

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 : Équations homogènes du premier ordre

Résolvez les équations suivantes sur l'intervalle indiqué. Dans chaque cas, vérifiez votre résultat en dérivant.

1. $y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' = 2x y$ sur $\mathbb{R}$.
3. $(1 + x^2) y' + 2x y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. $x y' - 3y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
5. $y' + \tan(x) y = 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
6. Déterminez la solution de l'équation de la question 4 qui vérifie $y(2) = 16$.

Exercice 2 : Seconds membres usuels au premier ordre

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en cherchant une solution particulière de la même forme que le second membre.

1. $y' + 2y = 4x + 2$.
2. $y' - y = e^{2x}$.

3. $y' + y = e^{-x}$.
4. $y' + y = 2x + 3e^{-x}$, en utilisant le principe de superposition.
5. $y' - 2y = 5 \sin x$, en passant par l'équation complexe $z' - 2z = 5 e^{ix}$.

Exercice 3 : Un problème de Cauchy du premier ordre

On considère le problème de Cauchy $y' + y = \cos x$, $y(0) = 1$, posé sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminez deux réels α et β tels que $x \rightarrow \alpha \cos x + \beta \sin x$ soit solution de $y' + y = \cos x$.
2. Donnez la solution générale de cette équation.
3. Déterminez l'unique solution du problème de Cauchy.
4. Montrez que cette solution se rapproche, quand $x \rightarrow +\infty$, d'une fonction périodique dont vous donnerez l'amplitude.

Exercice 4 : Variation de la constante

Résolvez les équations suivantes par la méthode de la variation de la constante.

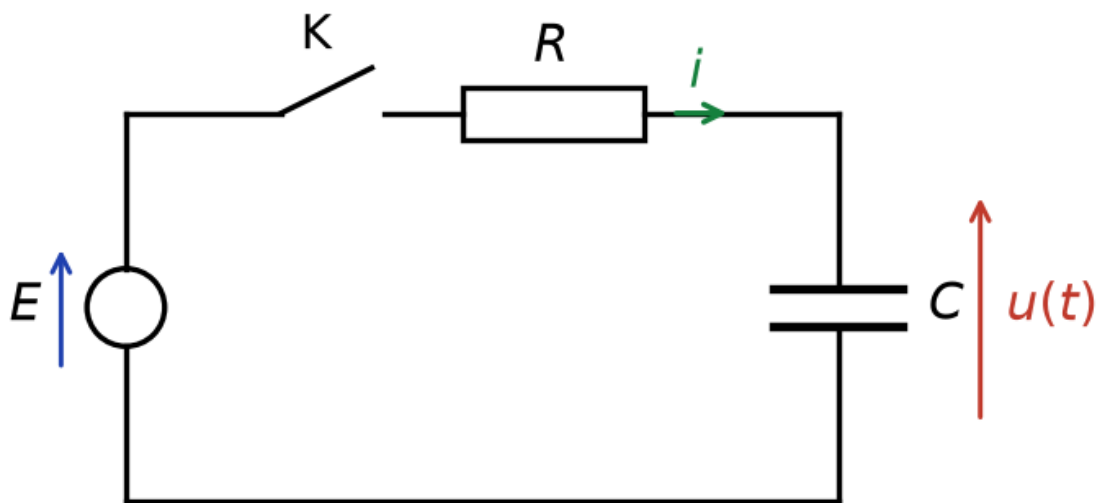
1. $x y' - y = x^2$ sur $]0, +\infty[$. Déterminez ensuite la solution telle que $y(1) = 3$.
2. $y' + 2x y = x e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\cos(x) y' + \sin(x) y = 1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminez ensuite la solution telle que $y(0) = 2$.

Exercice 5 : Coefficients variables et dérivée d'un produit

1. Vérifiez que, pour toute fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$, $((1 + e^x) y)' = (1 + e^x) y' + e^x y$.
Déduisez-en les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(1 + e^x) y' + e^x y = 1 + e^x$.
2. Vérifiez que la fonction $g : x \rightarrow \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.
3. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + x^2) y' + x y = 1$ par variation de la constante.
4. Déterminez la solution qui vérifie $y(0) = 0$, puis montrez qu'elle est impaire.

Exercice 6 : Charge et décharge d'un condensateur

On étudie le circuit ci-dessous. Il comprend un générateur de tension constante $E = 5 \text{ V}$, une résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$ et un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$, initialement déchargé. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur et $i(t) = C u'(t)$ l'intensité.



1. À l'aide de la loi des mailles $E = Ri + u$, établissez l'équation différentielle vérifiée par u . Calculez la constante de temps $\tau = RC$ en secondes.
2. Déterminez $u(t)$ pour $t \geq 0$.
3. À quel instant la tension atteint-elle 99 % de sa valeur finale ? Donnez une valeur approchée.
4. Montrez que la tangente à la courbe de u en $t = 0$ coupe l'asymptote en $t = \tau$.
5. Le condensateur étant chargé sous la tension E , on remplace le générateur par un fil à un nouvel instant pris comme origine des temps. Établissez la nouvelle équation, puis donnez $u(t)$. Au bout de combien de temps la tension est-elle divisée par deux ?

Exercice 7 : Mélange dans une cuve

Une cuve de 500 litres contient au départ 100 litres d'eau pure. À partir de l'instant $t = 0$, exprimé en minutes, on y verse 2 litres par minute d'eau salée à 30 grammes par litre. Simultanément, on soutire 1 litre par minute du mélange, que l'on suppose homogène à chaque instant. On note $q(t)$ la masse de sel, en grammes, contenue dans la cuve.

1. Exprimez le volume $V(t)$ de liquide dans la cuve. À quel instant la cuve est-elle pleine ?
2. Justifiez que q vérifie $q'(t) = 60 - \frac{q(t)}{100+t}$ sur $[0, 400]$.
3. Résolvez cette équation avec la condition $q(0) = 0$.
4. Calculez la concentration $c(t) = q(t)/V(t)$ à l'instant $t = 100$, puis au moment où la cuve est pleine.
5. Déterminez la limite de $c(t)$ si la cuve était infiniment grande. Interprétez ce résultat.

Exercice 8 : Raccordement de solutions

Dans cet exercice, les équations ne sont pas normalisables en 0. On cherche des solutions dérivables sur

$\mathbb{R}$ tout entier.

1. Résolvez l'équation $x y' - 2y = 0$ sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$.
2. Déterminez toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de $x y' - 2y = 0$.
3. Même question pour l'équation $x y' + y = 0$.
4. Montrez que le problème $x y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$, et que le problème $x y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$ n'en admet aucune. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème de Cauchy ?

Exercice 9 : Équations homogènes du second ordre

Résolvez les équations suivantes sur $\mathbb{R}$. Sauf mention contraire, on cherche les solutions à valeurs réelles.

1. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
4. $y'' + 9y = 0$.
5. Déterminez les solutions à valeurs complexes de $y'' - 2y' + 2y = 0$, puis retrouvez ses solutions réelles en prenant des parties réelles.
6. Déterminez les solutions à valeurs complexes de $y'' - 2i y' - y = 0$.

Exercice 10 : Retrouver l'équation à partir des solutions

1. Déterminez les réels a et b tels que les fonctions $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow x e^x$ soient toutes

deux solutions de $y'' + a y' + b y = 0$.

- Déterminez les réels a et b tels que $x \rightarrow e^{-x} \cos(3x)$ soit solution de $y'' + a y' + b y = 0$. Écrivez alors toutes les solutions réelles de cette équation.
- Existe-t-il des réels a et b tels que $x \rightarrow e^x$, $x \rightarrow e^{2x}$ et $x \rightarrow e^{3x}$ soient toutes trois solutions de $y'' + a y' + b y = 0$?

Exercice 11 : Second membre polynomial

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- $y'' + y' - 2y = 2x^2$.
- $y'' - y' = x$. Expliquez pourquoi on cherche ici une solution particulière de degré 2.
- $y'' + 4y = 8x^2$.

Exercice 12 : Second membre exponentiel et résonance

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en précisant à chaque fois si l'exposant du second membre est racine de l'équation caractéristique.

- $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.
- $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
- $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
- Trouvez une solution particulière complexe de $y'' + 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$. Déduisez-en les solutions réelles de $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x$.

Exercice 13 : Second membre trigonométrique

1. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 2y = 5 \cos x$.
2. Déduisez du calcul précédent les solutions de $y'' + 2y' + 2y = 5 \sin x$.
3. Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 4y = \sin(2x)$.
4. Comparez le comportement des solutions quand $x \rightarrow +\infty$ dans les questions 1 et 3.

Exercice 14 : Principe de superposition

Résolvez sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes en découpant le second membre.

1. $y'' - y = 2x + 4e^x + 2\cos x$.
2. $y'' - y = \operatorname{ch} x$.
3. $y'' - y = \sin^2 x$. On pourra linéariser $\sin^2 x$.

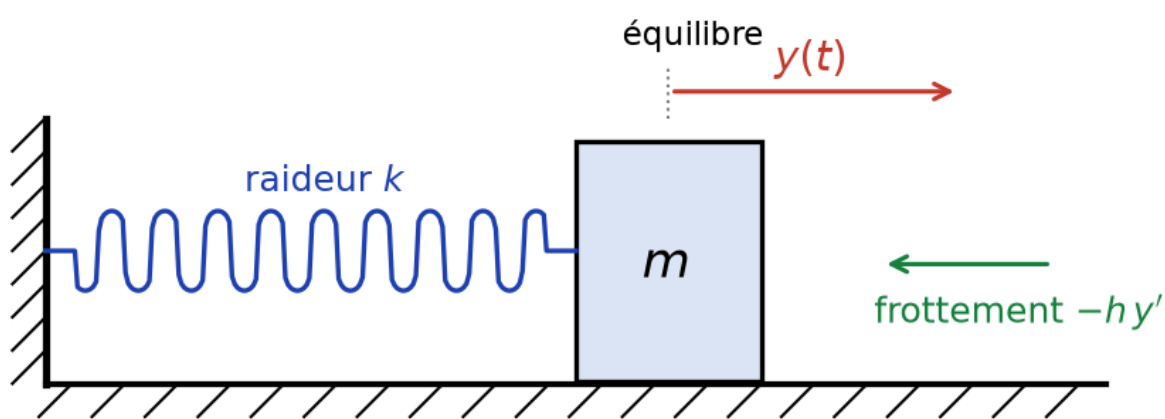
Exercice 15 : Problèmes de Cauchy du second ordre

Déterminez l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de chacun des problèmes suivants.

1. $y'' + y = x$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
2. $y'' + 2y' + 5y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
3. $y'' - 4y = 4$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$.
4. $y'' - 2y' + y = e^x$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 16 : Oscillateur amorti et ses trois régimes

Une masse $m = 1$ kg glisse sur un support horizontal. Elle est reliée à un mur par un ressort de raideur $k = 4$ N/m et subit une force de frottement fluide $-h y'$, où $h > 0$ s'exprime en kg/s. On note $y(t)$ l'écart à la position d'équilibre, en mètres. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse sans vitesse depuis $y(0) = 1$.



1. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrez que $y'' + h y' + 4y = 0$.
2. Discutez, selon la valeur de h , la nature des racines de l'équation caractéristique.
3. Déterminez $y(t)$ pour $h = 2$, pour $h = 4$ et pour $h = 5$.
4. Pour $h = 2$, on note $T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Calculez $y(kT)$ pour tout entier naturel k .
5. Pour $h = 5$, montrez que la masse ne repasse jamais par la position d'équilibre.

Exercice 17 : Régime forcé d'un circuit RLC

Dans un circuit RLC alimenté par une tension sinusoïdale, et avec des unités bien choisies, la charge y du condensateur vérifie

$$y'' + y' + y = \cos(\omega t),$$

où $\omega > 0$ est la pulsation imposée par le générateur.

1. Résolvez l'équation homogène. Montrez que toutes ses solutions tendent vers 0 en $+\infty$.
2. Déterminez une solution particulière y_ω de la forme $t \rightarrow \operatorname{Re}(K e^{i\omega t})$, avec $K \in \mathbb{C}$.
Exprimez son amplitude $A(\omega) = |K|$.
3. Montrez que, pour toute solution y , on a $y(t) - y_\omega(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Interprétez.
4. Étudiez les variations de A sur $]0, +\infty[$. Pour quelle pulsation l'amplitude est-elle maximale ?
5. Explicitez y_ω lorsque $\omega = 1$.

Exercice 18 : Unicité et comparaison des solutions

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I , et $(E): y' + a(x)y = b(x)$.

1. Montrez qu'une solution de l'équation homogène qui s'annule en un point de I est nulle sur I .
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions réelles de (E) telles que $y_1(x_0) < y_2(x_0)$ pour un $x_0 \in I$. Montrez que $y_1(x) < y_2(x)$ pour tout $x \in I$.
3. Soit y la solution sur $\mathbb{R}$ de $y' + y = x^2$ telle que $y(0) = 1$. Vérifiez que $x \rightarrow x^2 - 2x + 2$ est solution de l'équation. Sans calculer y , montrez que $y(x) < x^2 - 2x + 2$ pour tout réel x . Contrôlez ensuite en calculant y .
4. Montrez que deux solutions de $y'' + y = 0$ peuvent avoir des courbes qui se coupent sans être égales. Quelle condition supplémentaire assure l'égalité de deux solutions d'une équation du second ordre ?

Exercice 19 : Équation d'Euler par changement de variable

On veut résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $(E): x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3$. Pour une fonction y deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on pose $z(t) = y(e^t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimez $y'(x)$ et $y''(x)$ à l'aide de $z'(\ln x)$ et $z''(\ln x)$.
2. Montrez que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $z'' - 3z' + 2z = e^{3t}$.
3. Résolvez cette dernière équation, puis déduisez-en les solutions de (E) .
4. Déterminez la solution de (E) telle que $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 20 : Équations fonctionnelles

1. Déterminez toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x ,
$$f(x) = 1 + \int_0^x (f(t) + t) dt.$$
2. Déterminez toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(-x)$ pour tout réel x .

Exercice 21 : Problème : battements et résonance

Soient $\omega > 0$ et $\Omega > 0$ deux réels distincts. On étudie le problème de Cauchy

$$(P_\Omega): y'' + \omega^2 y = \cos(\Omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

1. Montrez que l'unique solution de (P_Ω) est $y_\Omega(t) = \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \Omega^2}$.
2. Écrivez $y_\Omega(t)$ sous la forme d'un produit de deux sinus.
3. On prend $\omega = 10$ et $\Omega = 9$. Décrivez l'allure de y_Ω : pulsation rapide, enveloppe, amplitude maximale et période de l'enveloppe. Ce phénomène s'appelle les battements.
4. Pour t fixé, calculez $\lim_{\Omega \rightarrow \omega} y_\Omega(t)$.
5. Résolvez directement le problème de Cauchy $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega t)$, $y(0) = y'(0) = 0$, et comparez avec la question précédente.
6. Montrez que chaque y_Ω est bornée sur $\mathbb{R}$, alors que la solution de la question 5 ne l'est pas.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [équations différentielles linéaires, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#), [Primitives et calcul intégral](#)
- Chapitre précédent : [Primitives et calcul intégral](#)
- Chapitre suivant : [Nombres réels et suites numériques](#)

- Le même thème en L1 : [équations différentielles, exercices de maths en L1](#)
- Le même thème en maths spé : [équations différentielles linéaires, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)