

Espaces de Hilbert

Exercice 1 : Identité du parallélogramme

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $|(x_1, x_2)|_1 = |x_1| + |x_2|$.

1. Soit H un espace préhilbertien réel. Démontrer que $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$ pour tous $x, y \in H$.
2. En testant les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$, montrer que $\|\cdot\|_1$ ne provient d'aucun produit scalaire.
3. Même question pour la norme $|(x_1, x_2)|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$.
4. Dans un espace préhilbertien réel, exprimer $\langle x, y \rangle$ à l'aide de $|x+y|$ et $|x-y|$.

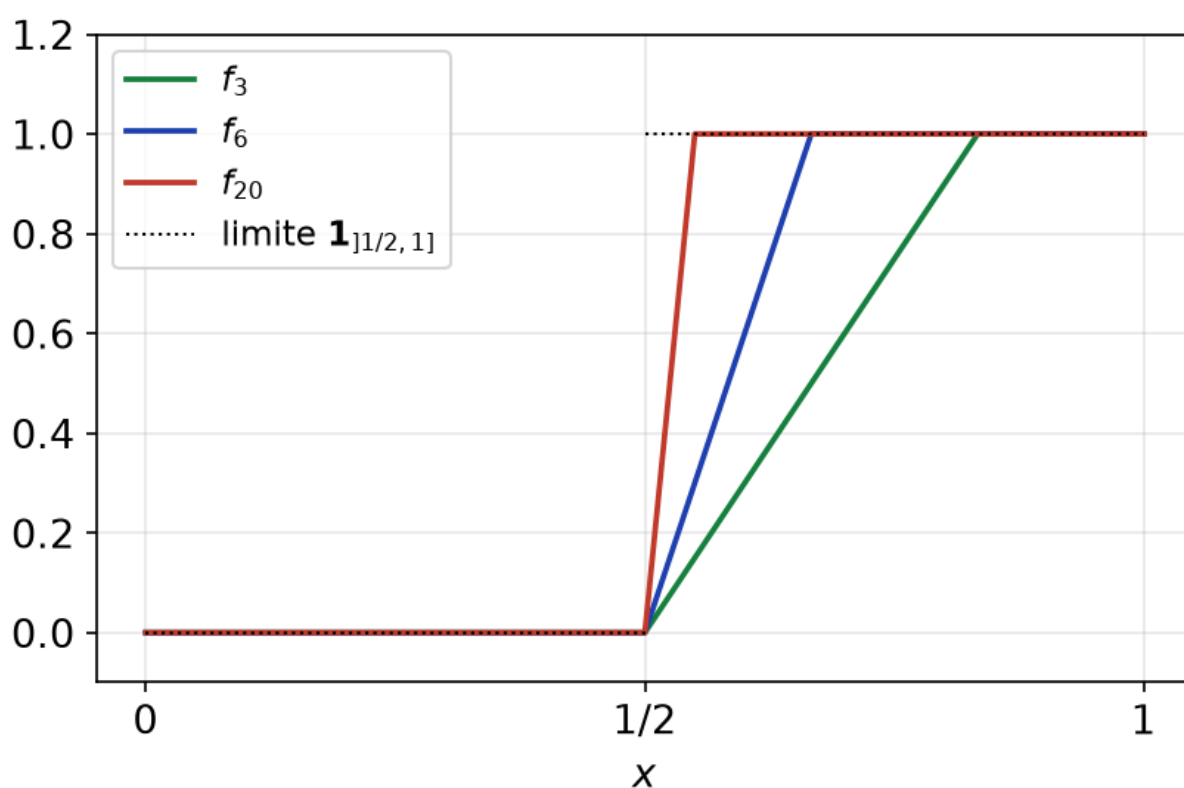
Exercice 2 : Complétude de l'espace des suites de carré sommable

On note ℓ^2 l'espace des suites complexes $u = (u_n)_{n \geq 0}$ telles que $\sum |u_n|^2 < \infty$.

1. Montrer que $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$ est bien défini et définit un produit scalaire sur ℓ^2 .
2. Soit $(u^{(p)})_{p \geq 0}$ une suite de Cauchy de ℓ^2 . Montrer que, pour chaque n , la suite $(u_n^{(p)})_p$ converge vers un nombre u_n .
3. Montrer que $u = (u_n)$ appartient à ℓ^2 et que $u^{(p)} \rightarrow u$ dans ℓ^2 . Conclure.

Exercice 3 : Un espace préhilbertien non complet

On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$. Pour $n \geq 2$, on définit f_n par $f_n(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) = n(x - \frac{1}{2})$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 1$ sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$. La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces fonctions.



1. Montrer que $\|f_m - f_n\|_2^2 \leq \frac{1}{n}$ pour $m \geq n \geq 2$. En déduire que (f_n) est de Cauchy dans E .
2. Montrer que (f_n) converge dans $L^2([0,1])$ vers $\mathbf{1}_{[1/2, 1]}$.
3. En déduire que (f_n) ne converge pas dans E , puis que E n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 4 : Projection sur une boule et sur un cône

Soit H un espace de Hilbert réel et $B = \{y \in H : |y| \leq 1\}$.

1. Justifier que B est convexe, fermée et non vide.
2. Montrer que $P_B(x) = x$ si $|x| \leq 1$ et $P_B(x) = \frac{x}{|x|}$ si $|x| > 1$.
3. Dans $L^2([0,1])$ réel, on note C l'ensemble des fonctions positives presque partout. Montrer que C est un convexe fermé.
4. Montrer que $P_C(f) = f^+$ et que $d(f, C) = |f^-|_2$. Calculer $d(f, C)$ pour $f(x) = x - \frac{1}{2}$.

Exercice 5 : Meilleure approximation affine dans L^2

Dans $L^2([0,1])$ réel, on note F le sous-espace des fonctions affines $x \rightarrow a + bx$.

1. Justifier que F est fermé.
2. Calculer la projection orthogonale p de $f(x) = x^2$ sur F .

3. En déduire $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - a - bx)^2 dx$.

Exercice 6 : Projection sur un hyperplan fermé de L^2

Dans $H = L^2([0,1])$ réel, on considère $G = \left\{ f \in H : \int_0^1 f(x) dx = 0 \right\}$.

1. Montrer que G est un hyperplan fermé de H .
2. Déterminer $G^\perp$.
3. Donner l'expression de $P_G(f)$ pour $f \in H$.
4. Calculer $P_G(f)$ et $d(f, G)$ pour $f(x) = e^x$.

Exercice 7 : Sous-espace dense et orthogonal trivial

Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de H . Montrer que $F^\perp = \overline{F}^\perp$, puis que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.
2. Dans $H = \ell^2$, on note c_{00} le sous-espace des suites à support fini. Déterminer $c_{00}^\perp$.
3. Montrer que c_{00} n'est pas fermé, en considérant $u = (\frac{1}{n+1})_{n \geq 0}$.
4. Montrer que $c_{00} \oplus c_{00}^\perp \neq \ell^2$. Quelle hypothèse du cours est en défaut ?

Exercice 8 : Représentation de Riesz dans L^2

1. Sur $L^2([0,1])$ réel, on pose $\varphi(f) = \int_0^1 x f(x) dx$. Montrer que φ est une forme linéaire continue, donner son représentant de Riesz et calculer $|\varphi|$.
2. Même question pour $\psi(f) = \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx$.
3. Sur $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme de L^2 , on pose $\theta(f) = f(\frac{1}{2})$. En construisant des fonctions en « chapeau » de hauteur 1 et de support de longueur $\frac{2}{n}$, montrer que θ n'est pas continue.

Exercice 9 : Formes linéaires sur l'espace des suites

On travaille dans ℓ^2 réel, indexé par $n \geq 1$.

1. Montrer que $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ définit une forme linéaire continue sur ℓ^2 . Donner son représentant et sa norme.
2. Montrer que toute forme linéaire continue sur ℓ^2 s'écrit $u \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ avec $a \in \ell^2$.
3. Sur ℓ^2 , on pose $\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. À l'aide de $u^{(N)} = \frac{1}{N}(1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ (N termes non nuls), montrer que ψ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_2$.

Exercice 10 : Adjoint du décalage

Dans $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ complexe, on définit le décalage $S(u_0, u_1, u_2, \dots) = (0, u_0, u_1, \dots)$.

1. Montrer que S est linéaire et isométrique. Est-il surjectif ?
2. À l'aide du théorème de Riesz, justifier l'existence d'un opérateur S^* tel que $\langle Su, v \rangle = \langle u, S^*v \rangle$ pour tous u, v .
3. Calculer S^*v explicitement.
4. Calculer S^*S et SS^* . Interpréter SS^* comme une projection orthogonale.

Exercice 11 : Inégalité de Bessel dans l'espace des suites

Dans $\ell^2(\mathbb{N})$ réel, on note ε_n la suite dont seul le terme d'indice n vaut 1, et $x = (2^{-n})_{n \geq 0}$.

1. Montrer que $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ est orthonormale mais n'est pas une base hilbertienne.
2. Calculer $\|x\|^2$ et $\sum_{n \geq 0} \langle x, \varepsilon_n \rangle^2$. Vérifier l'inégalité de Bessel.
3. Calculer la distance de x au sous-espace fermé engendré par les ε_n .

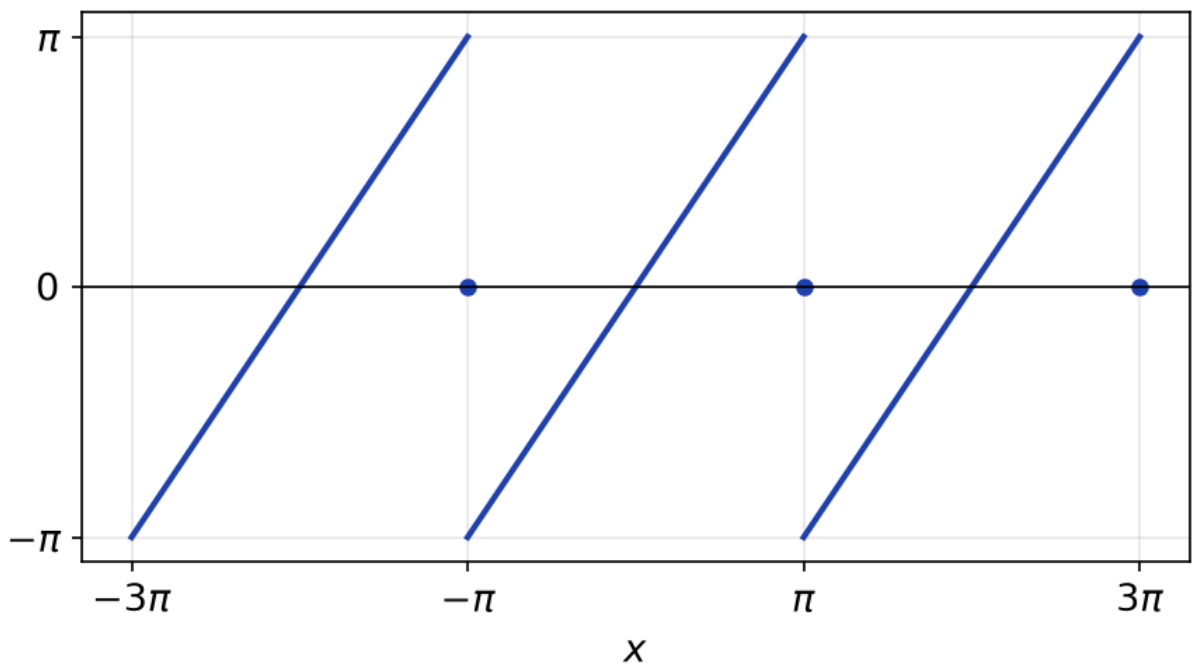
Exercice 12 : Base hilbertienne des sinus

Dans $L^2([0, \pi])$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f \bar{g}$, on pose $s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ pour $n \geq 1$. On admet que $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

1. Montrer que $(s_n)_{n \geq 1}$ est orthonormale.
2. Soit $f \in L^2([0, \pi])$ orthogonale à tous les s_n . En prolongeant f en une fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$, montrer que $f = 0$ presque partout. Conclure.
3. Développer la fonction constante 1 dans cette base.
4. En déduire, par Parseval, la valeur de $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 13 : Série de Fourier de l'identité

Soit f la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x$ sur $] -\pi, \pi[$ et $f(\pi) = 0$. Son graphe en « dents de scie » est représenté ci-dessous.



1. Calculer les coefficients $c_n(f)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. Écrire la série de Fourier de f sous forme réelle. En quel sens converge-t-elle vers f ?
3. Appliquer l'égalité de Parseval et en déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
4. La série de Fourier de f peut-elle converger uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 14 : Série de Fourier de la valeur absolue

Soit g la fonction 2π -périodique égale à $|x|$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$ pour $n \geq 0$, et justifier que les coefficients en sinus sont nuls.
2. Montrer que la série de Fourier de g converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

3. En évaluant en 0 , retrouver $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
4. À l'aide de Parseval, calculer $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$, puis $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 15 : Noyau de Fejér

Pour $n \geq 0$, on pose $D_n(t) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}$ et, pour $N \geq 0$, $K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n$.

- Montrer que $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
- Montrer que $K_N(t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2(\frac{(N+1)t}{2})}{\sin^2(t/2)}$. En déduire que $K_N \geq 0$.
- Montrer que $K_N(t) = \sum_{|k| \leq N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikt}$ et que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N = 1$.
- Soit $0 < \delta < \pi$. Montrer que $\sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.
- Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, exprimer $\sigma_N f = f * K_N$ à l'aide des coefficients $c_k(f)$.

Exercice 16 : Unicité des coefficients de Fourier

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues 2π -périodiques à valeurs complexes. On utilise le théorème de Fejér.

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont tous les coefficients de Fourier sont nuls. Montrer que $f = 0$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Montrer que $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$ pour tout x , la convergence étant uniforme.
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π -périodique. Montrer que $c_n(f') = in c_n(f)$, puis que $\sum |c_n(f)| < \infty$. Conclure.
4. On admet que $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. Dédurre du théorème de Fejér que $(e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Exercice 17 : Transformée de Fourier d'une indicatrice

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$. Soit $a > 0$ et $f = 1_{[-a,a]}$.

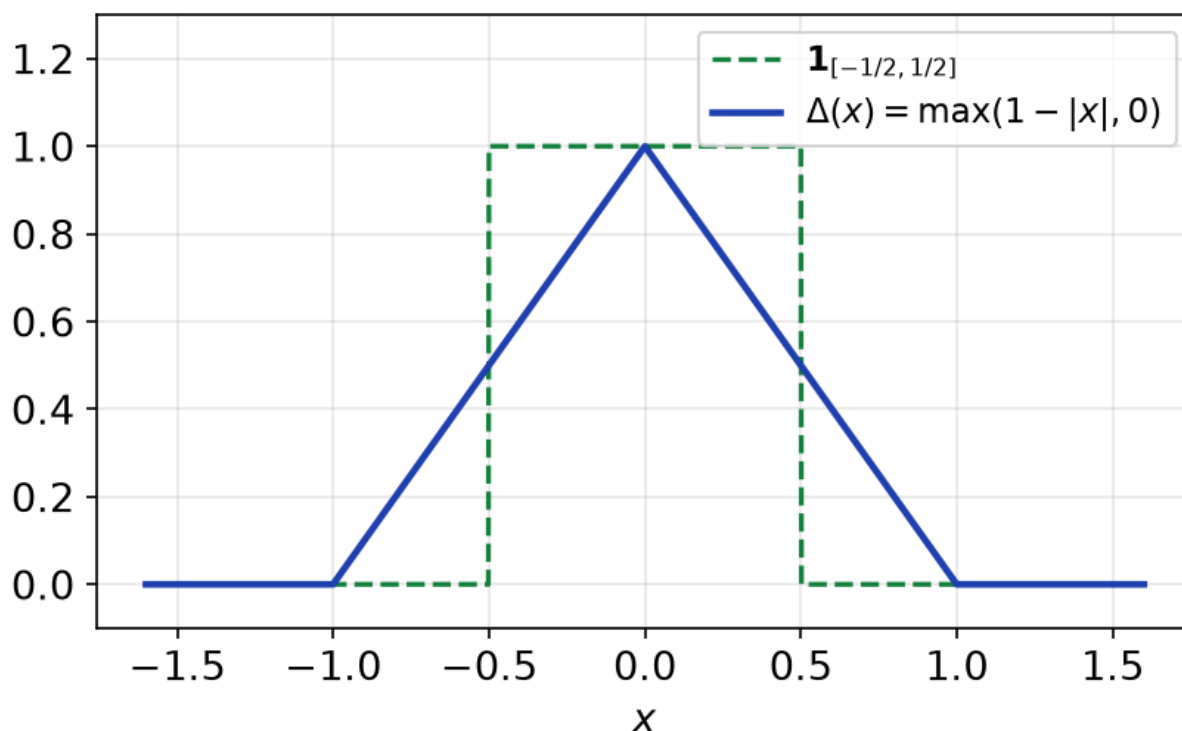
1. Calculer $\widehat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\widehat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$ et tend vers 0 à l'infini.
3. Montrer que $\widehat{f}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure sur l'image de L^1 par la transformation de Fourier ?

Exercice 18 : Transformées de Fourier usuelles

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$.
2. Soit $g(x) = e^{-x^2/2}$. Justifier que $\widehat{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, puis montrer que $(\widehat{g})'(\xi) = -\xi \widehat{g}(\xi)$.
3. En déduire $\widehat{g}$, sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.
4. Pour $a > 0$, calculer la transformée de Fourier de $h(x) = e^{-ax^2}$.

Exercice 19 : Convolution et fonction triangle

On note $I = 1_{[-1/2, 1/2]}$ et $\Delta(x) = \max(1 - |x|, 0)$. La figure ci-dessous représente ces deux fonctions.



1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$ est définie presque partout, que $|f * g|_1 \leq |f|_1 |g|_1$ et que $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.
2. Montrer que $I * I = \Delta$.
3. En déduire $\widehat{\Delta}$, puis vérifier le résultat par un calcul direct.
4. Montrer que $\widehat{\Delta}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20 : Inégalité de Wirtinger

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π -périodique, telle que $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$.

1. Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.

2. Démontrer l'inégalité de Wirtinger : $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx$.

3. Déterminer les cas d'égalité.

4. Soit $u \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $u(0) = u(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^{\pi} u^2 \leq \int_0^{\pi} u'^2$, avec égalité si et seulement si $u(x) = \lambda \sin x$.

Exercice 21 : Problème sur les polynômes de Legendre

On travaille dans $H = L^2([-1, 1])$ réel, muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$. On admet que $\mathcal{C}([-1, 1])$ est dense dans H . Pour $n \geq 0$, on pose

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

1. Justifier que H est un espace de Hilbert et que les fonctions polynomiales sont denses dans H .

2. Calculer P_0 , P_1 et P_2 . Montrer que P_n est de degré n .

3. Montrer que $\langle P_n, Q \rangle = 0$ pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n . On pourra intégrer n fois par parties.

4. En déduire que $\left(\frac{P_n}{|P_n|}\right)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H .
5. Calculer $|P_0|^2$ et $|P_2|^2$, puis la projection orthogonale de $f(x) = |x|$ sur l'espace des polynômes de degré au plus 2.
6. En déduire $\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 (|x| - a - bx - cx^2)^2 dx$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [espaces de Hilbert, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Espaces \$L^p\$](#) , [Compacité et connexité](#)
- Chapitre précédent : [Singularités et théorème des résidus](#)
- Chapitre suivant : [Espaces probabilisés, variables aléatoires et espérance](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)