,0)$,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$x_2 = (0,1)$, $x_3 = (1,-1)$: ici $|x_1 + x_2 + x_3|^2 = 4 = 1 + 1 + 2$, alors que x_1 et x_3 ne sont pas orthogonaux.

Proposition :

Une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** est libre.

Démonstration :

Supposons $\sum \lambda_i x_i = 0$. Faisons le produit scalaire avec x_j. Tous les termes d'indice $i \neq j$ disparaissent, d'où $\lambda_j |x_j|^2 = 0$. Comme $x_j \neq 0$, on obtient $\lambda_j = 0$.

2. Calculs dans une base orthonormée

Théorème :

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace euclidien E. Pour tous $x, y \in E$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle e_i, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

où $x_i = \langle e_i, x \rangle$ et $y_i = \langle e_i, y \rangle$ sont les coordonnées.

Autrement dit, dans une base orthonormée, tout produit scalaire se calcule comme le produit scalaire

canonique. Les coordonnées s'obtiennent sans résoudre de système : un produit scalaire suffit.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$ canonique, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ forment une base orthonormée. Pour $x = (3,1)$, on trouve $\langle e_1, x \rangle = 2\sqrt{2}$ et $\langle e_2, x \rangle = \sqrt{2}$. Donc $x = 2\sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{2}\, e_2$. On vérifie enfin que $8 + 2 = 10 = |x|^2$.

IV. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Tout espace euclidien possède-t-il une base orthonormée ? La réponse est oui, et la preuve est constructive. En effet, le procédé de Gram-Schmidt transforme une famille libre quelconque en famille orthonormée, étape par étape.

Théorème :

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de E. Il existe une unique famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ telle que, pour tout k :

- $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$;
- $\langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur k. D'abord, $e_1 = v_1 / |v_1|$ convient, et c'est le seul choix possible.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

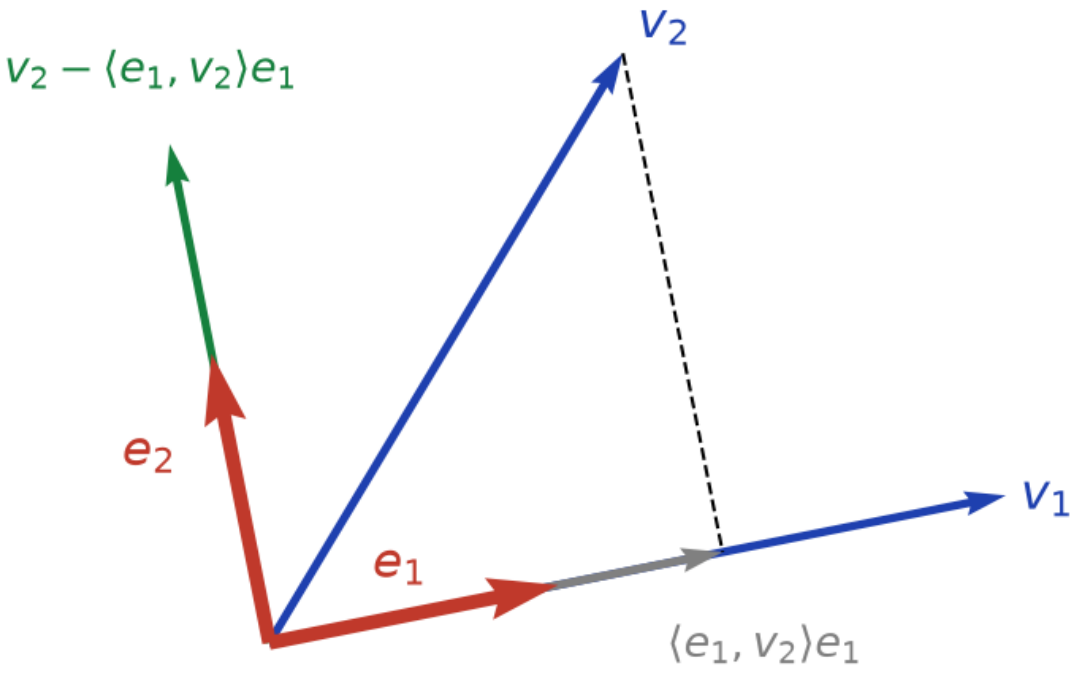
Supposons ensuite $e_1, \ldots, e_{k-1}$ construits. On pose

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, v_k \rangle e_i .$$

Pour $j < k$, on a $\langle e_j, w_k \rangle = \langle e_j, v_k \rangle - \langle e_j, v_k \rangle = 0$. De plus, $w_k \neq 0$: sinon v_k appartiendrait à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{k-1})$, ce que la liberté interdit. On pose alors $e_k = w_k / |w_k|$. Enfin, $\langle e_k, v_k \rangle = \langle e_k, w_k \rangle = |w_k| > 0$.

Pour l'unicité, e_k est un vecteur unitaire de $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ orthogonal à $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_{k-1})$, qui est un hyperplan de cet espace. Il n'y a que deux tels vecteurs, opposés, et la condition de signe en choisit un.

La figure ci-dessous illustre la deuxième étape. On retire de v_2 sa composante le long de e_1, puis on normalise le reste.



Méthode :

Pour orthonormaliser $(v_1, \ldots, v_p)$:

- calculez $e_1 = v_1 / |v_1|$;
- pour $k \geq 2$, calculez les produits $\langle e_i, v_k \rangle$ pour $i < k$, puis w_k, puis $e_k = w_k / |w_k|$;
- vérifiez à la fin que les e_k sont deux à deux orthogonaux.

Pour éviter les racines carrées, vous pouvez d'abord construire une famille seulement orthogonale, puis normaliser tout à la fin.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corollaire :

Tout espace euclidien admet une base orthonormée. De plus, toute famille orthonormée se complète en une base orthonormée.

Exemple :

Sur $\mathbb{R}_1[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$. On part de $(1, X)$. D'abord, $|1| = 1$, donc $e_1 = 1$. Ensuite, $\langle 1, X \rangle = \frac{1}{2}$, d'où $w_2 = X - \frac{1}{2}$.

On calcule $|w_2|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$. Finalement, $e_2 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

V. Orthogonal d'un sous-espace et projection orthogonale

1. Orthogonal d'une partie

Définition :

L'**orthogonal** d'une partie A de E est $A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, a \rangle = 0 \text{ pour tout } a \in A\}$. C'est toujours un sous-espace vectoriel de E.

Propriété :

Pour tout sous-espace F, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$ et $F \subset (F^\perp)^\perp$. De plus, si $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$, alors $x \in F^\perp$ si et seulement si $\langle x, f_i \rangle = 0$ pour tout i.

En effet, un vecteur de $F \cap F^\perp$ est orthogonal à lui-même, donc nul. Ainsi, F et $F^\perp$ sont toujours en somme directe. La question est de savoir si cette somme vaut E tout entier.

Théorème :

Si F est un sous-espace de **dimension finie** de l'espace préhilbertien E, alors $E = F \oplus F^\perp$. On dit que $F^\perp$ est le **supplémentaire orthogonal** de F.

Si de plus E est euclidien, alors $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration :

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F, fournie par Gram-Schmidt. Pour $x \in E$, posons $p = \sum \langle e_i, x \rangle e_i \in F$. Alors $\langle e_j, x - p \rangle = \langle e_j, x \rangle - \langle e_j, x \rangle = 0$ pour tout j. Donc $x - p \in F^\perp$, et $x = p + (x - p)$.

La somme est donc égale à E, et elle est directe. En dimension finie, la formule des dimensions en découle. Enfin, $F \subset (F^\perp)^\perp$ et ces deux espaces ont la même dimension.

Attention :

En dimension infinie, un sous-espace de dimension infinie peut avoir un orthogonal réduit à $\{0\}$. Par exemple, dans $C([0,1])$ muni du produit scalaire intégral, les fonctions nulles en 0 forment un tel sous-espace. Dans ce cas, $F \oplus F^\perp \neq E$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Projection orthogonale

Définition :

Soit F de dimension finie. La **projection orthogonale** sur F est la projection p_F sur F parallèlement à $F^\perp$. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle e_i .$$

Le vecteur $p_F(x)$ est caractérisé par deux conditions : $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$. Ces conditions permettent de le calculer même sans base orthonormée.

Théorème :

Meilleure approximation. Soit F de dimension finie et $x \in E$. Alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F le plus proche de x :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y| = \left|x - p_F(x)\right|, \quad d(x,F)^2 = |x|^2 - \left|p_F(x)\right|^2 .$$

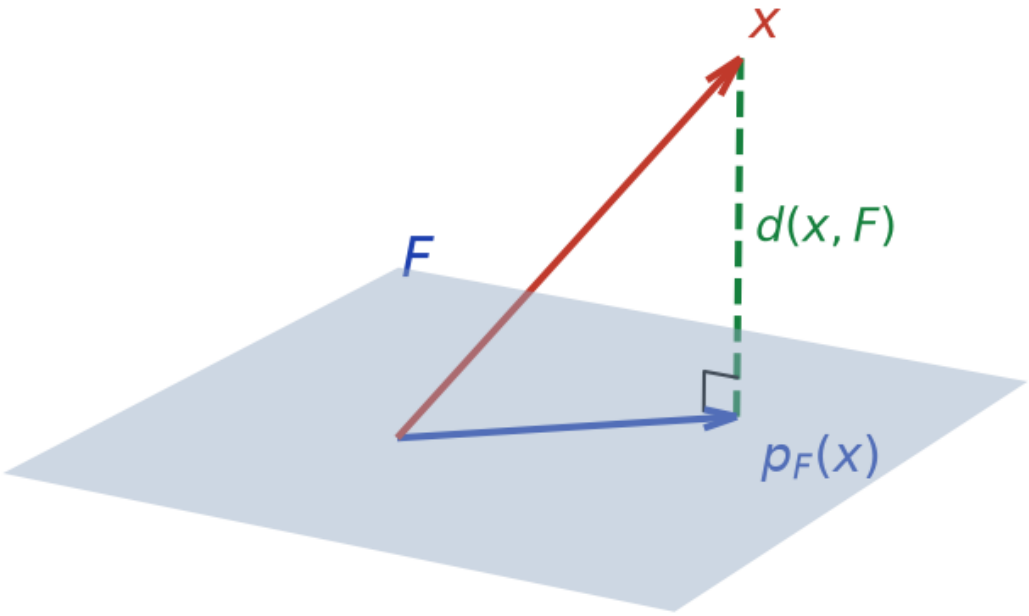
Démonstration :

Soit $y \in F$. Le vecteur $p_F(x) - y$ appartient à F, tandis que $x - p_F(x)$ appartient à $F^\perp$. Par le théorème de Pythagore,

$$|x-y|^2 = \left|x - p_F(x)\right|^2 + \left|p_F(x) - y\right|^2 \geq \left|x - p_F(x)\right|^2 .$$

L'égalité a lieu si et seulement si $y = p_F(x)$. La seconde formule vient de Pythagore appliqué à $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$.

La figure ci-dessous représente cette situation dans l'espace. Le segment vert, perpendiculaire au plan F , réalise la distance de x à F .



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Méthode :

Pour calculer $p_F(x)$ et $d(x,F)$:

- si vous disposez d'une base orthonormée de F, appliquez directement la formule de projection ;
- sinon, écrivez $p_F(x) = \sum \lambda_i f_i$ et imposez $\langle x - p_F(x), f_j \rangle = 0$ pour tout j : vous obtenez un système linéaire ;
- si $F^\perp$ est plus petit que F, projetez sur $F^\perp$, puis utilisez $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$.

Par exemple, pour un hyperplan $H = n^\perp$ avec $n \neq 0$, on obtient $d(x, H) = \frac{|\langle n, x \rangle|}{|n|}$.

Corollaire :

Inégalité de Bessel. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est orthonormée, alors pour tout x, on a $\sum_{i=1}^{p} \langle e_i, x \rangle^2 \leq |x|^2$.

En effet, le membre de gauche vaut $\left|p_F(x)\right|^2$, avec $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Cette inégalité jouera un rôle central dans l'étude des séries de Fourier.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1,1,1)$. Pour $x = (1,2,6)$, on a $\langle u, x \rangle = 9$ et $|u|^2 = 3$. Donc $p_D(x) = 3u = (3,3,3)$. La distance de x à D vaut $\left|(-2,-1,3)\right| = \sqrt{14}$.

VI. Espaces préhilbertiens complexes et hermitiens

Sur un espace complexe, la formule $\sum x_i y_i$ ne convient pas. En effet, x_1^2 peut être négatif, par exemple pour $x_1 = i$. On corrige ce défaut en conjuguant l'une des variables.

Définition :

Soit E un espace vectoriel complexe. Un **produit scalaire hermitien** est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ telle que :

- elle est linéaire par rapport à la seconde variable ;
- elle est à **symétrie hermitienne** : $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$;
- elle est définie positive : $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$, et $\langle x, x \rangle = 0$ seulement pour $x = 0$.

On dit alors que E est **préhilbertien complexe**. En dimension finie, E est un **espace hermitien**.

Remarque :

Avec cette convention, la forme est semi-linéaire à gauche : $\langle \lambda x, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$. Certains cours adoptent la convention inverse. Vérifiez toujours laquelle est utilisée avant de calculer.

Exemple :

Sur $\mathbb{C}^n$, le produit hermitien canonique est $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k}\, y_k$. En particulier,

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\langle x, x \rangle = \sum |x_k|^2$. Sur $C([a,b], \mathbb{C})$, on pose de même $\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, dt$.

Proposition :

Les résultats des parties II à V restent vrais, avec les adaptations suivantes :

- $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle + |y|^2$;
- Cauchy-Schwarz s'écrit $|\langle x, y \rangle| \leq |x|\,|y|$, avec un module ;
- la projection est $p_F(x) = \sum \langle e_i, x \rangle\, e_i$, l'ordre des variables comptant désormais.

Pour Cauchy-Schwarz, la démonstration change légèrement. On choisit un complexe ω de module 1 tel que $\langle x, \omega\, y \rangle$ soit réel positif. Ensuite, on applique l'argument du trinôme à x et $\omega\, y$.

Attention :

Dans un espace hermitien, $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ équivaut seulement à $\mathrm{Re}\,\langle x, y \rangle = 0$.
Par exemple, dans $\mathbb{C}$, $x = 1$ et $y = i$ vérifient cette égalité, alors que $\langle x, y \rangle = i \neq 0$.

VII. Méthode des moindres carrés

En pratique, un système linéaire $AX = b$ a souvent plus d'équations que d'inconnues. Il n'a alors généralement aucune solution. On cherche donc le « meilleur compromis » : le vecteur X qui rend $|AX - b|$ minimal pour la norme euclidienne.

Théorème :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Un vecteur $X_0 \in \mathbb{R}^p$ minimise $|AX - b|$ si et seulement s'il vérifie les **équations normales**

$$A^T A X_0 = A^T b .$$

Si les colonnes de A sont libres, alors $A^T A$ est inversible et la solution est unique.

Démonstration :

Quand X parcourt $\mathbb{R}^p$, le vecteur AX parcourt $F = \operatorname{Im} A$. D'après le théorème de meilleure approximation, $|AX - b|$ est minimal si et seulement si $AX_0 = p_F(b)$. Autrement dit, $b - AX_0$ doit être orthogonal à chaque colonne de A. Cela s'écrit $A^T(b - AX_0) = 0$.

Supposons enfin les colonnes libres. Si $A^T A X = 0$, alors $X^T A^T A X = |AX|^2 = 0$. Donc $AX = 0$, puis $X = 0$. Ainsi, $A^T A$ est inversible.

Méthode :

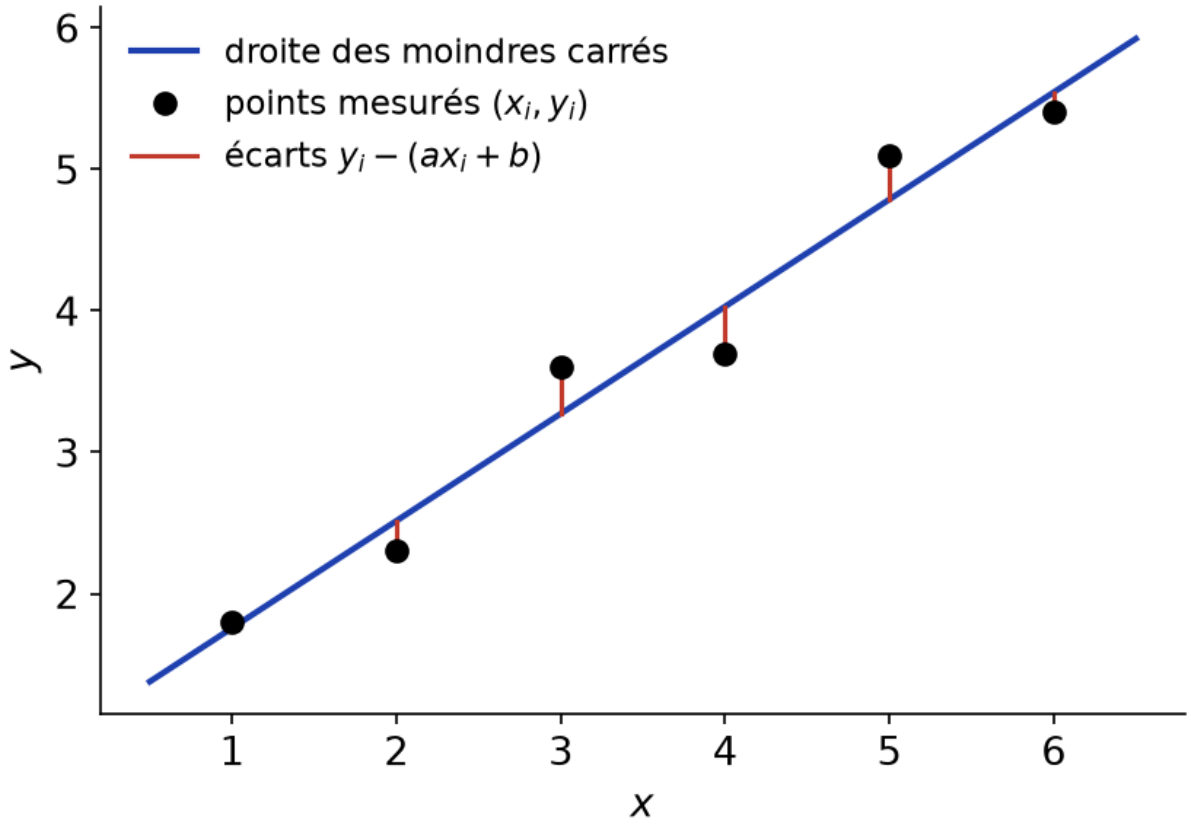
Pour ajuster une droite $y = ax + b$ à des points (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$:

- écrivez le système $a\,x_i + b = y_i$ sous la forme $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Y$, où la ligne i de A est $(x_i \quad 1)$;

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- formez $A^T A = \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}$ et $A^T Y = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ [\susum?] y_i \end{pmatrix}$;
- résolvez ce système 2×2 , puis vérifiez que la somme des résidus est nulle.

La figure ci-dessous montre la droite obtenue. Elle rend minimale la somme des carrés des écarts verticaux, dessinés en rouge.



Exemple :

Prenons les trois points $(0,0)$, $(1,1)$ et $(2,1)$. On a $\sum x_i^2 = 5$, $\sum x_i = 3$, $n = 3$, $\sum x_i y_i = 3$ et $\sum y_i = 2$. Le système s'écrit $5a + 3b = 3$ et $3a + 3b = 2$.

Par soustraction, $2a = 1$, donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{6}$. Les résidus valent $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{6}$: leur somme est bien nulle.

Remarque :

La même idée fonctionne dans un espace de fonctions. Par exemple, minimiser $\int_0^1 (f - P)^2$ sur les polynômes P de degré au plus n revient à projeter f sur $\mathbb{R}_n[X]$. C'est l'approximation « en moyenne quadratique ».

Ce qu'il faut retenir

- Un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive. Vérifiez les quatre points, en particulier le caractère défini.
- Le développement $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$ sert partout.
- Cauchy-Schwarz : $|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y|$, avec égalité exactement pour des vecteurs colinéaires.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Dans une base orthonormée, les coordonnées sont les $\langle e_i, x\rangle$.
- Gram-Schmidt transforme une famille libre en famille orthonormée engendrant les mêmes sous-espaces successifs.
- Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$. En dimension infinie, cela peut échouer.
- La projection orthogonale $p_F(x)$ est le point de F le plus proche de x, et $d(x,F)^2 = |x|^2 - |p_F(x)|^2$.
- Dans un espace hermitien, on conjugue la première variable et on remplace $\langle x, y\rangle$ par $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$ dans les développements.
- Moindres carrés : on résout les équations normales $A^T A X = A^T b$, c'est-à-dire qu'on projette b sur $\mathrm{Im}\, A$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Questions fréquentes sur espaces euclidiens

Quelle différence entre espace préhilbertien et espace euclidien ?

Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, sans condition de dimension. Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie. Certains résultats, comme $E = F \oplus F^{\perp}$ pour tout sous-espace F, ne sont garantis qu'en dimension finie.

Comment montrer qu'une forme est définie positive ?

En dimension finie, écrivez $\varphi(x,x)$ comme une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, puis constatez que tous ces carrés sont nuls seulement pour $x = 0$. Pour un produit scalaire intégral, utilisez qu'une fonction continue, positive et d'intégrale nulle est la fonction nulle.

Pourquoi le procédé de Gram-Schmidt ne produit-il jamais de vecteur nul ?

À l'étape k, le vecteur w_k est v_k moins une combinaison de $v_1, \dots, v_{k-1}$. S'il était nul, v_k serait dans $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_{k-1})$, ce qui contredit la liberté de la famille de départ. On peut donc toujours normaliser.

Que calcule-t-on vraiment avec les moindres carrés ?

On cherche X minimisant $|AX - b|$. Cela revient à projeter orthogonalement b sur l'image de A, ce qui donne les équations normales $A^T A\, X = A^T b$. L'erreur minimale est la distance de b à $\mathrm{Im}\, A$.

Pour aller plus loin en L2

- Les énoncés : exercices de maths en L2 sur espaces euclidiens
- Chapitre précédent : Intégrales dépendant d'un paramètre
- Chapitre suivant : Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral

- Tester vos connaissances : QCM de maths en L2 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L2 et la licence de maths de L1 à L3

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.