

Espaces euclidiens

Corrigé de l'exercice 1 : Reconnaître un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$

1. Les coefficients des matrices sont les valeurs sur les vecteurs de base. On obtient

$\text{Mat}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **Les deux matrices sont symétriques.**

2. On a $\varphi(x, y) = X^T A Y$ avec A symétrique. Donc φ est bilinéaire et symétrique. Ensuite, on complète le carré :

$$\varphi(x, x) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0.$$

Si $\varphi(x, x) = 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$, donc $x = 0$. **Ainsi, φ est un produit scalaire.**

3. De même, ψ est bilinéaire et symétrique, car sa matrice est symétrique. Cependant,

$\psi(x, x) = x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2$. Pour $x = (1, -1)$, on trouve $1 - 4 + 1 = -2 < 0$. **La forme ψ n'est pas positive, donc ce n'est pas un produit scalaire.**

4. On a $\chi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$ mais $\chi(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = 0$. **Par conséquent, χ n'est pas symétrique, et ce n'est pas un produit scalaire.** De plus, $\chi(x, x) = x_1 x_2$ peut être négatif.

Point de méthode : en dimension 2, écrire $\varphi(x, x)$ comme une somme de carrés (réduction de Gauss) règle à la fois la positivité et le caractère défini.

Corrigé de l'exercice 2 : Produit scalaire par évaluation sur les polynômes

1. La symétrie est évidente. De plus, pour Q fixé, $P \rightarrow \langle P, Q \rangle$ est linéaire, car l'évaluation $P \rightarrow P(a)$ est linéaire. Ensuite, $\langle P, P \rangle = P(-1)^2 + P(0)^2 + P(1)^2 \geq 0$. Enfin, si cette somme est nulle, les trois carrés sont nuls. Le polynôme P , de degré au plus 2, possède alors trois racines distinctes : il est nul. **On a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.**
2. On calcule directement : $|1|^2 = 1 + 1 + 1 = 3$ et $|X|^2 = 1 + 0 + 1 = 2$. Ensuite, $\langle 1, X^2 \rangle = 1 + 0 + 1 = 2$ et $\langle X, X^2 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$. **Ainsi $|1|^2 = 3$, $|X|^2 = 2$, $\langle 1, X^2 \rangle = 2$ et $X \perp X^2$.**
3. Sur $\mathbb{R}_3[X]$, la forme reste bilinéaire, symétrique et positive. En revanche, $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ s'annule en -1 , 0 et 1 . Donc $\langle P, P \rangle = 0$ alors que $P \neq 0$. **La forme n'est pas définie sur $\mathbb{R}_3[X]$: ce n'est pas un produit scalaire.**

Corrigé de l'exercice 3 : Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Dans $\mathbb{R}^n$ canonique, posons $u = (1, \dots, 1)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\langle u, x \rangle^2 \leq |u|^2 |x|^2$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Il y a égalité si et seulement si x est colinéaire à u , donc si tous les x_k sont égaux.

2. On munit $C([0,1])$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f g$. Comme $f > 0$, les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sont continues. Par Cauchy-Schwarz,

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f} \times \frac{1}{\sqrt{f}} \right)^2 \leq \int_0^1 f \times \int_0^1 \frac{1}{f}.$$

On obtient $\int_0^1 f \times \int_0^1 \frac{1}{f} \geq 1$.

3. Posons $a = (1, 2, 2)$, de norme $\sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Pour $v = (x, y, z)$ de norme 1, on a $x + 2y + 2z = \langle a, v \rangle \leq |a| |v| = 3$. L'égalité impose que v soit colinéaire à a , de même sens. **Le maximum vaut 3, atteint en $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.**

4. Supposons $\int_0^1 f = 1$ et $\int_0^1 f^2 = 1$. Alors $\langle f, 1 \rangle^2 = 1 = |f|^2 |1|^2$. On est donc dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : f et la constante 1 sont colinéaires. Ainsi, $f = c$ est constante, puis $\int_0^1 c = 1$ donne $c = 1$. Réciproquement, $f = 1$ convient. **La seule solution est la fonction constante égale à 1.**

Corrigé de l'exercice 4 : Identité du parallélogramme et normes non euclidiennes

1. Par bilinéarité et symétrie, on a

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2, \quad |x - y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2.$$

En ajoutant ces égalités, on obtient $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$. En les retranchant, on obtient $|x + y|^2 - |x - y|^2 = 4\langle x, y \rangle$. **Ce sont l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation.**

2. Si $\|\cdot\|_\infty$ provenait d'un produit scalaire, elle vérifierait l'identité du parallélogramme. Or $x + y = (1, 1)$ et $x - y = (1, -1)$, donc $|x + y|_\infty^2 + |x - y|_\infty^2 = 1 + 1 = 2$. D'autre part, $2(|x|_\infty^2 + |y|_\infty^2) = 4$. **Comme $2 \neq 4$, la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.** Sur la figure de l'énoncé, $x + y$ et $x - y$ sont en effet sur le carré unité, alors qu'ils sortent du

cercle.

3. Avec les mêmes vecteurs, $|x + y|_1 = |x - y|_1 = 2$. Donc le membre de gauche vaut $4 + 4 = 8$, tandis que le membre de droite vaut $2(1 + 1) = 4$. **La norme $\|\cdot\|_1$ ne provient pas non plus d'un produit scalaire.**

Corrigé de l'exercice 5 : Coordonnées dans une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

1. On calcule $\langle u, v \rangle = 1 - 1 + 0 = 0$, $\langle u, w \rangle = -1 + 1 + 0 = 0$ et $\langle v, w \rangle = -1 - 1 + 2 = 0$. La famille est orthogonale et formée de vecteurs non nuls. Elle est donc libre, et comme elle a trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, **c'est une base orthogonale.**

2. Les normes valent $|u| = \sqrt{2}$, $|v| = \sqrt{6}$ et $|w| = \sqrt{3}$. **On pose** $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$ **et** $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$.

3. Dans une base orthonormée, les coordonnées sont les produits scalaires :

$$\langle e_1, x \rangle = \frac{1+2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \langle e_2, x \rangle = \frac{1-2+6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}, \quad \langle e_3, x \rangle = \frac{-1+2+3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi $x = \frac{3}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{5}{\sqrt{6}}e_2 + \frac{4}{\sqrt{3}}e_3$, **soit encore** $x = \frac{3}{2}u + \frac{5}{6}v + \frac{4}{3}w$.

4. On a $\frac{9}{2} + \frac{25}{6} + \frac{16}{3} = \frac{27 + 25 + 32}{6} = \frac{84}{6} = 14$. D'autre part, $|x|^2 = 1 + 4 + 9 = 14$. **La vérification est concluante.**

Corrigé de l'exercice 6 : Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^3$

1. Le déterminant de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (0 - 1) - 1 \times (1 - 0) + 0 = -2 \neq 0.$$

La famille est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. D'abord, $|v_1| = \sqrt{2}$, donc $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

Ensuite, $\langle e_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $w_2 = v_2 - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$. Sa norme au carré vaut $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$. Donc $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$.

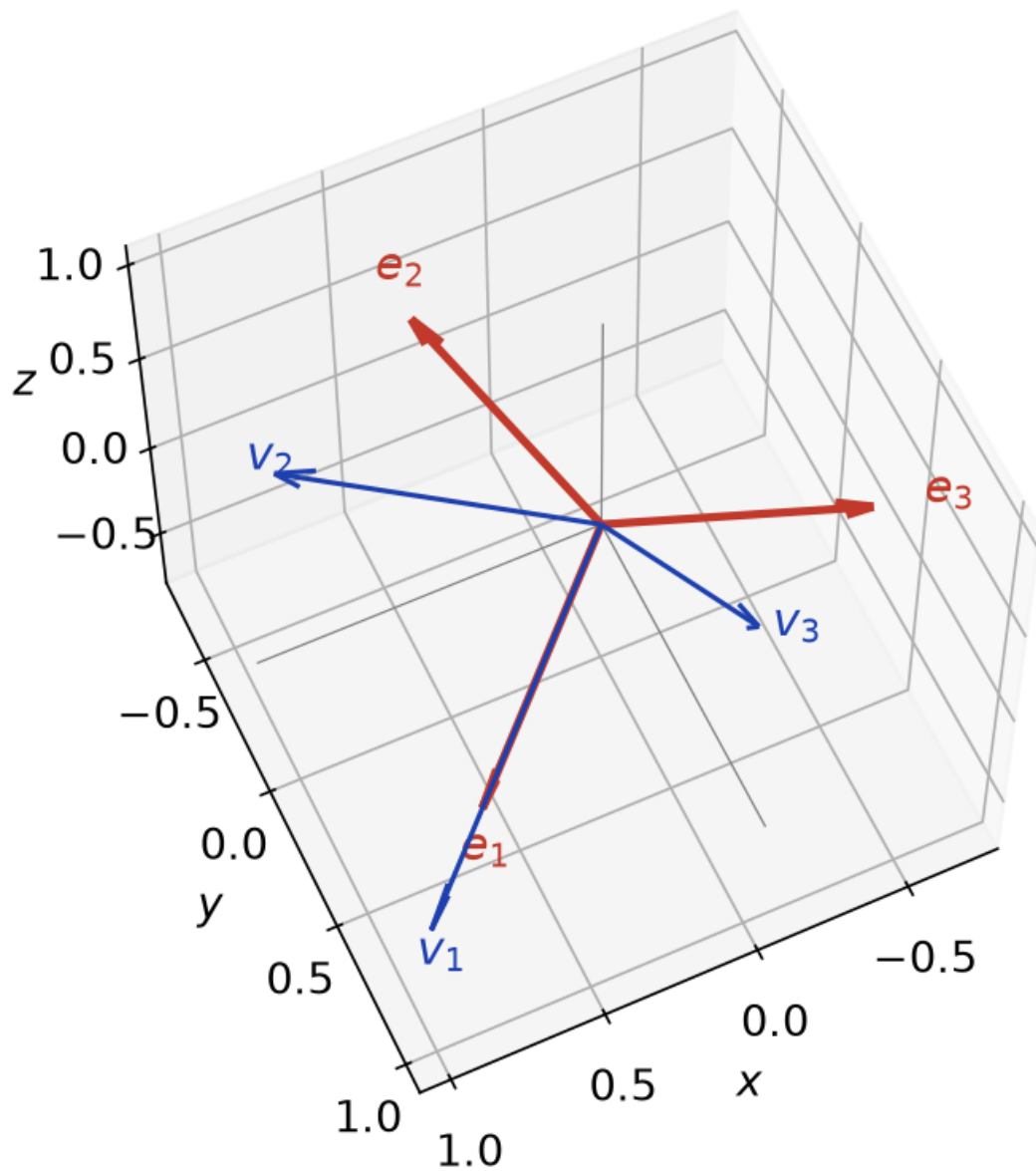
Enfin, $\langle e_1, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle e_2, v_3 \rangle = \frac{0-1+2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Par conséquent,

$$w_3 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1}{6}(1,-1,2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Sa norme vaut $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, donc $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$. **La base orthonormée obtenue est**

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$. On retrouve la base de l'exercice 5, et l'on vérifie aisément l'orthogonalité.

La figure ci-dessous montre la base de départ et la base orthonormée obtenue. Le vecteur e_1 est porté par v_1 , comme l'impose le procédé.



3. Comme Q est orthogonale, $R = Q^T P$, dont le coefficient (i, j) vaut $\langle e_i, v_j \rangle$. Or $v_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$, donc $\langle e_i, v_j \rangle = 0$ pour $i > j$. Les autres coefficients sont $\langle e_1, v_1 \rangle = \sqrt{2}$, $\langle e_1, v_2 \rangle = \langle e_1, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle e_2, v_2 \rangle = \frac{3}{\sqrt{6}}$, $\langle e_2, v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$ et $\langle e_3, v_3 \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

La matrice R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive : c'est la décomposition QR .

Corrigé de l'exercice 7 : Gram-Schmidt dans un espace de polynômes

1. La forme est symétrique et bilinéaire par linéarité de l'intégrale. De plus,

$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P^2 \geq 0$. Si cette intégrale est nulle, la fonction polynomiale P^2 , continue et positive, est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme P a alors une infinité de racines. **Donc $P = 0$, et la forme est un produit scalaire.**

2. Si P est pair et Q impair, la fonction $t \rightarrow P(t) Q(t)$ est impaire. **Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-1, 1]$ est donc nulle.**

3. D'abord, $\|1\|^2 = 2$, donc $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ensuite, $\langle e_0, X \rangle = 0$ par parité. Donc $w_1 = X$, avec $\|X\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$. On pose $e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X$.

Enfin, $\langle e_1, X^2 \rangle = 0$ par parité, et $\langle e_0, X^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{3}$. Donc $w_2 = X^2 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = X^2 - \frac{1}{3}$. On calcule

$$\|w_2\|^2 = \int_{-1}^1 \left(t^4 - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9} \right) dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

La base orthonormée est $e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X$, $e_2 = \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right)$. En effet, $\sqrt{\frac{45}{8}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Distance de X^3 à un espace de polynômes

1. On utilise la base orthonormée (e_0, e_1, e_2) de F trouvée à l'exercice 7. Le polynôme X^3 est impair, tandis que e_0 et e_2 sont pairs. Donc $\langle e_0, X^3 \rangle = \langle e_2, X^3 \rangle = 0$. Ensuite,

$$\langle e_1, X^3 \rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t^4 dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{5}.$$
 Par conséquent,

$$p_F(X^3) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} X = \frac{3}{5} X.$$

La projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $\frac{3}{5} X$.

2. Le minimum demandé est $d(X^3, F)^2$. Par le théorème de meilleure approximation, il vaut

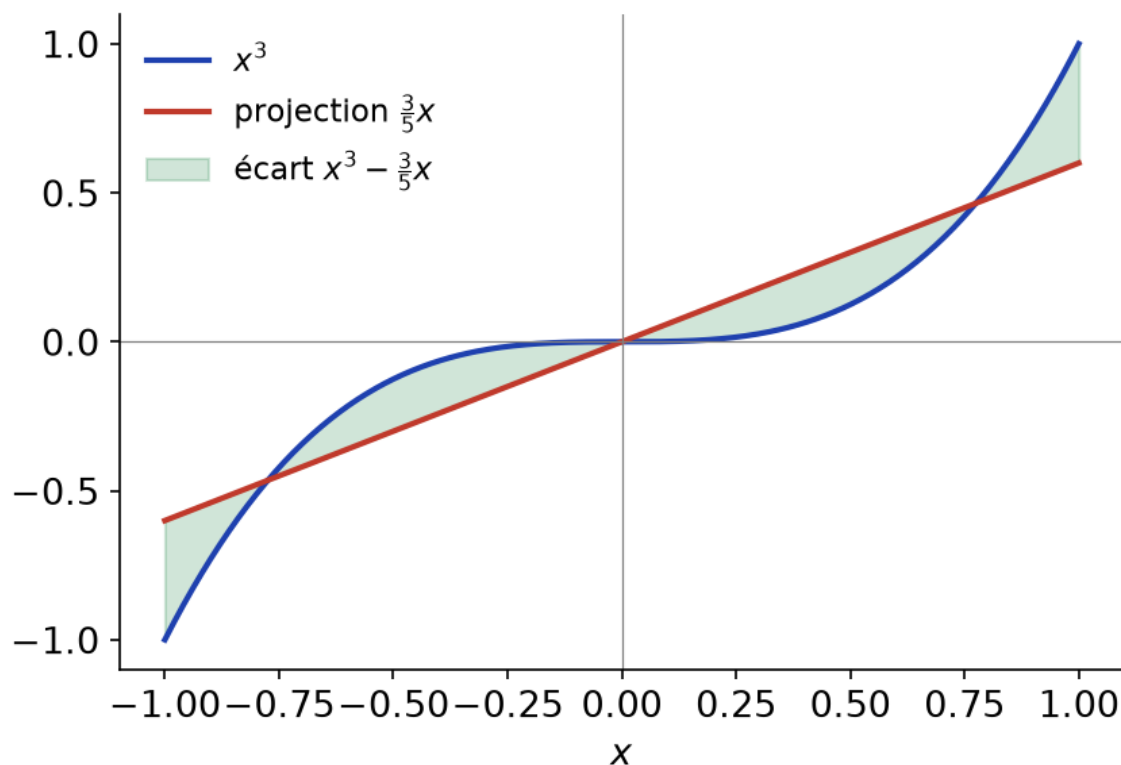
$$|X^3|^2 - |p_F(X^3)|^2. \text{ Or } |X^3|^2 = \int_{-1}^1 t^6 dt = \frac{2}{7} \text{ et } \left\| \frac{3}{5} X \right\|^2 = \frac{9}{25} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{25}. \text{ Donc}$$

$$m = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{50 - 42}{175} = \frac{8}{175}.$$

Le minimum vaut $m = \frac{8}{175}$.

3. Le minimum est atteint uniquement en $p_F(X^3) = \frac{3}{5} X$. **Le triplet optimal est**

$(a, b, c) = \left(0, \frac{3}{5}, 0\right)$. La figure ci-dessous compare x^3 et sa projection : l'aire verte représente l'écart dont on minimise l'énergie.



Corrigé de l'exercice 9 : Orthogonal et projection dans $\mathbb{R}^4$

1. Posons $a = (1, 1, 1, 1)$ et $b = (1, -1, 1, -1)$. Par définition, $F = \{a, b\}^\perp = \text{Vect}(a, b)^\perp$. Comme $\mathbb{R}^4$ est euclidien, $F^\perp = (\text{Vect}(a, b)^\perp)^\perp = \text{Vect}(a, b)$. De plus, $\langle a, b \rangle = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Ainsi $F^\perp = \text{Vect}(a, b)$, et (a, b) en est une base orthogonale.

2. On a $|a|^2 = |b|^2 = 4$, $\langle a, x \rangle = 10$ et $\langle b, x \rangle = 1 - 2 + 3 - 4 = -2$. Donc

$$p_{F^\perp}(x) = \frac{10}{4} a - \frac{2}{4} b = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = (2, 3, 2, 3).$$

Ensuite, $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x) = (-1, -1, 1, 1)$. On vérifie les deux équations de F : $-1 - 1 + 1 + 1 = 0$ et $-1 + 1 + 1 - 1 = 0$. Ainsi $p_{F^\perp}(x) = (2, 3, 2, 3)$ et $p_F(x) = (-1, -1, 1, 1)$.

3. La distance vaut $|x - p_F(x)| = |p_{F^\perp}(x)| = \sqrt{4 + 9 + 4 + 9}$. Donc $d(x, F) = \sqrt{26}$. On vérifie : $|x|^2 = 30 = 4 + 26 = |p_F(x)|^2 + d(x, F)^2$.

Point de méthode : F est défini par deux équations, donc $F^\perp$ est de dimension 2 et connu explicitement. Projeter sur $F^\perp$ évite de chercher une base de F .

Corrigé de l'exercice 10 : Distance à un plan de $\mathbb{R}^3$

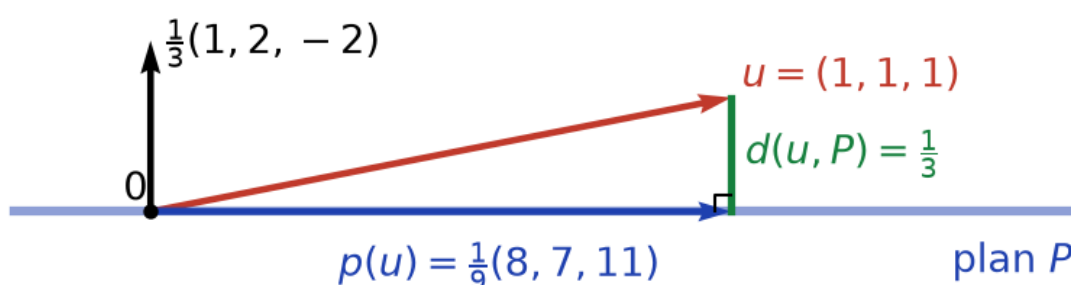
1. L'équation s'écrit $\langle n, v \rangle = 0$ avec $n = (1, 2, -2)$. Donc $P = n^\perp$, puis $P^\perp = (\text{Vect}(n)^\perp)^\perp$. Ainsi $P^\perp = \text{Vect}(n)$, avec $n = (1, 2, -2)$ et $|n| = 3$.

2. On a $\langle n, u \rangle = 1 + 2 - 2 = 1$. La projection sur la droite $P^\perp$ vaut $\frac{\langle n, u \rangle}{|n|^2} n = \frac{1}{9}(1, 2, -2)$. Par conséquent,

$$p_P(u) = u - \frac{1}{9}(1, 2, -2) = \frac{1}{9}(8, 7, 11).$$

On vérifie que $8 + 14 - 22 = 0$. La projection de u sur P est $\frac{1}{9}(8, 7, 11)$.

3. La distance vaut $\left\| \frac{1}{9}(1, 2, -2) \right\| = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. La formule directe donne aussi $\frac{|\langle n, u \rangle|}{|n|} = \frac{1}{3}$. Donc $d(u, P) = \frac{1}{3}$. La figure ci-dessous représente la situation dans le plan qui contient u et n : le plan P y apparaît par la tranche.



4. Pour tout v , $p_P(v) = v - \frac{1}{9} \langle n, v \rangle n$. Sa matrice est donc $I_3 - \frac{1}{9} n n^T$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice de la projection orthogonale sur P . En l'appliquant à u , on retrouve $\frac{1}{9}(8, 7, 11)$.

Corrigé de l'exercice 11 : Matrices de projection et de symétrie orthogonales

1. Pour $v = (v_1, v_2, v_3)$, on a $p_D(v) = \frac{\langle a, v \rangle}{|a|^2} a = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} (1, 1, 1)$. Chaque coordonnée de $p_D(v)$ vaut donc $\frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3)$. **La matrice de p_D est $\frac{1}{3}J$.**
2. Comme $\mathbb{R}^3 = D \oplus D^\perp$, on a $p_{D^\perp} = \text{id} - p_D$. **Sa matrice est $I_3 - \frac{1}{3}J$.**
3. La matrice J est symétrique, et $J^2 = 3J$, car chaque coefficient de J^2 vaut $1 + 1 + 1$. Donc $\left(\frac{1}{3}J\right)^2 = \frac{1}{9} \times 3J = \frac{1}{3}J$. Ensuite, $\left(I_3 - \frac{1}{3}J\right)^2 = I_3 - \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}J = I_3 - \frac{1}{3}J$. **Les deux matrices sont symétriques et idempotentes.**
4. La symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$ est $s = 2p_{D^\perp} - \text{id} = \text{id} - 2p_D$. Sa matrice vaut $S = I_3 - \frac{2}{3}J$. La première colonne donne l'image de $(1, 0, 0)$. **On obtient**
 $S = I_3 - \frac{2}{3}J$ **et** $s(1, 0, 0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Ce vecteur est bien de norme 1, car une symétrie orthogonale conserve la norme.

Corrigé de l'exercice 12 : Fonctions paires et impaires

1. Si f est paire et g impaire, fg est impaire, donc $\int_{-1}^1 fg = 0$. Ainsi, $\mathcal{P} \perp \mathcal{I}$, et en particulier $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. Ensuite, toute $f \in \mathcal{E}$ s'écrit

$$f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2},$$

somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, toutes deux continues. **Donc**

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}, \text{ avec } \mathcal{P} \perp \mathcal{I}.$$

2. D'après la question précédente, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^\perp$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{P}^\perp$, que l'on écrit $f = f_p + f_i$. Alors $0 = \langle f_p, f \rangle = |f_p|^2 + \langle f_p, f_i \rangle = |f_p|^2$. Donc $f_p = 0$, puis $f = f_i \in \mathcal{I}$. **On a bien** $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.
3. On a $\exp = \cosh + \sinh$, avec $\cosh \in \mathcal{P}$ et $\sinh \in \mathcal{I}$. Pour $g \in \mathcal{P}$, le théorème de Pythagore donne

$$|\exp - g|^2 = |\sinh|^2 + |\cosh - g|^2 \geq |\sinh|^2,$$

avec égalité si et seulement si $g = \cosh$. Ensuite, $\sinh^2 t = \frac{\cosh(2t) - 1}{2}$, donc

$$|\sinh|^2 = \int_{-1}^1 \frac{\cosh(2t) - 1}{2} dt = \left[\frac{\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{\sinh 2}{2} - 1.$$

La fonction paire la plus proche de $\exp$ est $\cosh$, et

$$d(\exp, \mathcal{P}) = \sqrt{\frac{\sinh 2}{2} - 1} \approx 0,90.$$

Corrigé de l'exercice 13 : Un sous-espace d'orthogonal nul

1. L'application $f \rightarrow f(0)$ est une forme linéaire, et F est son noyau : c'est un sous-espace vectoriel. De plus, la constante 1 n'appartient pas à F . **Donc F est un sous-espace strict de E .**
2. Soit $g \in F^\perp$. La fonction $f : t \rightarrow t g(t)$ est continue et vérifie $f(0) = 0$, donc $f \in F$. Par conséquent, $\langle g, f \rangle = \int_0^1 t g(t)^2 dt = 0$. La fonction $t \rightarrow t g(t)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle sur $[0,1]$. Ainsi $g(t) = 0$ pour tout $t \in]0,1]$, et par continuité $g(0) = 0$. **Donc $F^\perp = \{0\}$.**
3. On en déduit $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$. **Ainsi $(F^\perp)^\perp = E \neq F$, et $F \oplus F^\perp = F \neq E$.**
4. Si E est euclidien de dimension n , tout sous-espace F est de dimension finie. Le théorème du supplémentaire orthogonal donne $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim F^\perp = n - \dim F$. **Un sous-**

espace strict a donc un orthogonal non nul, et $(F^\perp)^\perp = F$.

Point de méthode : pour montrer qu'un orthogonal est nul, on teste l'élément inconnu contre un vecteur bien choisi, ici $t \cdot g(t)$, qui fait apparaître un carré.

Corrigé de l'exercice 14 : Un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^2$

1. À x fixé, $\varphi(x, y)$ est une combinaison linéaire de y_1 et y_2 : elle est linéaire en y . Ensuite, on calcule

$$\overline{\varphi(y, x)} = \overline{y_1 x_1 + i y_1 x_2 - i y_2 x_1 + 2 y_2 x_2} = y_1 \overline{x_1} - i y_1 \overline{x_2} + i y_2 \overline{x_1} + 2 y_2 \overline{x_2}.$$

C'est exactement $\varphi(x, y)$. **La forme est linéaire à droite et à symétrie hermitienne.** Sa matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ est d'ailleurs égale à sa transconjugée.

2. On développe

$|x_1 + i x_2|^2 = (\overline{x_1} - i \overline{x_2})(x_1 + i x_2) = |x_1|^2 + i \overline{x_1} x_2 - i \overline{x_2} x_1 + |x_2|^2$. En ajoutant $|x_2|^2$, on retrouve $\varphi(x, x)$. Donc $\varphi(x, x) \geq 0$. Si $\varphi(x, x) = 0$, alors $x_2 = 0$, puis $x_1 = 0$. **Ainsi φ est un produit scalaire hermitien.**

3. On a $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 1$, donc $e_1 = \varepsilon_1$. Ensuite, $\varphi(e_1, \varepsilon_2) = i$, d'où $w_2 = \varepsilon_2 - i e_1 = (-i, 1)$. Sa norme au carré vaut $|-i + i|^2 + |1|^2 = 1$. On vérifie enfin $\varphi(e_1, w_2) = -i + i = 0$. **La base orthonormée obtenue est $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (-i, 1)$.**

4. On a $\varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + \varphi(y, y) + 2 \operatorname{Re} \varphi(x, y)$. Il suffit donc que $\varphi(x, y)$ soit imaginaire pur non nul. Prenons $x = \varepsilon_1$ et $y = i \varepsilon_1$. Alors $\varphi(x, y) = i$, tandis que $\varphi(x+y, x+y) = |1 + i|^2 = 2 = \varphi(x, x) + \varphi(y, y)$. **Le couple $x = (1, 0)$, $y = (i, 0)$ convient.**

Corrigé de l'exercice 15 : Droite de régression par moindres

carrés

1. Le système s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

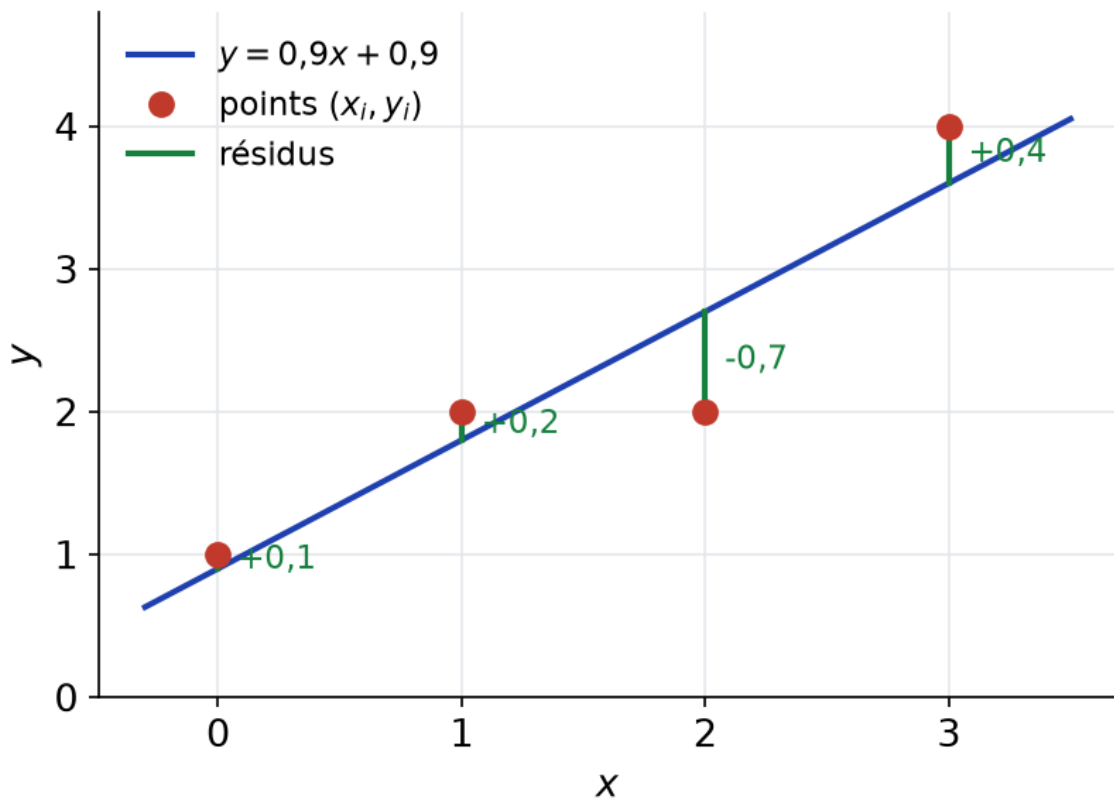
Il n'a pas de solution, car les points ne sont pas alignés.

2. On calcule $A^T A = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^T Y = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}$. Les colonnes de A sont libres, donc la solution est unique. Le système $14a + 6b = 18$, $6a + 4b = 9$ a pour déterminant $56 - 36 = 20$. Les formules de Cramer donnent

$$a = \frac{18 \times 4 - 6 \times 9}{20} = \frac{18}{20}, \quad b = \frac{14 \times 9 - 6 \times 18}{20} = \frac{18}{20}.$$

La droite des moindres carrés est $y = 0,9 x + 0,9$.

3. Les résidus $r_i = y_i - (0,9 x_i + 0,9)$ valent $0,1$, $0,2$, $-0,7$ et $0,4$. Leur somme est nulle : ils sont orthogonaux à la colonne de 1. De plus,
 $0 \times 0,1 + 1 \times 0,2 + 2 \times (-0,7) + 3 \times 0,4 = 0$. **Le vecteur des résidus est orthogonal aux deux colonnes de A , comme le prévoit la théorie.** La figure ci-dessous montre la droite et les résidus.



4. La somme minimale vaut $0,01 + 0,04 + 0,49 + 0,16$. Elle est égale à $0,7$.

Corrigé de l'exercice 16 : Système surdéterminé

1. Les deux premières équations donnent $x = \frac{3}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$. La troisième donnerait alors $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \neq 4$. **Le système est donc incompatible.**

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = (1, 2, 4)^T$. La quantité à minimiser est $|AX - b|^2$. Les colonnes de A sont libres, donc les équations normales ont une solution unique. On calcule

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Le système $3x + 2y = 7$, $2x + 6y = 7$ a pour déterminant 14. On trouve $x = \frac{42 - 14}{14} = 2$ et $y = \frac{21 - 14}{14} = \frac{1}{2}$. **La solution au sens des moindres carrés est**

$$(x, y) = \left(2, \frac{1}{2}\right).$$

3. Le résidu vaut $b - AX = \left(1 - \frac{5}{2}, 2 - \frac{3}{2}, 4 - 3\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. On vérifie qu'il est orthogonal aux colonnes : $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 0$ et $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 0$. L'erreur minimale vaut $\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{2}$. **C'est le carré de la distance de b au plan $\text{Im } A$ de $\mathbb{R}^3$:**
 $d(b, \text{Im } A) = \sqrt{7/2}$.

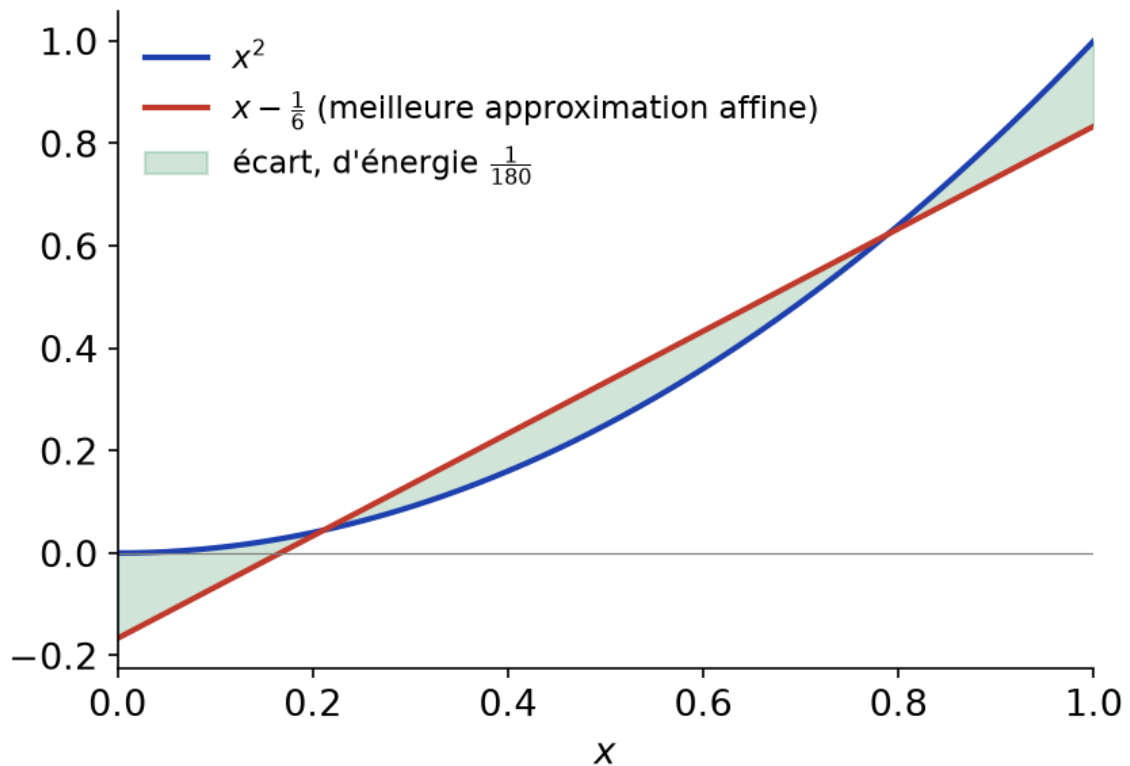
Corrigé de l'exercice 17 : Meilleure approximation affine de x^2 en moyenne quadratique

1. Notons $F = \text{Vect}(1, t)$, de dimension 2. L'intégrale vaut $|t^2 - (at + b)|^2$. Le minimum est donc $d(t^2, F)^2$. D'après le théorème de meilleure approximation, **il est atteint en un unique point, $p_F(t^2)$** .
2. Écrivons $p_F(t^2) = at + b$. Les conditions $t^2 - at - b \perp 1$ et $t^2 - at - b \perp t$ s'écrivent, avec $\langle 1, 1 \rangle = 1$, $\langle 1, t \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle t, t \rangle = \frac{1}{3}$, $\langle t^2, 1 \rangle = \frac{1}{3}$ et $\langle t^2, t \rangle = \frac{1}{4}$:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = \frac{1}{3} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La première équation donne $b = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$. En reportant, $\frac{a}{3} + \frac{1}{6} - \frac{a}{4} = \frac{1}{4}$, soit $\frac{a}{12} = \frac{1}{12}$. **Donc $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$: la meilleure approximation est $t - \frac{1}{6}$.**

3. Le minimum vaut $|t^2|^2 - \langle t^2, p_F(t^2) \rangle$, car $t^2 - p_F(t^2) \perp p_F(t^2)$. Or $|t^2|^2 = \frac{1}{5}$ et $\langle t^2, t - \frac{1}{6} \rangle = \frac{1}{4} - \frac{1}{18} = \frac{7}{36}$. Ainsi le minimum vaut $\frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{36 - 35}{180}$. **Le minimum est égal à $\frac{1}{180}$.** La figure ci-dessous compare x^2 et $x - \frac{1}{6}$ sur $[0, 1]$.



Point de méthode : on peut contrôler ce résultat en développant

$$\int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}.$$

Corrigé de l'exercice 18 : Produit scalaire sur les matrices

- Le coefficient (j, j) de $A^T B$ vaut $\sum_i a_{ij} b_{ij}$. En sommant sur j , on obtient $\text{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. C'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$, lu sur les coefficients.

C'est donc un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit S symétrique et T antisymétrique. On a $\langle S, T \rangle = \text{tr}(S T)$. Or $\text{tr}(S T) = \text{tr}((S T)^T) = \text{tr}(T^T S^T) = -\text{tr}(T S) = -\text{tr}(S T)$. Donc $\langle S, T \rangle = 0$, et $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^\perp$. De plus, $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n^\perp$. **Par égalité des dimensions,**

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp.$$

3. On a $\text{tr } A = \text{tr}(I_n^T A) = \langle I_n, A \rangle$ et $|I_n|^2 = n$. Par Cauchy-Schwarz, $(\text{tr } A)^2 \leq n |A|^2 = n \text{tr}(A^T A)$. Il y a égalité si et seulement si A est colinéaire à I_n , c'est-à-dire $A = \lambda I_n$.
4. Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2 \oplus \mathcal{A}_2$ est une somme orthogonale, la projection de M sur $\mathcal{S}_2$ est sa partie symétrique $\frac{M + M^T}{2} = \begin{pmatrix} \text{ray?} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La distance est la norme de la partie antisymétrique $\frac{M - M^T}{2} = \begin{pmatrix} \text{aay?} & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $d(M, \mathcal{S}_2) = \sqrt{0 + 1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$.

Corrigé de l'exercice 19 : Problème, déterminant de Gram et distance

1. L'espace V est de dimension finie, donc il admet une base orthonormée par Gram-Schmidt. Écrivons $x_j = \sum_k m_{kj} \varepsilon_k$. Dans une base orthonormée, le produit scalaire se calcule sur les coordonnées : $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_k m_{ki} m_{kj}$. C'est le coefficient (i, j) de $M^T M$.
2. On a $m = \dim V \leq p$. Si la famille est libre, alors $m = p$, la matrice M est carrée et inversible, et $G = \det(M^T M) = \det(M)^2 > 0$. Si la famille est liée, il existe $\lambda \neq 0$ tel que $M \lambda = 0$. Alors $M^T M \lambda = 0$, donc $M^T M$ n'est pas inversible et $G = 0$. Ainsi $G \geq 0$, avec égalité si et seulement si la famille est liée.
3. Écrivons $x = p + h$, avec $p = p_F(x) = \sum \lambda_i x_i$ et $h \in F^\perp$. La dernière ligne de la matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_p, x)$ est $(\langle x, x_1 \rangle, \dots, \langle x, x_p \rangle, \langle x, x \rangle)$. Retranchons-lui $\sum \lambda_i$ fois la ligne i , puis faisons de même sur les colonnes. Le déterminant ne change pas, et l'on obtient la matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_p, h)$. Or $\langle h, x_i \rangle = 0$, donc la dernière ligne devient $(0, \dots, 0, |h|^2)$. En développant selon cette ligne,

$$G(x_1, \dots, x_p, x) = |h|^2 G(x_1, \dots, x_p).$$

Comme $|h| = d(x, F)$ et $G(x_1, \dots, x_p) > 0$, on obtient

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_p, x)}{G(x_1, \dots, x_p)}.$$

4. Posons $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ et $x = (1,1,1)$. On a $|u_1|^2 = |u_2|^2 = 2$,
 $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$, $\langle u_1, x \rangle = \langle u_2, x \rangle = 2$ et $|x|^2 = 3$. Donc
 $G(u_1, u_2) = 4 - 1 = 3$ et

$$G(u_1, u_2, x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(6 - 4) - 1(3 - 4) + 2(2 - 4) = 1.$$

Ainsi $d(x, F)^2 = \frac{1}{3}$. Vérifions : $n = (-1, -1, 1)$ est orthogonal à u_1 et u_2 , et
 $\frac{|\langle n, x \rangle|}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **La distance vaut $\frac{1}{\sqrt{3}}$.**

5. Dans $C([0,1])$, les produits scalaires $\langle t^i, t^j \rangle = \frac{1}{i+j+1}$ donnent

$G(1, t) = 1 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Ensuite, on développe selon la première ligne :

$$G(1, t, t^2) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{240} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{60} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{72} = \frac{9 - 18 + 10}{2160} = \frac{1}{2160}.$$

On retrouve $d(t^2, F)^2 = \frac{1/2160}{1/12} = \frac{1}{180}$, comme à l'exercice 17.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, polynômes orthogonaux de Legendre

1. Pour l'existence, appliquons Gram-Schmidt sans normaliser à la famille libre $(1, X, X^2, \dots)$. On pose $P_0 = 1$, puis $P_n = X^n - p_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}(X^n)$. Ce polynôme est unitaire de degré n , car on retranche un polynôme de degré au plus $n-1$. De plus, il est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, qui contient $P_0, \dots, P_{n-1}$.

Pour l'unicité, soit $(\tilde{P}_n)$ une autre suite convenable. Par la question 2, appliquée aux deux suites, P_n et $\tilde{P}_n$ sont orthogonaux à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or $P_n - \tilde{P}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puisque les deux sont unitaires de degré n . Ce polynôme est donc orthogonal à lui-même, donc nul. **La suite (P_n) existe et est unique.**

2. Soit (P_n) une suite comme dans la question 1. Les polynômes $P_0, \dots, P_{n-1}$ ont des degrés échelonnés de 0 à $n-1$. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme P_n est orthogonal à chacun d'eux, **P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.**

3. Posons $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$. C'est un polynôme unitaire de degré n . Le changement de variable $s = -t$ donne

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = (-1)^{n+m} \int_{-1}^1 P_n(-t) P_m(-t) dt = (-1)^{n+m} \langle P_n, P_m \rangle = 0 \text{ pour } n \neq m.$$

Par unicité, $Q_n = P_n$. Ainsi $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$: P_n a la parité de n .

4. On a $P_0 = 1$ et $P_1 = X$, car $\langle X, 1 \rangle = 0$. Ensuite, l'exercice 7 donne $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$. Enfin, l'exercice 8 donne $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{3}{5}X$. Donc $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ et $P_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

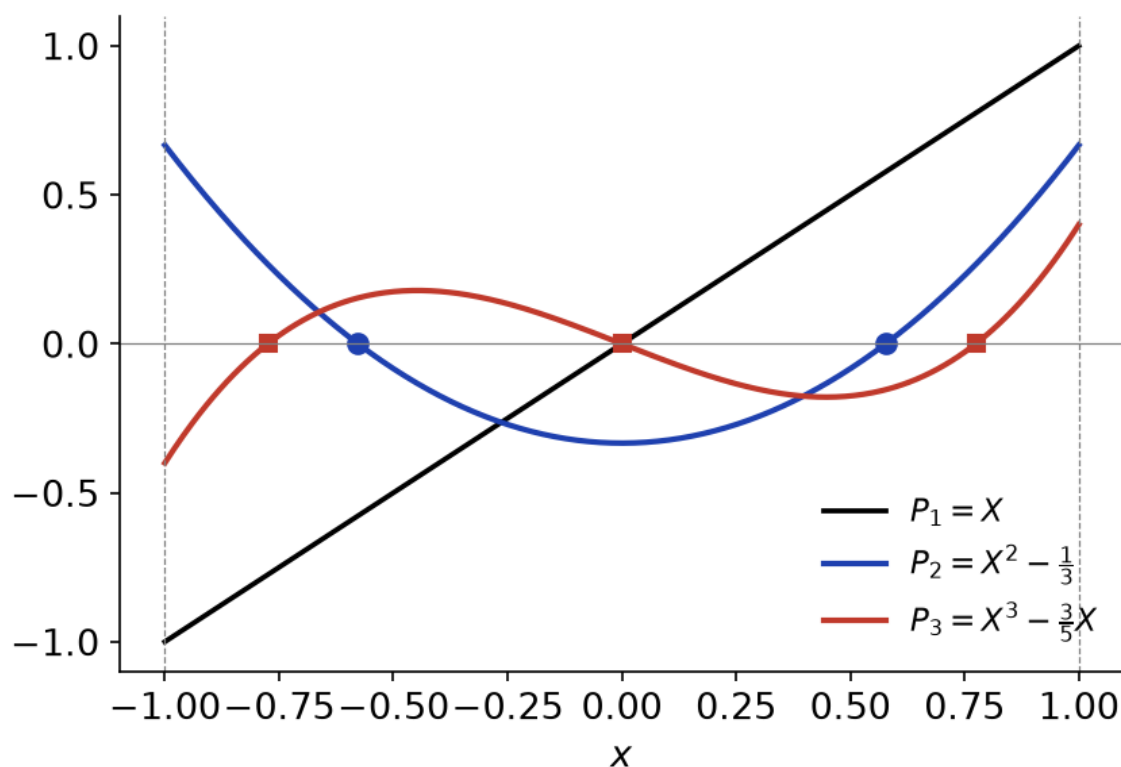
5. Les racines de $P_n Q$ dans $] -1, 1[$ sont celles de P_n . En chaque x_j , la multiplicité devient paire, car on ajoute 1 à une multiplicité impaire. Les autres racines de P_n dans $] -1, 1[$ sont déjà de multiplicité paire. Ainsi, $P_n Q$ ne change pas de signe en traversant ses racines de $] -1, 1[$. Par continuité, $P_n Q$ garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

Comme $P_n Q$ est non nul et de signe constant, $\int_{-1}^1 P_n Q \neq 0$. Supposons $k < n$. Alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et la question 2 donne $\langle P_n, Q \rangle = 0$: c'est absurde. Donc $k \geq n$. Par ailleurs, $k \leq \deg P_n = n$. Par conséquent, $k = n$.

6. Le polynôme P_n possède n racines distinctes dans $] -1, 1[$, de multiplicités au moins 1.

Comme la somme des multiplicités vaut au plus n , chacune est égale à 1. Ainsi P_n a n racines réelles simples, toutes dans $] -1, 1[$. Par exemple, P_2 s'annule en

$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,58$, et P_3 en 0 et $\pm \sqrt{\frac{3}{5}} \approx \pm 0,77$. La figure ci-dessous confirme ces résultats.



Point de méthode : l'orthogonalité à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ se combine avec un polynôme test bien choisi. C'est un argument classique pour localiser des racines.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [espaces euclidiens, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur espaces euclidiens](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales dépendant d'un paramètre](#)
- Chapitre suivant : [Isométries, endomorphismes symétriques et théorème spectral](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)