

Equations et second degré

Exercice 1 :

a. $P_1(x) = 3x^2 - 4x + 6 = 3(x^2 - \frac{4}{3}x + 2) = 3((x - \frac{4}{6})^2 - \frac{16}{36} + 2)$
 $P_1(x) = 3((x - \frac{4}{6})^2 + \frac{54}{36})$

b. ☐

c. Poser $X =$

$$P_3(x) = 5(x + \frac{1}{5})(x + 1)$$

d. $P_4(x) = 4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3 - \sqrt{6})(2x - 3 + \sqrt{6})$.

e. $P_5(x) = x^2 + ax + a \quad (a \in \mathbb{R})$

Il faut effectuer un raisonnement par disjonction des cas :

Si $x \in [0; 4] P_5(x) = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a(a-4)}{4}$

Si $x \notin [0; 4] P_5(x) = (x + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a(a-4)}{4}})(x + \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a(a-4)}{4}})$

Exercice 2 :

a. $4x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{7})(2x + \sqrt{7}) \Leftrightarrow x =$

b. $-9x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow -3x(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x =$

c. $7(x-1)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - \frac{6}{7} = 0 \Leftrightarrow (x-1 - \sqrt{\frac{6}{7}})(x-1 + \sqrt{\frac{6}{7}})$
 $x = 1 + \sqrt{\frac{6}{7}} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{\frac{6}{7}}$

e. $4(x-2)^2 = 9(2x+3)^2 \Leftrightarrow [2(x-2)]^2 - [3(2x+3)]^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (4x-4-6x-9)(4x-4+6x+9) = 0$
 $\Leftrightarrow (-2x-13)(10x+5) = 0$



Exercice 3 :

1. $(x-1)(ax^2 - b) = ax^3 - ax^2 - bx + b$

par identification $a = 2$ et $b = 1$.

2. $a + \frac{b}{x+7} = \frac{ax+7a+b}{x+7}$

par identification $a = 4$ et en résolvant l'équation $7 \times 4 + b = 23$

, nous obtenons $b=19$.

Exercice 4 :

a. $4-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$

b. $x \in]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

c. Ensemble vide.

d. $S =$

e. $S =$

Exercice 5 :

a. $f(x) = \frac{2x-1}{x^3+x^2-2x}$.

f est définie $\Leftrightarrow x^3+x^2-2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) \neq 0$

donc

b. $g(x) = 3 - \sqrt{2x^4 + 5x^3 - 3x^2}$

f est définie $\Leftrightarrow 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 6 :

1. $\frac{5x+4}{x-1} = 0$.

$$5x+4=0 \ (x \neq 1)$$

$$x = -\frac{4}{5}$$

2. $\frac{2x^2-5x}{x+4} = x$.

$$2x^2-5x = x^2+4x$$

$$2x^2-5x-x^2-4x=0$$

$$x^2-9x=0$$

$$x(x-9)=0$$

$x =$

$$3. (4x-5)^2 \geq (6x+1)^2 .$$

$$(4x-5)^2 - (6x+1)^2 \geq 0$$

$$(4x-5-6x-1)(4x-5+6x+1) \geq 0$$

$$(-2x-6)(10x-4) \geq 0$$

Les racines sont :

$$-2x-6=0 \text{ ou } 10x-4=0$$

$$x = -\frac{6}{2} \text{ ou } x = \frac{4}{10}$$

$$x = -3 \text{ ou } x = \frac{2}{5}$$

Conclusion : L'ensemble solution est $[-3; \frac{2}{5}]$.

Exercice 7 :

Pour résoudre cette inéquation, nous allons suivre les étapes suivantes :

$$1. \text{ Trouver les valeurs pour lesquelles le numérateur est égal à zéro : } (6x + 8 - 2x^2)(3 - x) = 0$$

$$\text{Le premier facteur est égal à zéro si } 6x + 8 - 2x^2 = 0$$

Réarrangeons l'équation :

$$-2x^2 + 6x + 8 = 0$$

Nous pouvons diviser toute l'équation par -2 :

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

En factorisant, nous obtenons :

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

Cela donne les solutions : $x = 4$ et $x = -1$

$$\text{Le deuxième facteur est égal à zéro si } 3 - x = 0$$

Cela donne la solution $x = 3$

$$2. \text{ Trouver les valeurs pour lesquelles le dénominateur est égal à zéro : } 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

Pour résoudre cette équation quadratique, nous pouvons utiliser la formule quadratique ou la factorisation.

En utilisant la factorisation, nous obtenons :

$$(2x - 3)(2x - 3) = 0$$

Cela donne la solution $x = 3/2$

Ainsi, les valeurs critiques de x sont $x = -1$, $x = 3/2$, $x = 3$ et $x = 4$.

3. Construire un tableau de signes en utilisant les valeurs critiques :

```
%5Cbegin{array}{|c|c|c|c|c|} %5Chline (-%5Cinfty,-1) (-1,%5Cfrac{3}{2}) (%5Cfrac{3}{2},3) (3,4)
(4,+%5Cinfty) %5C%5C %5Chline 6x+8-2x^2 + + + - - %5C%5C %5Chline 3-x - - + + + %5C%5C
%5Chline 4x^2-12x+9 + - + + + %5C%5C %5Chline %5Cfrac{(6x+8-2x^2)(3-x)}{4x^2-12x+9} - + - + -
%5C%5C %5Chline %5Cend{array}
```

4. Identifier les intervalles pour lesquels l'expression est positive ou nulle.

L'expression est positive ou nulle sur les intervalles $]1, \frac{3}{2}[$ et $(3, 4]$.

Donc, la solution de l'inéquation est l'union de ces deux intervalles :

$$x \in]-1, 3/2[\cup [3, 4]$$

Exercice 8 :

1. Pour trouver une fonction polynôme du second degré ayant 1 et 4 comme racines, nous utilisons la forme factorisée du polynôme :

$$P(x) = (x - 1)(x - 4)$$

Si nous voulons que la courbe représentative de ce polynôme passe par le point A(-1, 1), nous substituons les coordonnées du point dans le polynôme :

$$P(-1) = (-1 - 1)(-1 - 4) = (-2)(-5) = 10$$

Cependant, nous voyons que $P(-1)$ ne correspond pas à la valeur $y = 1$ donnée par le point A. Par conséquent, il n'existe pas de fonction polynôme du second degré ayant 1 et 4 comme racines et passant par le point A(-1, 1).

2. Nous devons montrer que pour tout réel a , l'équation $x^2 = ax + 1$ a deux solutions réelles distinctes.

Pour cela, nous pouvons utiliser le discriminant de l'équation quadratique. Le discriminant est défini comme $\Delta = b^2 - 4ac$, où a , b et c sont les coefficients de l'équation.

Dans ce cas, $a = 1$, $b = -a$ et $c = 1$.

Donc, le discriminant est $\Delta = (-a)^2 - 4 \times 1 \times 1 = a^2 - 4$.

Pour que l'équation ait deux solutions réelles distinctes, le discriminant doit être strictement positif :

$$a^2 - 4 > 0.$$

Cela implique que $a^2 > 4$, donc $|a| > 2$.

Donc, pour tout réel a dont la valeur absolue est supérieure à 2 ($|a| > 2$), l'équation $x^2 = ax + 1$ admet deux solutions réelles distinctes.

3. Pour que l'équation $(E) : (m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$ ait une unique solution, son discriminant doit être égal à zéro : $b^2 - 4ac = 0$.

Dans ce cas, $a = (m + 3)$, $b = 2(3m + 1)$ et $c = (m + 3)$.

Donc, le discriminant est :

$$(2(3m + 1))^2 - 4(m + 3)(m + 3) = 4(9m^2 + 6m + 1) - 4(m + 3)(m + 3) = 0$$

Nous pouvons simplifier cette équation en développant les termes :

$$36m^2 + 24m + 4 - 4(m^2 + 6m + 9) = 0$$

$$36m^2 + 24m + 4 - 4m^2 - 24m - 36 = 0$$

$$32m^2 - 32 = 0$$

Divisons par 32 pour simplifier l'équation :

$$m^2 - 1 = 0$$

Cette équation peut être factorisée comme $(m - 1)(m + 1) = 0$.

Donc, les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) a une unique solution sont $m = 1$ et $m = -1$.

Pour calculer la solution lorsque $m = 1$, nous substituons m dans l'équation :

$$\begin{aligned} & (m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) \\ &= (1 + 3)x^2 + 2(3(1) + 1)x + (1 + 3) \\ &= 4x^2 + 8x + 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons diviser toute l'équation par 4 pour simplifier :

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

Cette équation peut être factorisée comme $(x + 1)^2 = 0$.

La solution unique est donc $x = -1$.

Exercice 9 :

Pour résoudre cette problématique, nous allons suivre les étapes suivantes :

1. Pour exprimer en fonction de x l'aire de la partie coloriée, on peut considérer deux parties distinctes : la bande coloriée et le carré central.

La bande coloriée a une largeur x cm et une longueur égale à la longueur du carré, c'est-à-dire 10 cm. Donc, l'aire de la bande est de $x \times 10 = 10x \text{ cm}^2$.

Le carré central a un côté de longueur x cm, donc son aire est de $x \times x = x^2 \text{ cm}^2$.

L'aire totale de la partie coloriée, notée $A(x)$, est donc la somme de ces deux aires : $A(x) = 10x + x^2 \text{ cm}^2$.

2. Pour trouver les valeurs de x pour lesquelles l'aire coloriée est égale à l'aire de la partie blanche, nous devons considérer que l'aire du carré total est de $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$.

L'aire de la partie blanche est donc égale à l'aire totale moins l'aire de la partie coloriée : $100 \text{ cm}^2 - A(x)$.

Nous devons donc résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} 100 - A(x) &= 0 \\ 100 - (10x + x^2) &= 0 \end{aligned}$$

Réarrangeons cette équation :

$$x^2 + 10x - 100 = 0$$

On peut résoudre cette équation quadratique en utilisant la formule quadratique ou en factorisant. Factorisons cette équation :

$$(x + 20)(x - 10) = 0$$

Cela donne deux solutions possibles : $x = -20$ ou $x = 10$.

Cependant, une valeur négative pour x n'a pas de sens dans ce problème, puisque x représente une longueur. Donc, la seule valeur valide pour x est $x = 10$.

Par conséquent, pour $x = 10$ cm, l'aire coloriée est égale à l'aire de la partie blanche.

Exercice 10 :

1. Pour résoudre l'équation $-2x^2 - 8x - 5 = 0$, nous pouvons utiliser la méthode du discriminant :

Le discriminant Δ est donné par $\Delta = b^2 - 4ac$, où $a = -2$, $b = -8$ et $c = -5$.

Calculons le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4(-2)(-5) = 64 - 40 = 24$.

Puisque le discriminant est positif ($\Delta > 0$), cela signifie que l'équation $-2x^2 - 8x - 5 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes.

Nous pouvons utiliser la formule quadratique pour trouver les solutions :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{24}}{2 \times (-2)}$$

Simplifions :

$$x = (8 \pm 2\sqrt{6}) / -4$$

$$x = (4 \pm \sqrt{6}) / -2$$

Les solutions de cette équation sont donc $x = -(4 + \sqrt{6}) / 2$ et $x = -(4 - \sqrt{6}) / 2$.

2. Pour résoudre l'équation $9(1-x)^2 = 4(2x + 1)^2$, nous devons développer les termes et simplifier l'équation :

$$9(1 - 2x + x^2) = 4(4x^2 + 4x + 1)$$

$$9 - 18x + 9x^2 = 16x^2 + 16x + 4$$

Réarrangeons cette équation :

$$9x^2 + 16x^2 - 18x - 16x + 9 - 4 = 0$$

$$25x^2 - 34x + 5 = 0$$

Nous pouvons essayer de factoriser cette équation pour trouver les solutions, mais dans ce cas, cela ne semble pas possible.

Nous pouvons utiliser la formule quadratique pour résoudre cette équation :

$$x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / (2a)$$

$a = 25$, $b = -34$ et $c = 5$.

Calculons le discriminant : $\Delta = (-34)^2 - 4 \times 25 \times 5 = 1156 - 500 = 656$.

Le discriminant est positif, donc l'équation a deux solutions réelles distinctes.

Les solutions de cette équation sont donc :

$$x = \frac{-(-34) \pm \sqrt{656}}{2 \times 25}$$

Simplifions :

$$x = \frac{34 \pm 2\sqrt{164}}{50}$$

$$x = \frac{34 \pm 4\sqrt{41}}{50}$$

Finalement, les solutions de l'équation sont $x = \frac{17 \pm 2\sqrt{41}}{25}$.

3. Pour résoudre l'équation fractionnelle, nous devons trouver un dénominateur commun et simplifier l'équation :

$$(x/(x-1)) - ((3x-4)/(x-1)(x-2)) = 0$$

Pour avoir un dénominateur commun, nous multiplions $(x/(x-1))$ par $(x-2)$ et $((3x-4)/(x-1)(x-2))$ par $(x-1)$:

$$[x(x-2)/(x-1)(x-2)] - [(3x-4)/(x-1)(x-2)] = 0$$

Simplifions l'équation :

$$(x(x-2) - (3x-4)) / (x-1)(x-2) = 0$$

$$(x^2 - 2x - 3x + 4) / (x-1)(x-2) = 0$$

$$(x^2 - 5x + 4) / (x-1)(x-2) = 0$$

Nous pouvons maintenant factoriser le numérateur de l'équation pour résoudre :

$$(x-4)(x-1) / (x-1)(x-2) = 0$$

Maintenant, nous pouvons simplifier et trouver les solutions :

$$(x-4) / (x-2) = 0$$

Le numérateur doit être égal à zéro pour que l'équation soit satisfaite :

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

La solution de l'équation est donc $x = 4$.

4. Pour résoudre l'inéquation $\frac{(2x^2 + x - 3)(x^2 + 5)}{8 - 4x} \geq 0$, nous devons trouver les valeurs de x qui satisfont cette inégalité.

Pour cela, nous devons considérer les valeurs de x pour lesquelles l'expression est positive ou nulle. Nous devons donc trouver les zéros et les points de discontinuité de l'expression.

Tout d'abord, nous devons prendre en compte que le dénominateur ne peut pas être égal à zéro : $8 - 4x \neq 0$.

Cela signifie que $x \neq 2$.

Ensuite, nous devons trouver les zéros de l'expression. Nous avons :

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

Nous pouvons résoudre cette équation en utilisant la formule quadratique :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$a = 2$, $b = 1$ et $c = -3$.

Calculons le discriminant : $\Delta = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25$.

Le discriminant est positif, nous avons donc deux solutions réelles distinctes.

Les solutions de cette équation sont donc :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 2}$$

Simplifions :

$$x = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$x = -6/4 = -3/2 \text{ ou } x = 4/4 = 1.$$

Maintenant, nous pouvons dresser un tableau de signes pour trouver les intervalles de x qui satisferont l'inégalité :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	2	$+\infty$
$2x^2 + x - 3$	+	0	+	0	-
$x^2 + 5$	+		+		+
$8 - 4x$	+		+		0
$\frac{(2x^2 + x - 3)(x^2 + 5)}{8 - 4x}$	+	0	-	0	+
					-

Donc, les solutions de l'inéquation sont les intervalles $x \in (-\infty, -3/2) \cup (1, 2)$.

L'expression est positive ou nulle pour ces valeurs de x .

Exercice 11 :

L'aire d'un triangle rectangle est 429 m^2 , et l'hypoténuse a pour longueur $h = 72,5 \text{ m}$.

Trouver le périmètre.

Notons L la longueur du triangle rectangle et l sa largeur.

Nous avons $\frac{L \times l}{2} = 429$ donc $L \times l =$ ainsi $l = \frac{858}{L}$

Remarque : $L \neq 0$ car l'aire du triangle rectangle est non null, donc nous pouvons diviser par L .

Appliquons le théorème de Pythagore à ce triangle rectangle :

$$L^2 + l^2 = h^2$$

$$L^2 + l^2 = 72,5^2$$

$$L^2 + l^2 = 5256,25$$

$$L^2 + \left(\frac{858}{L}\right)^2 = 5256,25$$

$$L^2 + \frac{736164}{L^2} = 5256,25$$

Multiplions cette équation par $L^2 \neq 0$.



Posons $X = L^2$:

$$X^2 - 5256,25X + 736164 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 5256,25^2 - 4 \times 736164 =$$

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

$$X_1 = \frac{5256,25 + \sqrt{24683508,06}}{2} = 5112,25$$

et

$$X_2 = \frac{5256,25 - \sqrt{24683508,06}}{2} = 144$$

Nous obtenons donc $L^2 = 144$ ou $L^2 = 5112,25$

Comme L est une longueur alors $L > 0$.

$$L = \sqrt{144} = 12 \text{ ou } L = \sqrt{5112,25} = 71,5$$

ce qui nous donnerait :

$$l = \frac{858}{12} = 71,5 \text{ ou } l = \frac{858}{71,5} = 12$$

or la longueur est plus grande que la largeur.

La longueur du triangle rectangle est $L = 71,5$ m et la largeur est 12 m.

Conclusion : Son périmètre est $P = L + l + h = 71,5 + 12 + 72,5 = 156$ m.

Exercice 12 :

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195 km, deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure à 4 km/h à celle de l'autre, arrive une heure plus tôt.

Quelles sont les vitesses des deux cyclistes ?

Indication : Utiliser le fait que la vitesse moyenne v est $v = \frac{d}{t}$
avec d la distance parcourue et t le temps écoulé.



Exercice 13 :

1. On dispose d'une baguette de bois de 10 cm de long.

Où briser la baguette pour que les morceaux obtenus soient deux côtés consécutifs d'un rectangle de surface 20 cm² ?

On note x la distance à laquelle on brise la baguette, on obtient un autre morceau de longueur $10 - x$.

On doit avoir $x(10 - x) = 20$

$$x^2 - 10x + 20 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 100 - 80 = 20 > 0, \text{ il y a donc deux racines réelles distinctes.}$$

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{20}}{2} = 5 + \sqrt{5} \text{ et } x_2 = \frac{10 - \sqrt{20}}{2} = 5 - \sqrt{5}$$

Il faut donc couper la baguette exactement $5 + \sqrt{5}$ ce qui revient à couper à partir de l'autre bout $5 - \sqrt{5}$.

2. Même question avec un rectangle d'aire 40 cm².

Exactement le même principe, nous vous laissons faire..... 



Exercice 14 :

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 49 - 4 \times (-2) \times (-5) = 9 = 3^2$$

$\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-7+3}{-4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-7-3}{-4} = 2,25$$

a est négatif donc $S =$.

2. $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$

$$(x+1)^4 < 16$$

$$(x+1)^4 - 16 < 0$$

$$(x+1)^4 - 4^2 < 0$$

$$((x+1)^2 - 4)((x+1)^2 + 4) < 0$$

$$((x+1)^2 - 2^2)((x+1)^2 + 4) < 0$$

$$(x+1-2)(x+1+2)((x+1)^2+4) < 0$$

$$(x-1)(x+3)((x+1)^2+4) < 0$$

$$(x-1)(x+3) < 0 \quad \text{car} \quad ((x+1)^2+4) > 0$$

a est positif et les racines sont 1 et - 3.

$$S =$$

Exercice 15 :

1. Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = \frac{1}{2}$.

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b. $x^2 = \frac{1}{3}$.

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Résoudre l'équation suivante : $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Posons $X = x^2$

on est amené à résoudre :

$$6X^2 - 5X + 1 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

Le discriminant est strictement positif, il existe donc deux racines réelles distinctes.

$$X_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{1}{2}, \quad X_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{1}{3}$$

Nous avons donc :

$$x^2 = \frac{1}{2}, \quad x^2 = \frac{1}{3}$$

Ce sont les équations du 1.

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

Exercice 16 :

Indication : faire un schéma puis utiliser les propriétés de la symétrie axiale ainsi que l'aire d'un trapèze.

Sur un drapeau rectangulaire de longueur 4 m et de largeur 3 m, on trouve une croix d'épaisseur x m.

Quelle valeur doit-on donner à la largeur de la croix pour que son aire soit égale à la moitié du drapeau ?

Exercice 17 :

1. $x^2 = 9.$

$$x = 3, \text{ ou } x = -3.$$

2. $x^2 = -3.$

Impossible dans $\mathbb{R}$, un carré est positif ou nul.

3. $(x-5)^2 = 3.$

$$(x-5)^2 - \sqrt{3}^2 = 0$$

$$(x-5-\sqrt{3})(x-5+\sqrt{3}) = 0$$

C'est une équation produit, il y a deux solutions :

$$x = 5 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 5 - \sqrt{3}$$

4. $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1.$

$$(2x-1)^2 - x(2x-1) = (2x-1)(2x+1)$$

$$(2x-1)[(2x-1)-x] - (2x-1)(2x+1) = 0$$

$$(2x-1)[x-1] - (2x-1)(2x+1) = 0$$

$$(2x-1)[x-1-(2x+1)] = 0$$

$$(2x-1)[x-1-2x-1] = 0$$

$$(2x-1)(-x-2) = 0$$

C'est une équation produit, il y a deux solutions :

$$x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -2$$

$$5) (3x+5)^2 = (x+1)^2.$$

$$(3x+5)^2 - (x+1)^2 = 0$$

$$(3x+5-x-1)(3x+5+x+1) = 0$$

$$(2x+4)(4x+6) = 0$$

C'est une équation produit, il y a deux solutions :

$$2x+4 = 0 \text{ ou } 4x+6 = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

$$6) \boxed{\times}$$

$$(5x-4-3x-7)(5x-4+3x+7) = 0$$

$$(2x-11)(8x+3) = 0$$

C'est une équation produit :

$$2x-11 = 0 \text{ ou } 8x+3 = 0$$

$$x = \frac{11}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{8}$$

Exercice 18 :

Notons n la longueur du plus petit carré .

Nous avons :

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 15125$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 15125$$

$$3n^2 + 6n + 5 = 15125$$

$$3n^2 + 6n - 15120 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-15120) = 181476$$

$\Delta > 0$, il existe deux racines réelles distinctes.

$$n_1 = \frac{-6 + \sqrt{181476}}{6} = 70 \quad \text{et} \quad n_1 = \frac{-6 - \sqrt{181476}}{6} = -72$$

Or nous recherchons la longueur d'un côté donc **un entier positif**.

Conclusion : les longueurs de ces trois carrés sont 70, 71 et 72.

Exercice 19 :

Nous obtenons l'équation suivante en traduisant l'égalité des deux aires :

$$\frac{(18-x)(8-x)}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{18 \times 8}{2}$$

$$\frac{(18-x)(8-x)}{2} = \frac{144}{4}$$

$$\frac{144 - 26x + x^2}{2} = 36$$

$$\frac{144 - 26x + x^2}{2} = 36$$

$$144 - 26x + x^2 = 72$$

$$x^2 - 26x + 72 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 26^2 - 4 \times 72 =$$

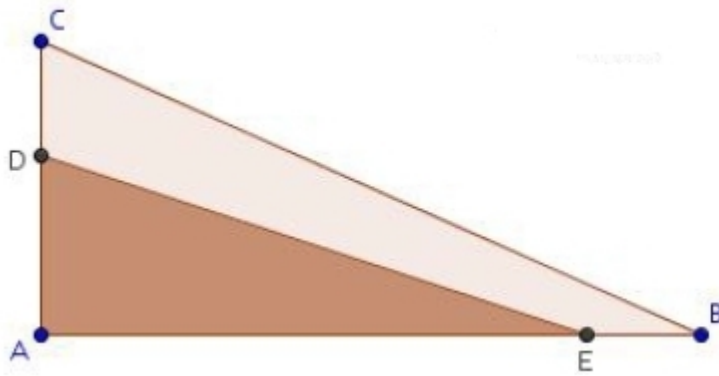
Le discriminant est strictement positif, il existe donc deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{26 + \sqrt{388}}{2} ; x_1 = \frac{26 - \sqrt{388}}{2}$$

$$x_1 \simeq 22,8 ; x_1 \simeq 3,2$$

or $D \in [AC]$ donc $0 < x < 8$

Conclusion : il faut que x prenne la valeur approximative de 3,2 mètres.



Exercice 20 :

Résoudre :

a. $7x+3-5(x+6)=4x-1$

$$7x+3-5x-30=4x-1$$

$$2x-27=4x-1$$

$$2x-4x=27-1$$

$$-2x=26$$

$$x=-\frac{26}{2}=-13$$

b. $2(7x-1)<4x-3$

$$14x-2<4x-3$$

$$14x-4x<2-3$$

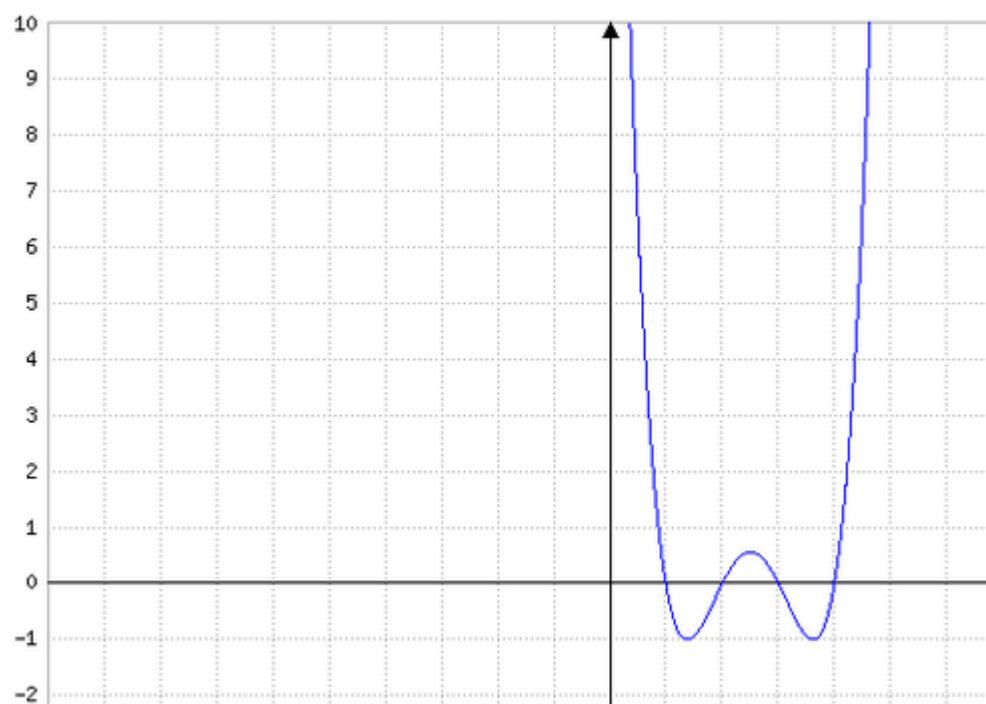
$$10x<-1$$

$$x<\frac{-1}{10}$$

c. $(x-1)(2-x)(x-3)(4-x)\leq 0$

x	1	2	3	4
x-1	- +	+	+	+
2-x	+	+	+ -	-
x-3	-	-	- +	+

4-x	+		+	+	+		-	
-----	---	--	---	---	---	--	---	--



Exercice 21 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{2x-5}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$

Utilisons le produit en croix :

$$(2x-5)(x+1) = (x-1)(x-1)$$

$$2x^2 + 2x - 5x - 5 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 + 2x - 5x - 5 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Une racine évidente est - 2 :

$$(x+2)(x-3)=0$$

C'est une équation produit, il y a deux solutions :

$$x =$$

$$2. \frac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$$

$$\frac{x^2-x+1}{x+2} = \frac{2x+3}{1}$$

Utilisons le produit en croix :

$$x^2-x+1=(2x+3)(x+2)$$

$$x^2-x+1=2x^2+4x+3x+6$$

$$x^2-x+1-2x^2-4x-3x-6=0$$

$$-x^2-8x-5=0$$



Calculons le discriminant :

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 5 =$$

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes réelles .

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{44}}{2} \text{ ou } x_2 = \frac{-8 - \sqrt{44}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 2\sqrt{11}}{2} \text{ ou } x_2 = \frac{-8 - 2\sqrt{11}}{2}$$

$$x_1 = \text{ ou } x_2 =$$

Exercice 22 :

Quel était le prix d'essence à la première station et combien de litres en avait-on pris ?

Notons x le prix d'un litre d'essence dans la première station service en euro.

Nous avons :

$\frac{40}{x}$ représente le nombre de litres d'essence achetés dans la première station.

Dans la seconde on aurait pu avoir : $\frac{40}{x} + 5$ litres d'essence.

donc :

$$\left(\frac{40}{x} + 5\right)(x - 0,1) = 40$$

$$\left(\frac{40 + 5x}{x}\right)(x - 0,1) = 40$$

$$(40 + 5x)(x - 0,1) = 40x$$

$$40x - 40 \times 0,1 + 5x^2 - 5x \times 0,1 = 40x$$

$$-40 \times 0,1 + 5x^2 - 5x \times 0,1 = 0$$

$$-4 + 5x^2 - 0,5x = 0$$

$$5x^2 - 0,5x - 4 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = (-0,5)^2 - 4 \times 5 \times (-4) = 80,25$$

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines réelles distinctes .

$$x_1 = \frac{0,5 + \sqrt{80,25}}{10} \text{ et } x_2 = \frac{0,5 - \sqrt{80,25}}{10}$$

$$x_1 \simeq 0,95 \text{ et } x_2 \simeq -0,84$$

Conclusion : le prix étant positif, on en déduit que le prix d'un litre d'essence est de 0,95 € dans la première station.

on a prit $\frac{40}{x} = \frac{40}{0,95} \simeq 42$ litres d'essence dans la première station et 47 dans la seconde .



Exercice 23 :

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

Soit S la somme et P le produit de ces deux nombres.

Ces deux nombres sont solution de l'équation :

$$X^2 - SX + P = 0$$

$$X^2 - 57X + 540 = 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = (-57)^2 - 4 \times 1 \times 540 =$$

le discriminant est strictement positif, il y a deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{57 + \sqrt{1089}}{2} = 45 \text{ et } X_2 = \frac{57 - \sqrt{1089}}{2} = 12$$

Conclusion : les deux nombres recherchés sont 45 et 12 .



Exercice 24 :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$-x^2 + 9x + 22 > 0.$$

Calculons la valeur du discriminant :

$$\Delta = 81 + 4 \times 22 =$$

Le discriminant est strictement positif, il existe deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{169}}{-2} \text{ et } x_2 = \frac{-9 - \sqrt{169}}{-2}$$

$$x_1 = -2 \text{ et } x_2 = 11$$

Le coefficient dominant $a = -1 < 0$ donc $-x^2 + 9x + 22 > 0$ pour $x \in]-2; 11[$



Résoudre les équations suivantes :

$$1) 4x^2 - x - 3 = 0.$$

La valeur du discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 1 + 48 = 49.$

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{1+7}{8} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{1-7}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{3}{4}; 1 \right\}$

$$2) (t+1)^2 + 3 = 0.$$



Un carré est toujours positif ou nul donc **cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.**

$$\begin{aligned} 3) \quad & 2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0. \\ & 2(4x^2 + 4x + 1) - 2x - 1 - 6 = 0 \\ & 8x^2 + 8x + 2 - 2x - 1 - 6 = 0 \\ & 8x^2 + 6x - 5 = 0 \end{aligned}$$

La valeur du discriminant est $\Delta = 6^2 - 4 \times 8 \times (-5) = 36 + 160 = 196$.

$\Delta > 0$, il y a donc deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-6+14}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6-14}{16} = \frac{-20}{16} = -\frac{5}{4}$$

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{5}{4}, \frac{1}{2} \right\}$

$$4) \quad x^2 + 10^{50} + 25 \times 10^{98} = 0.$$

$$x^2 = -(10^{50} + 25 \times 10^{98})$$

Le carré d'un nombre est toujours positif ou nul donc **cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.**

Exercice 25 :

1. On cherche les éventuelles racines de f, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$:

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

On peut résoudre cette équation du second degré en utilisant la formule :

$$-x = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$$

En identifiant les coefficients, on a $a=-1$, $b=6$, $c=-8$. On peut alors remplacer dans la formule pour obtenir :

$$-x = (-(6) \pm \sqrt{((6)^2 - 4(-1)(-8))}) / 2(-1)$$

On simplifie pour obtenir :

$$-x = 2 \pm \sqrt{6}$$

Ainsi, les éventuelles racines de f sont $x = 2 - \sqrt{6}$ et $x = 2 + \sqrt{6}$.

On peut alors factoriser $f(x)$ en utilisant les racines trouvées :

$$- f(x) = -(x - (2 - \sqrt{6}))(x - (2 + \sqrt{6}))$$

2. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f avec les axes du repère, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$:

$$- f(x) = -x^2 + 6x - 8 = 0$$

On peut résoudre cette équation en utilisant la factorisation trouvée dans la question 1 :

$$- -(x - (2 - \sqrt{6}))(x - (2 + \sqrt{6})) = 0$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont $x = 2 - \sqrt{6}$ et $x = 2 + \sqrt{6}$.

Pour trouver les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des x , on a $y = 0$:

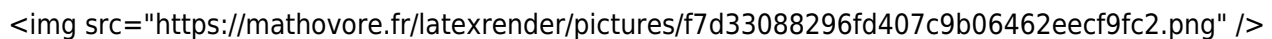
$$- \text{Pour } x = 2 - \sqrt{6}, \text{ on a } f(2 - \sqrt{6}) = 0 - (2 - \sqrt{6})^2 + 6(2 - \sqrt{6}) - 8 = -2\sqrt{6}$$

$$- \text{Pour } x = 2 + \sqrt{6}, \text{ on a } f(2 + \sqrt{6}) = 0 - (2 + \sqrt{6})^2 + 6(2 + \sqrt{6}) - 8 = 2\sqrt{6}$$

Ainsi, les coordonnées des points d'intersection sont :

$$- (2 - \sqrt{6} ; 0) \text{ et } (2 + \sqrt{6} ; 0)$$

3. Pour étudier la position relative des courbes de f et g , on peut représenter les deux fonctions sur le même graphique :



On peut alors remarquer que :

- g est une droite qui passe par le point $(0 ; 3)$ et qui a une pente de -1 (car son coefficient directeur est -1).

- f est une parabole dont l'expression est $-x^2 + 6x - 8$.

On peut alors observer les trois situations suivantes :

- Si f est au-dessus de g sur tout l'intervalle considéré, alors $f(x) > g(x)$ pour tout x , soit :



- Si f est en-dessous de g sur tout l'intervalle considéré, alors $f(x) < g(x)$ pour tout x , soit :



- Si f coupe g en un point et est au-dessus de g à gauche de ce point et en-dessous à droite, alors :



En étudiant la courbe, on observe que f et g se coupent en un point d'abscisse $x = 3$. Ainsi, on a les informations suivantes :

- f est au-dessus de g sur l'intervalle $]-\infty ; 3[$
- f est en-dessous de g sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$

On peut alors résumer ces informations en disant que :

- $f(x) > g(x)$ pour $x \in]-\infty ; 3[$
- $f(x) < g(x)$ pour $x \in]3 ; +\infty[$

Et que f et g se coupent en un point d'abscisse 3.

Exercice 26 :

1.

$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 - (\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{6}}{4} + \sqrt{18}$$

$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{6}{16}\right) - \frac{6}{4} - \sqrt{18} + \sqrt{18}$$

$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{6}{4} - \frac{6}{4} - \sqrt{18} + \sqrt{18}$$

$$P\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) = 0$$

2.

$$P(x) = 4\left(x - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)(x - b)$$

$$P(x) = 4\left(x^2 - bx - \frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}b\right)$$

$$P(x) = 4x^2 - 4bx - \sqrt{6}x + \sqrt{6}b$$

$$P(x) = 4x^2 - (4b + \sqrt{6})x + \sqrt{6}b$$

$$b = \sqrt{3}$$

Conclusion : $P(x) = 4\left(x - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)(x - \sqrt{3})$

Exercice 27 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 = 9$

$$9 > 0$$

Il y a deux solutions .

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

b) $x^2 = -3$

$$-3 < 0$$

Il y a aucune solution car le carré d'un nombre est positif ou nul .

c) $(x-5)^2 = 3$

$$3 > 0$$

Il y a donc deux solutions

$$x-5 = \sqrt{3} \text{ ou } x-5 = -\sqrt{3}$$

$$x = 5 + \sqrt{3} \text{ ou } x = 5 - \sqrt{3}$$

d) $(3x+5)^2 = (x+1)^2$

$$(3x+5)^2 - (x+1)^2 = 0$$

$$(3x+5+x+1)(3x+5-x-1) = 0$$

$$(4x+6)(2x+4) = 0$$

$$4x+6 = 0 \text{ ou } 2x+4 = 0$$

$$x = -\frac{6}{4} \text{ ou } x = -\frac{4}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = -2$$

$$e) (5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$$

$$(5x-4+3x+7)(5x-4-3x-7) = 0$$

$$(8x+3)(2x-11) = 0$$

$$x = -\frac{3}{8} \text{ ou } x = \frac{11}{2}$$

Exercice 28 :

On sait que l'aire du triangle ABC est égale à

$$- (AB \times AC) / 2 = (18 \times 8) / 2 = 72 \text{ m}^2$$

On cherche à trouver x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC, c'est-à-dire :

$$- (AE \times AD) / 2 = 36 \text{ m}^2$$

On peut exprimer AE en fonction de x en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABE :

$$- AE^2 + BE^2 = AB^2$$

$$- AE^2 + x^2 = 18^2$$

$$- AE^2 = 18^2 - x^2$$

De même, on peut exprimer AD en fonction de x en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ADC :

$$- AD^2 + DC^2 = AC^2$$

$$- AD^2 + (AC - AD)^2 = AC^2$$

$$- AD^2 + (8 - AD)^2 = 8^2$$

$$- AD^2 + 64 - 16AD + AD^2 = 64$$

$$- 2AD^2 - 16AD = 0$$

$$- AD^2 - 8AD = 0$$

$$- AD(AD - 8) = 0$$

Ainsi, on a $AD = 8$ ou $AD = 0$. On exclut la solution $AD = 0$, car dans ce cas le triangle ADE serait en fait une droite et son aire serait nulle. Ainsi, $AD = 8$.

On peut alors remplacer AE et AD par les expressions trouvées dans l'aire du triangle ADE pour obtenir une équation en x :

$$- (x \times \sqrt{18^2 - x^2}) / 2 = 36$$

$$- x \times \sqrt{18^2 - x^2} = 72$$

$$- x^2 (18^2 - x^2) = 72^2$$

$$- x^4 - 18^2 x^2 + 72^2 = 0$$

On peut résoudre cette équation du quatrième degré en remplaçant x^2 par y :

$$- y^2 - 18^2 y + 72^2 = 0$$

On peut résoudre cette équation du second degré en utilisant la formule :

$$- y = [18^2 \pm \sqrt{18^2 - 4 \times 72^2}] / 2$$

$$- y = [18^2 \pm \sqrt{18^2 - 20736}] / 2$$

$$- y = [18^2 \pm \sqrt{207360}] / 2$$

$$- y = 81 \text{ ou } y = 288$$

On retrouve alors les valeurs $x = \sqrt{81} = 9$ et $x = \sqrt{288} \approx 16,97$ m.

On peut exclure la solution $x = \sqrt{81} = 9$ m, car dans ce cas le point E se situe sur le coin du triangle ABC et le triangle ADE serait une droite et son aire serait nulle. Ainsi, la seule solution possible est $x = \sqrt{288} \approx 16,97$ m.