

Equations et inéquations

Exercice 1 :

On pose $f(x) = -3x^2 + 18x - 24$.

1. Trouver une racine évidente de f , c'est à dire une valeur α telle que $f(\alpha) = 0$.

Une racine évidente est $x=2$ car $f(2)=0$.

2. En déduire une factorisation de $f(x)$.

$$f(x) = -3(x-2)(x-a)$$

or si nous regardons le terme constant, il vaut $-3 \times (-2) \times a =$ et qui est égal à -24

$$6a = -24$$

$$a = \frac{-24}{6} = -4$$

Conclusion : $f(x) = -3(x-2)(x+4)$

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

cela revient à résoudre

$$(x-2)(x+4) \geq 0$$

Effectuez un tableau de signe,

Conclusion : $S =$

Exercice 2 :

a.

$$4x+3<7x$$

$$4x+3-3<7x-3$$

$$4x<7x-3$$

$$4x-7x<7x-3-7x$$

$$-3x<-3$$

$$\frac{-3x}{-3} > \frac{-3}{-3}$$

$$x > 1$$

$$S =$$

b. $4(x+3)>7x$

$$4x+12>7x$$

$$4x>7x-12$$

$$4x-7x>-12$$

$$-3x>-12$$

$$\frac{-3x}{-3} < \frac{-12}{-3}$$

$$x < 4$$

$$S =]-\infty; 4[$$

c.

$$4x+3 \geq 7x+8$$

$$4x-7x \geq 8-3$$

$$-3x \geq 5$$

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{5}{-3}$$

$$x \leq -\frac{5}{3}$$

$$S =]-\infty; -\frac{5}{3}]$$

d.

$$4x+3 \leq 7(x+8)$$

$$4x+3 \leq 7x+56$$

$$-3x \leq 53$$

$$x \geq -\frac{53}{3}$$

$$S = [-\frac{53}{3}; +\infty[$$

e.

$$4(x+3)>7(x+8)$$

$$4x+12>7x+56$$

$$-3x>44$$

$$x < -\frac{44}{3}$$

$$S =]-\infty; -\frac{44}{3}[$$

f.

$$-4x + 3 \geq 7x - 8$$

$$-11x \geq -11$$

$$x \leq 1$$

$$S =]-\infty; 1]$$

g.

$$-4(x+3) \geq 7(x-8)$$

$$-4x - 12 \geq 7x - 56$$

$$-11x \geq -44$$

$$x \leq 4$$

$$S =]-\infty; 4]$$

h.

$$-4(x-3) \leq 7x + 8$$

$$-4x + 12 \leq 7x + 8$$

$$-11x \leq -4$$

$$x \geq \frac{4}{11}$$

$$S = [\frac{4}{11}; +\infty[$$

i.

$$-4(-x+3) > 7(x-8)$$

$$4x - 12 > 7x - 56$$

$$-3x > -44$$

$$x < \frac{44}{3}$$

$$S =]-\infty; \frac{44}{3}[$$

j.

$$(2x-3)^2 < 4x^2 + 2x - 4$$

$$4x^2 - 12x + 9 < 4x^2 + 2x - 4$$

$$-14x < -13$$

$$x > \frac{13}{14}$$

$$S =]\frac{13}{14}; +\infty[$$

k.

$$-(2x-3)^2 \leq -4x^2 + 2x - 4$$

$$-(4x^2 - 12x + 9) \leq -4x^2 + 2x - 4$$

$$-4x^2 + 12x - 9 \leq -4x^2 + 2x - 4$$

$$10x \leq 5$$

$$x \leq \frac{5}{10}$$

$$x \leq 0,5$$

$$S =]-\infty ; 0,5]$$

l.

$$(-3x+2)(2-6x) \geq (2x-6)(1+9x)$$

$$-6x + 18x^2 + 4 - 12x \geq 2x + 18x^2 - 6 - 54x$$

$$-18x + 4 \geq -6 - 52x$$

$$34x \geq -10$$

$$x \geq -\frac{10}{34}$$

$$x \geq -\frac{5}{17}$$

$$S = [-\frac{5}{17}; +\infty[$$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation suivante :

$$(2-x)(x+3) = x^2 - 4$$

$$(2-x)(x+3) = x^2 - 2^2$$

$$(2-x)(x+3) = (x-2)(x+2)$$

$$(2-x)(x+3) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$(2-x)(x+3) + (2-x)(x+2) = 0$$

$$(2-x)[(x+3) + (x+2)] = 0$$

$$(2-x)[2x+5] = 0$$

C'est une équation produit.

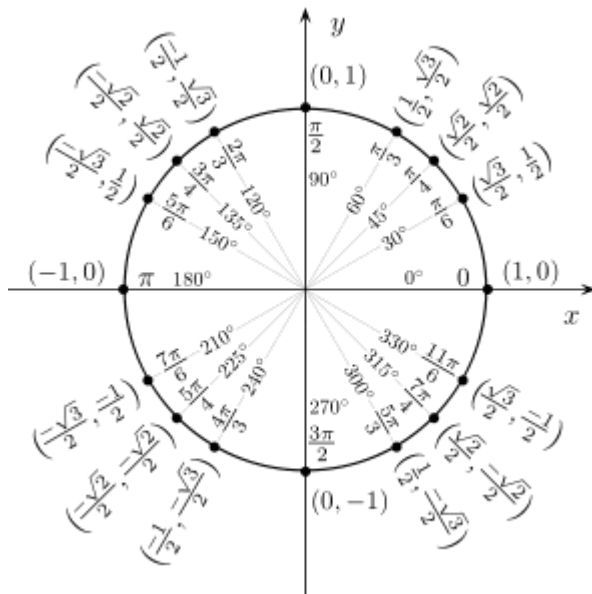
Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

$$2-x=0 \text{ ou } 2x+5=0$$

$$x=2 \text{ ou } x=-\frac{5}{2}$$

Conclusion : $S = \left\{-\frac{5}{2}; 2\right\}$.

Exercice 4 :



1. Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$. A l'aide du **cercle trigonométrique** (cercle unité), on a $\cos x = -1/2$ si $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

Résoudre dans l'intervalle $[4\pi; 6\pi[$, l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On remarque que cela revient à étudier sur $[0; 2\pi[$ et d'ajouter 4π $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ quand $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$ ou quand $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{14\pi}{3}$.

Exercice 5 :

Résoudre l'inéquation suivante : $\frac{(3x+2)(4x-1)}{5-2x} \geq 0$.

Pour résoudre il suffit de faire un tableau des signes et vérifier que les valeurs sont positives

ou nulles $3x+2$ s'annule en $-2/3$ $4x-1$ s'annule en $1/4$ $5-2x$ s'annule pour $x = 5/2$

or il est au dénominateur donc notre membre de gauche est défini sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

-infini	-2/3	1/4	5/2	+infini	
					0
+					

$4x-1$	-	0	+
$5-2x$	+	0	-

Ensuite nous pouvons conclure que l'**ensemble solution** est $S = \{]-\infty; -2/3] \cup [1/4; 5/2[\}$.

Exercice 6 :

Résoudre l'équation suivante :

$$x - \frac{x+4}{x+1} = 0$$

$$x = \frac{x+4}{x+1}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{x+4}{x+1}$$

On applique la règle du produit en croix :

$$x(x+1) = 1(x+4)$$

$$x^2 + x = x + 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

C'est une équation-produit :

$$x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Exercice 7 :

Donner la forme factorisée de cette forme canonique :

$$A(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$A(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

$$A(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$A(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$A(x) = -2\left[\left(x - \frac{4}{2}\right)\left(x - \frac{2}{2}\right)\right]$$

$$A(x) = -2(x-2)(x-1)$$

Exercice 8 :

Résoudre l'équation suivante :

$$4x^2 + 2(\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$$

$$4\left(x^2 + \frac{2(\sqrt{2}-1)x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{2(\sqrt{2}-1)x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4}\right)^2 - \left(\frac{(\sqrt{2}-1)}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4}\right)^2 - \left(\frac{2-2\sqrt{2}+1}{16}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4}\right)^2 - \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{16}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4}\right)^2 - \left(\frac{3-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{16}\right) = 0$$



$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{16}}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4} + \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{16}}\right)\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{16}}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4} + \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{4}\right)\left(x + \frac{(\sqrt{2}-1)}{4} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{4}\right) = 0$$

$x =$

Exercice 9 :

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

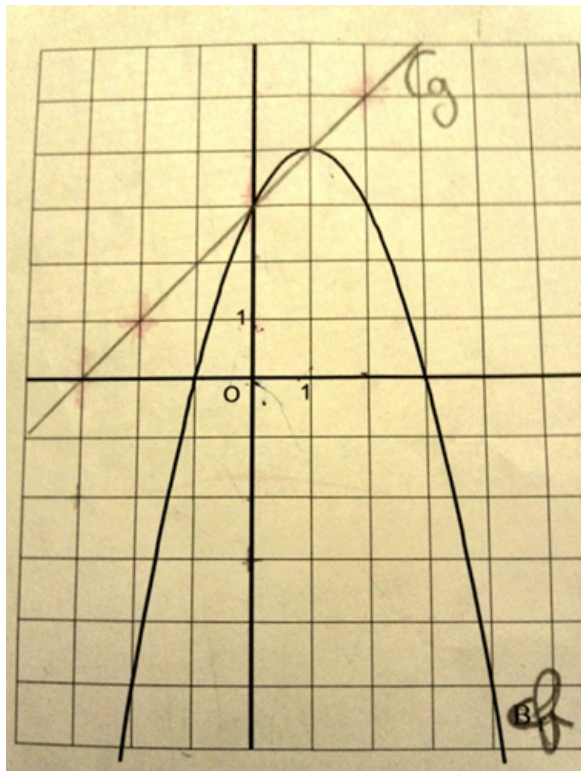
Cela revient à trouver l'abscisse du point d'intersection de ces deux courbes donc $x =$ 2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

Cela revient à trouver toutes les abscisses des points

de la courbe de la fonction f qui sont au-dessus

des points de la courbe de la fonction g .

$S =$



Exercice 10 :

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul

1. $(x+4)^2 = (x+4)(3x+1)$

$$(x+4)^2 - (x+4)(3x+1) = 0$$

$$(x+4)(x+4 - (3x+1)) = 0$$

$$(x+4)(x+4-3x-1) = 0$$

$$(x+4)(-2x+3) = 0$$

$x =$

2. $(2x+1)^2 = (x+5)^2$

$$(2x+1)^2 - (x+5)^2 = 0$$

$$(2x+1-x-5)(2x+1+x+5) = 0$$

$$(x-4)(3x+6) = 0$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -\frac{6}{3}$$

$$x =$$

$$3. \quad (x-2)^2 - 2 = 2$$

$$(x-2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)^2 - 2^2 = 0$$

$$(x-2-2)(x-2+2) = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = .$$

Exercice 11 :

Trouver la longueur x.

Dans les triangles AEF et ACB ,

$$\begin{cases} F \in (AB) \\ E \in (AC) \\ (FE) \parallel (BC). \end{cases} \quad \text{d'après la partie directe du théorème de Thalès :}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{x}{x+4} = \frac{1}{3}$$

$$3x = 1 \times (x+4)$$

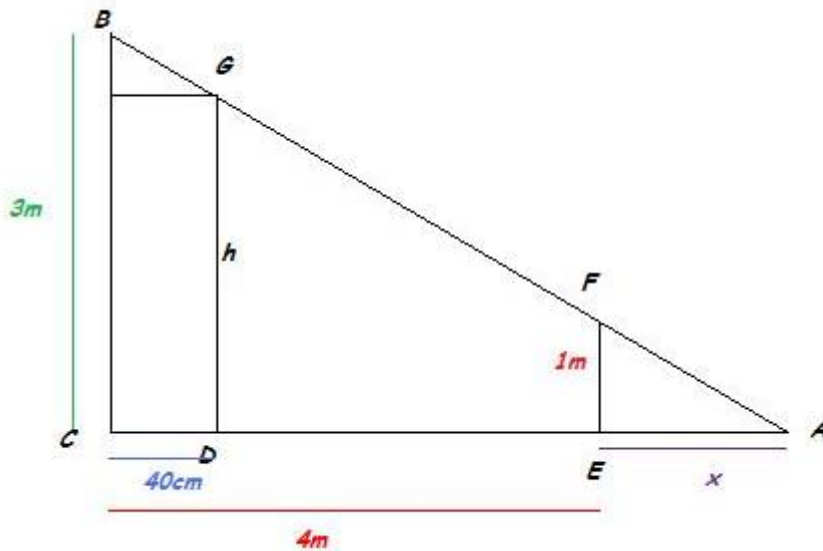
$$3x = x+4$$

$$3x - x = 4$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x =$$



Exercice 12 :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$2x-5 > \frac{4}{2x-5}$$

$$2x-5 > 0 \Leftrightarrow 2 > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > 2,5$$

Premier cas : si $x > 2,5$ alors $2x-5 > 0$.

$$\text{et } 2x-5 > \frac{4}{2x-5} \Leftrightarrow (2x-5)^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2 - 2^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-5-2)(2x-5+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-7)(2x-3) > 0$$

Second cas : si $x < 2,5$ alors $2x-5 < 0$

$$2x-5 > \frac{4}{2x-5} \Leftrightarrow (2x-5)^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow (2x-7)(2x-3) < 0$$



Conclusion : $S =$.

Exercice 13 :

Comparer les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (x-5)(2x+3) - (13x-90)$$

et

$$g(x) = (2x-5)^2 - 2(x-5)(x+5)$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 13x + 90 = 2x^2 - 20x + 75$$

et

$$g(x) = 4x^2 - 20x + 25 - 2(x^2 - 25)$$

$$g(x) = 4x^2 - 20x + 25 - 2x^2 + 50$$

$$g(x) = 2x^2 - 20x + 75$$

Conclusion : les fonctions f et g sont les mêmes.

Exercice 14 :

Soit le polynôme $P(x) = (2x-9)^2 - (4x-5)^2$.

1. Développer $P(x)$.

$$P(x) = 4x^2 - 36x + 81 - (16x^2 - 40x + 25)$$

$$P(x) = 4x^2 - 36x + 81 - 16x^2 + 40x - 25$$

$$P(x) = -12x^2 + 4x + 56$$

2. Factoriser $P(x)$.

Il fallait reconnaître l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

$$P(x) = (2x - 9 + 4x - 5)(2x - 9 - 4x + 5)$$

$$P(x) = (6x - 14)(-2x - 4)$$

$$P(x) = -4(3x - 7)(x + 2)$$

Exercice 15 :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $36x^2 + 36x + 9 = 0$.

$$9(4x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x =$$

2. $(3x + 4)^2 = (2x + 7)^2$.

$$(3x + 4)^2 - (2x + 7)^2 = 0$$

On utilise l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$(3x + 4 - 2x - 7)(3x + 4 + 2x + 7) = 0$$

$$(x - 3)(5x + 11) = 0$$

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

$$x - 3 = 0 \text{ ou } 5x + 11 = 0$$



Conclusion : $S = \left\{-\frac{11}{5}; 3\right\}$.

Exercice 16 :

Pour chacun des polynômes $P(x)$ suivants, réaliser le travail suivant :

1. Développer $P(x)$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) = 0$.
4. Donner le tableau de signes de $P(x)$.
5. Vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice (courbes).

1. $P(x) = (x+3)^2 - (5x-3)^2$.

$$P(x) = x^2 + 6x + 9 - (25x^2 - 30x + 9) = x^2 + 6x + 9 - 25x^2 + 30x - 9 = -24x^2 + 36x$$

2. Sous forme factorisée :

$$P(x) = -24x^2 + 36x = 4x(-6x + 9)$$

3.
 $P(x) = 4x(-6x + 9) = 0$

$$4x = 0 \text{ ou } -6x + 9 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$$

Exercice 17 :

Quel est le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) \dots (x^2 - 50^2) = 0$$

Justifier votre réponse .

$$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3) \dots (x-50)(x+50) = 0$$

C'est une équation produit, il y a $50 \times 2 = 100$ facteurs.

Conclusion : cette équation a 100 solutions distinctes.

Exercice 18 :

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $(2x+3)^2 = (4x-1)(x+5)$.

$$4x^2 + 12x + 9 = 4x^2 + 20x - x - 5$$

$$4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - 20x + x + 5 = 0$$

$$-7x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-14}{-7} = 2$$

2. $4(x+3)^2 = x^2 - 9$

$$4(x+3)^2 = (x-3)(x+3)$$

$$4(x+3)^2 - (x-3)(x+3) = 0$$

$$(x+3)[4(x+3) - (x-3)] = 0$$

$$(x+3)[4x+12-x+3] = 0$$

$$(x+3)(3x+15) = 0$$

C'est une équation produit.

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

$$x+3 = 0 \text{ ou } 3x+15 = 0$$

$$x = -3 \text{ ou } x = \frac{-15}{3} = -5$$

Conclusion : $S = \{-5; -3\}$

3. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$(2x+1)^2 = 0$ le carré d'un nombre est nul si et seulement le nombre est nul.

$$2x+1=0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Exercice 19 :

1) P1 et P2 sont les périmètres des rectangles R1 et R2, exprimés en cm.

a) Exprimer P1 et P2 en fonction de x.

$$P_1 = 2(x+3)$$

$$P_2 = 2(2+6-x) = 2(8-x)$$

b) Pour quelle valeur de x les périmètres P1 et P2 sont-ils égaux ?

$$P_1 = P_2$$



$$\Leftrightarrow 2x+6 = 16-2x$$

$$\Leftrightarrow 4x =$$

$$\Leftrightarrow x =$$

2) S_1 et S_2 sont les aires des rectangles R_1 et R_2 exprimées en cm^2 .

a) Exprimer S_1 et S_2 en fonction de x .

$$S_1 = 3x.$$

$$S_2 = 2(6-x)$$

b) Pour quelles valeurs de x a-t-on : $S_2 < S_1$?

$$S_2 < S_1$$

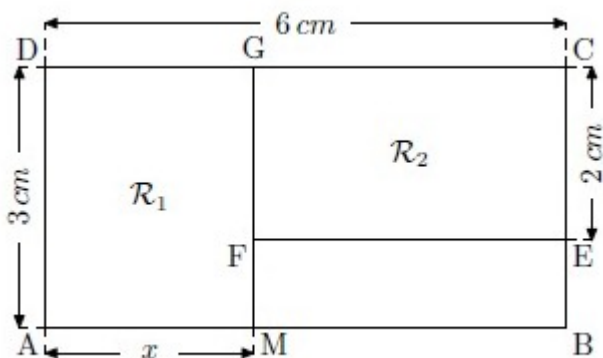
$$\Leftrightarrow 2(6-x) < 3x$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2x < 3x$$

$$\Leftrightarrow 12 < 5x$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow x > 2,4 \text{ cm.}$$



Exercice 20 :

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. 3 et -3 sont solutions de l'équation $x^2+2x-5=2(x+2)$.

$$x^2+2x-5-2x-4=0$$

$$x^2-9=0$$

$$(x-3)(x+3)=0$$

Conclusion : c'est VRAI .

2. L'équation $x^2=3x$ équivaut à l'équation $x=3$.

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

Conclusion : c'est FAUX

3. Pour tout $x>0$, $x+\frac{1}{x}\leq 2$.

C'est faux, prenez $x=2$

$$x+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2}=2,5>2$$

Exercice 21 :

Résoudre les équations suivantes :

$$a. 4x^2 - 3x = 0$$

$$x(4x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{4}$$

$$b. 2x^2 - x + 1 = x + 1$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Exercice 22:

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{(3x-2)(-4-5x)}{3x+1} \leq 0$$

sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, le numérateur s'annule pour les valeurs $x = 2/3$ et $x = -4/5$

Dressons un tableau de variations

x	-infini	-4/5	-1/3	2/3	+infini
---	---------	------	------	-----	---------

3x-2		-		0	+
------	--	---	--	---	---

-4-5x	+	0	-	-	-
-------	---	---	---	---	---

3x+1		-	0	+	+	+
------	--	---	---	---	---	---

D'après la règle des signes nous pouvons conclure que $[-4/5; -1/3] \cup [2/3, +\infty[$ est notre ensemble solution de l'inéquation.

Exercice 23 :

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{2x-1} < 2$.

$$\frac{1}{2x-1} - 2 < 0$$

$$\frac{1}{2x-1} - \frac{4x-2}{2x-1} < 0$$

$$\frac{-4x+1}{2x-1} < 0$$

x	-1/4	1/2
-4x-1	+ 0 -	-
2x-1	-	- 0 +
$\frac{(-4x-1)}{(2x-1)}$	- 0 +	-

Conclusion : $S =]-\infty; -\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

Exercice 24 :

1. Trouver deux entiers consécutifs dont le produit augmenté de 7 est égal au carré de l'entier suivant.

Notons x : le premier entier.

$$x(x+1)+7=(x+2)^2$$

$$x^2+x+7=x^2+4x+4$$



$$3x-3=0$$

$$x=1$$

Conclusion : les deux entiers recherchés sont 1 et 2.

2. Trouver les nombres dont le carré est égal au triple.

Soit x ce nombre

$$x^2=3x$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

C'est une équation produit, on applique la propriété :

$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$

3. Trouver les nombres dont le triple du carré est égal au double du nombre.

Soit x ce nombre.

$$3x^2 = 2x$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

C'est une équation produit, on applique la propriété :

$$x = 0 \text{ ou } 3x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

Exercice 25 :

1. Factoriser le polynôme $Q(x) = x^2 - 4x + 4$.

$$Q(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

2. Résoudre l'équation $\boxed{x^2 - 4x + 4 = 0}$.

en utilisant le 1.

$$(x - 2)^2 = (1 - x)(x - 2)$$

$$(x - 2)^2 - (1 - x)(x - 2) = 0$$

$$(x - 2)[(x - 2) - (1 - x)] = 0$$

$$(x - 2)(x - 2 - 1 + x) = 0$$

$$(x - 2)(2x - 3) = 0$$

C'est une équation produit.

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins est nul.

$$x-2=0 \text{ ou } 2x-3=0$$

$$x=2 \text{ ou } x=\frac{3}{2}$$

Conclusion : $S = \left\{\frac{3}{2}; 2\right\}$

Exercice 26 :

Soit le polynôme $P(x) = (3x-5)^2 - (x+3)^2$.

1. Montrer que $P(x) = 4(x-4)(2x-1)$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 9x^2 - 30x + 25 - (x^2 + 6x + 9) \\ &= 9x^2 - 30x + 25 - x^2 - 6x - 9 \\ &= 8x^2 - 36x + 16 \end{aligned}$$

et



Conclusion : $P(x) = 4(x-4)(2x-1)$

2. Donner le tableau de signes de $P(x)$.

P est négatif sur $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

3. Résoudre l'inéquation $P(x) \leq 0$.

$S =$

Exercice 27 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $25x^2 - 70x + 49 = 0$.

$$(5x+7)^2 = 0$$

Le carré d'un nombre est nul si et seulement si ce nombre est nul.

$$5x+7=0$$

$$x = -\frac{7}{5}$$

$$2. \quad 14x-21=(2x-3)^2 .$$

$$7(2x-3)-(2x-3)^2=0$$

$$(2x-3)[7-(2x-3)]=0$$

$$(2x-3)[7-2x+3]=0$$

$$(2x-3)(10-2x)=0$$

C'est une équation produit, on applique la propriété :

$$2x-3=0 \text{ ou } 10-2x=0$$

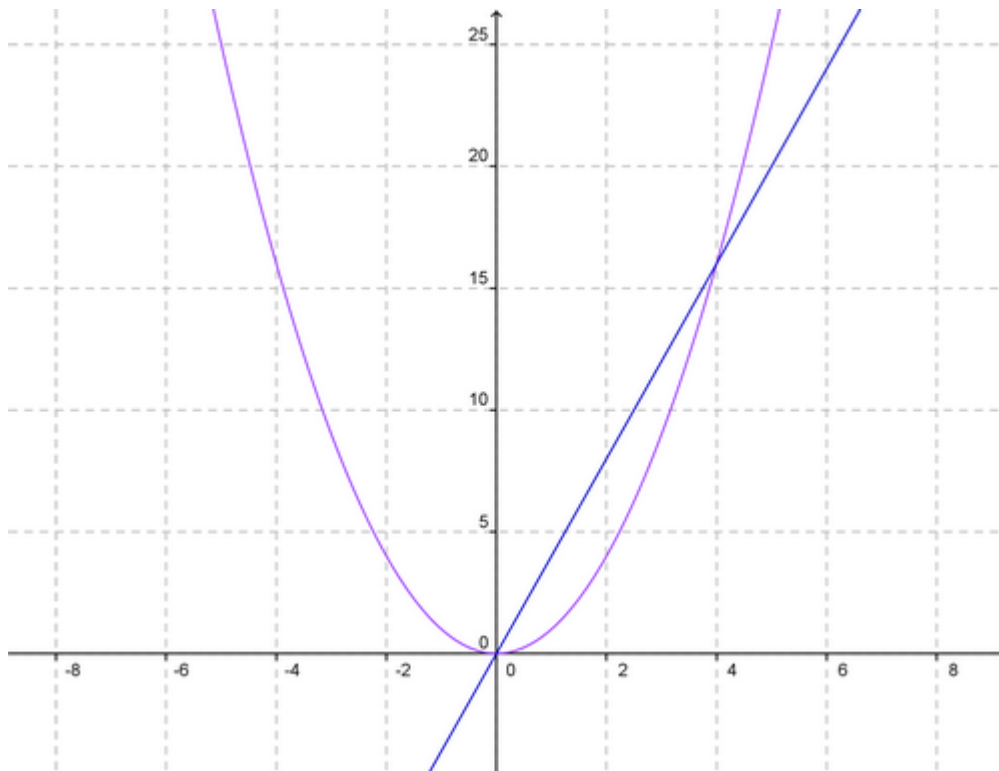
$$x=\frac{3}{2} \text{ ou } x=\frac{10}{2}=5$$

Exercice 28 :

1. Représenter dans un même repère orthonormal :

- la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

- la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4x$.



2. Utiliser ces représentations graphiques pour résoudre graphiquement :

a. l'équation $x^2 = 4x$.

$$S = \{0;4\}$$

b. l'inéquation $x^2 \leq 4x$.

$$S = [0;4]$$

3. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

C'est une équation produit.

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.

$$x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$x =$$

Exercice 30 :

En utilisant le tableau de signe, résoudre :

$$(5x-3)(4-x) > 0$$

$$5x-3=0 ; 4-x=0$$

$$x = \frac{3}{5} ; x = 4$$

	$\frac{3}{5}$ 4		
5x-3	-	+	+
4-x	+	+	-
(5x-3)(4-x)	-	+	-

Conclusion : $S =]\frac{3}{5}; 4[$.

Exercice 32 :

Un rectangle est appelé **rectangle d'or** lorsque :

$$\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}} = \frac{\text{demi-perimetre}}{\text{longueur}}.$$

On considère un rectangle d'or de côtés 1 et x , avec $x > 1$. 1. Montrer que x vérifie l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

La largeur mesure 1

La longueur mesure x .

Le demi-périmètre vaut $x + 1$

Puisque ce rectangle est un rectangle d'or, nous avons :

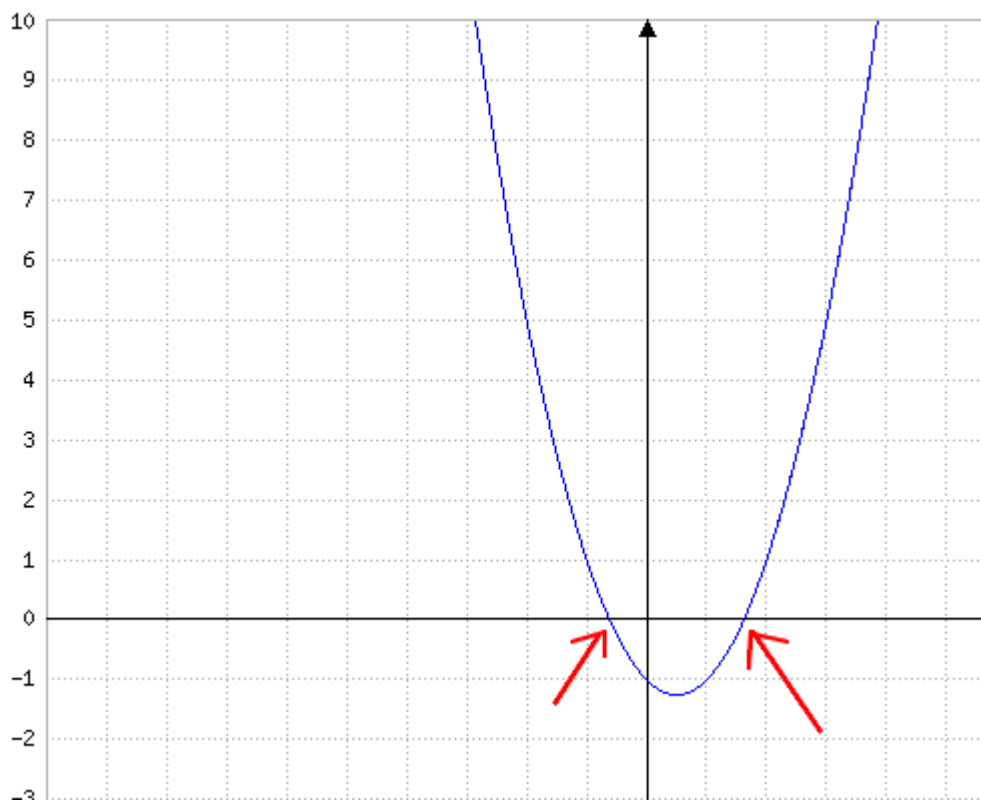
$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}$$

$$x^2 = 1 \times (x+1)$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

2. Dresser le tableau de valeur, puis la courbe représentative de cette fonction.



3. Résoudre graphiquement l'équation de la question 1 (au dixième près).

Nous trouvons $x \simeq 1,6$ et $x \simeq -0,6$.

4.Vérifier que le réel $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de cette équation et en déduire les dimensions du rectangle d'or.

$$x^2 - x - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{-2-2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{4}$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5}-4}{4}$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{1+5-2-4}{4}$$

$$x^2 - x - 1 = \frac{0}{4}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Conclusion :

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est bien solution de cette équation et ce rectangle d'or a pour largeur 1 et pour longueur $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Remarque : Le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé **nombre d'or**.

Exercice 33 :

$$-2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1}{-2}$$

$$x =$$

x	1/2	
x^2+3	+	+
$-2x+1$	+	-
A(x)	+	-

Conclusion : A est positive sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$.

Exercice 34 :

f est la fonction définie sur R par $f(x)=(3x+2)(4-x)$. C est la courbe représentative de f dans un repère.

a) Calculer les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

$$f(x) = 0$$

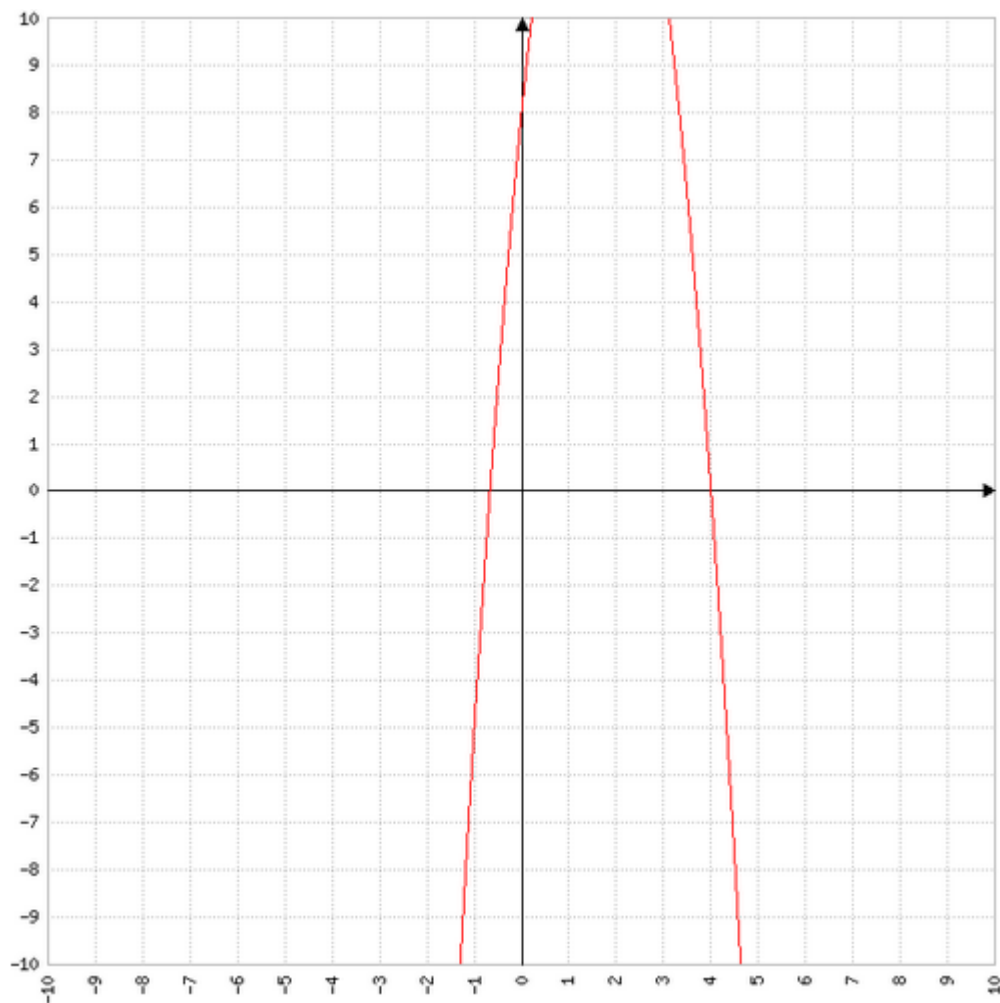
$$(3x+2)(4-x) = 0$$

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins est nul .

$$3x+2=0 \text{ ou } 4-x=0$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 4$$

b) Représenter graphiquement la fonction f à l'écran d'une calculatrice.



Conjecturer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

f est positive sur $[-\frac{2}{3}; 4]$ et négative sur le reste .

Exercice 35 :

Soit $A = (1-6x)^2 - (5x-3)^2$.

1) Développer et réduire A .

$$A = 1 - 12x + 36x^2 - (25x^2 - 30x + 9)$$

$$A = 1 - 12x + 36x^2 - 25x^2 + 30x - 9$$

$A =$

2) Calculer A pour $x = -1$ puis pour $x = \frac{1}{3}$.

$$A = 11 \times (-1)^2 + 18 \times (-1) - 8$$

$$A = 11 - 18 - 8$$

$$A =$$

3) Factoriser A.

$$A = (1 - 6x + 5x - 3)(1 - 6x - 5x + 3)$$

$$A =$$

4) Résoudre l'équation $A=0$.

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs au moins est nul .

$$-x - 2 = 0 \text{ ou } -11x + 4 = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = \frac{4}{11}$$

Exercice 36 :

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB=9\text{cm}$ et $AC=12\text{cm}$. Où placer le point M sur l'hypoténuse du triangle de façon que la somme des distances de M aux deux autres côtés du triangle soit égale à 10cm?

Nous avons $x+y=10$

Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après la partie directe du théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 9^2 + 12^2$$

$$BC^2 = 81 + 144$$

$$BC^2 = 225$$

$$BC = \sqrt{225}$$

$$BC = 15 \text{ cm}$$

$$BE = 8 - x$$

Appliquons le théorème de Thalès dans BEM et BAC .

$$\frac{8-x}{8} = \frac{y}{12}$$

$$\frac{8-x}{8} = \frac{10-x}{12}$$

$$12(8-x) = 8(10-x)$$

$$96 - 12x = 80 - 8x$$

$$-12x + 8x = 80 - 96$$

$$-4x = -16$$

$$x = \frac{-16}{-4}$$

$$x =$$

Appliquons le théorème de Thalès dans CDM et CAB .

$$\frac{CM}{CB} = \frac{DM}{AB}$$

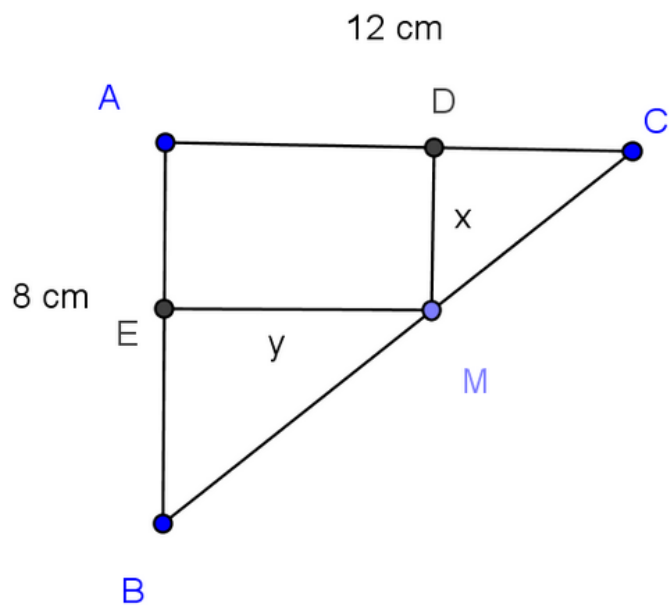
$$\frac{CM}{15} = \frac{4}{8}$$

$$CM = \frac{4 \times 15}{8}$$

$$CM = \frac{60}{8}$$

$$CM =$$

Conclusion : Le point M doit être situé au milieu du segment [BC] .



Exercice 37 :

Résoudre les équations :

Propriété : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul .

1. $7x^2 - 5x = 0$

$$x(7x-5) = 0$$



2. $\frac{1}{3}x^2 = 5x$

$$\frac{1}{3}x^2 - 5x = 0$$

$$x(\frac{1}{3}x - 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 15$$

3. $(-3x+1)(x-4) = 2x(x-4)$

$$(-3x+1)(x-4) - 2x(x-4) = 0$$

$$(x-4)(-3x+1-2x) = 0$$

$$(x-4)(-5x+1)=0$$

$$x=4 \text{ ou } x=\frac{1}{5}$$

$$4. (2x+3)(x+5) = 15$$

$$(2x+3)(x+5)-15=0$$

$$2x^2+10x+3x+15-15=0$$

$$2x^2+13x=0$$

$$x(2x+13)=0$$

$$x=0 \text{ ou } x=-\frac{13}{2}$$

$$5. (-3x+2)(x+1) = 2$$

$$(-3x+2)(x+1)-2=0$$

$$-3x^2-3x+2x+2-2=0$$

$$-3x^2-x=0$$

$$-x(3x+1)=0$$

$$x=0 \text{ ou } x=-\frac{1}{3}$$

Exercice 38 :

Résoudre l'équation suivante : $x \neq 2$ et $x \neq -1$

$$\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+4}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3(x+1)}{(x-2)(x+1)} - \frac{1 \times (x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+4}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3x+3-x-2}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+4}{(x+1)(x-2)}$$

$$3x+3-x-2=x+4$$

$$2x+1=x+4$$

$$2x - x = 4 - 1$$

$$x =$$

Exercice 39 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $7x^2 - 5x = 0$

$$x(7x - 5) = 0$$

$$x =$$

2. $\frac{1}{3}x^2 = 5x$

$$x^2 = 3 \times 5x$$

$$x^2 = 15x$$

$$x^2 - 15x = 0$$

$$x(x - 15) = 0$$

$$x =$$

3. $(-3x + 1)(x - 4) = 2x(x - 4)$

$$(x - 4)(-3x + 1 - 2x) = 0$$

$$(x - 4)(-5x + 1) = 0$$

$$x =$$

4. $(2x + 3)(x + 5) = 15$

$$2x^2 + 10x + 3x + 15 = 15$$

$$2x^2 + 13x = 0$$

$$x(2x + 13) = 0$$

$$x =$$

5. $(-3x + 2)(x + 1) = 2$

$$-3x^2 - 3x + 2x + 2 = 2$$

$$-3x^2 - x = 0$$

$$x(-3x-1)=0$$

$$x =$$

Exercice 40 :

Résoudre les équations après avoir effectué une factorisation :

1. $x^2 - 3x = 0$

$$x(x-3)=0$$

$$x =$$

2. $-2x^2 + 8x = 0$

$$2x(-x+4)=0$$

$$x =$$

3. $3x^2 = 18x$

$$3x^2 - 18x = 0$$

$$3x(x-6)=0$$

$$x =$$

4. $(2x-1)(x+1) - (2x-1)(3x-5) = 0.$

$$(2x-1)(x+1+3x-5)=0$$

$$(2x-1)(4x-4)=0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1.$$

Exercice 41 :

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{1}{x+1} < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} - (x+1) < 0$$

$$\frac{1-(x+1)^2}{x+1} < 0$$

$$\frac{(1-x-1)(1+x+1)}{x+1} < 0$$

$$\frac{-x(x+2)}{x+1} < 0$$

Faites un tableau de signes et montrer que :

$$S =$$

Exercice 42 :

1. En utilisant le même dénominateur pour additionner les fractions, on obtient :

$$\frac{6(x+1) + 4(3x-1)}{12} = \frac{5x-2}{12}$$

En simplifiant, on trouve : $18x + 2 = 5x - 2$

En isolant x, on obtient : $x = -\frac{2}{13}$

2.

En développant, on obtient l'équation : $2x^2 - x - 2x + 1 + 2x^2 - x - 2 = 0$

En simplifiant, on trouve : $4x^2 - 2x - 2 = 0$

On divise par 2 pour simplifier l'équation : $2x^2 - x - 1 = 0$

On peut résoudre cette équation en utilisant la formule quadratique :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \quad x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

On trouve deux solutions : $x = 1$ et $x = -\frac{1}{2}$

3. En multipliant les deux membres de l'équation par $(x - 2)$, on obtient : $2x + 1 = \frac{2(x-2)}{3}$.

On développe et on simplifie pour obtenir : $6x + 3 = 2x - 4$.

En isolant x, on obtient : $x = -\frac{7}{2}$

4. On peut multiplier les deux membres de l'équation par $(x - 5)(x + 1)$ pour simplifier :

$$x^2 - 1 = \frac{(x - 1)(x - 5)(x + 1)}{x + 5}.$$

On peut maintenant multiplier les deux membres de l'équation par $x + 5$ pour se débarrasser des dénominateurs :

$$(x^2 - 1)(x + 5) = (x - 1)(x - 5)(x + 1).$$

En développant les deux membres, on obtient une équation polynomiale qu'on peut simplifier en regroupant les termes : $6x^2 - 6x - 6 = 0$.

On peut diviser par 6 pour simplifier : $x^2 - x - 1 = 0$.

On peut résoudre cette équation en utilisant la formule quadratique :

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} \text{ ou } x = -1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = -1.$$

On trouve trois solutions : $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $x = -1$

Exercice 43 :

1. a) En développant $A(x)$, on obtient : $A(x) = 3(x^2 - x - 12) + 2(3x^2 - 13x + 12)$.

En simplifiant, on trouve : $A(x) = 11x^2 - 35x - 12$.

Pour factoriser, on cherche deux nombres qui multipliés donnent -132 et qui additionnés donnent -35. On trouve que ces nombres sont -44 et +9.

On peut donc factoriser $A(x)$ en : $A(x) = (11x + 9)(x - 4)$

b) En développant $B(x)$, on obtient : $B(x) = 4x^2 - 10x - 4$.

Pour factoriser, on peut commencer par diviser tous les termes par 2 pour simplifier :

$$B(x) = 2(x^2 - 5x - 2).$$

On cherche deux nombres qui multipliés donnent -2 et qui additionnés donnent -5.

On trouve que ces nombres sont -1 et +2.

On peut donc factoriser B(x) en : $B(x) = 2(x - 1)(x - 2)$

2. a) Pour résoudre A(x) = -4, on peut d'abord factoriser A(x) : $A(x) = (11x + 9)(x - 4)$.

On sait que le produit de deux nombres est égal à -4 si et seulement si l'un de ces nombres est positif et l'autre est négatif.

On peut donc résoudre l'équation en séparant les cas : $11x + 9 > 0$ et $x - 4 < 0$, ou $11x + 9 < 0$ et $x - 4 > 0$ On trouve les deux intervalles de solutions :

$$x \in]-\infty; -\frac{9}{11}[\cup]4; +\infty[$$

b) Pour résoudre B(x) = 0, on peut utiliser la factorisation de B(x) : $2(x - 1)(x - 2) = 0$.

On utilise la propriété que le produit de deux facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

On obtient donc deux solutions : $x = 1$ ou $x = 2$.

c) Pour résoudre B(x) = A(x), on peut d'abord mettre les deux expressions au même dénominateur :

$$2(x - 1)(x - 2) = (11x + 9)(x - 4)$$

On développe et on simplifie pour obtenir une équation polynomiale de degré 2 :

$$11x^2 - 5x - 15 = 0.$$

On peut diviser par 11 pour simplifier :

$$x^2 - \frac{5}{11}x - \frac{15}{11} = 0.$$

On peut résoudre cette équation en utilisant la formule quadratique :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 15}}{22}$$

On trouve deux solutions :

$$x = \frac{5 + \sqrt{85}}{22} \text{ et } x = \frac{5 - \sqrt{85}}{22}$$