

Équations différentielles linéaires

Exercice 1 : Mise sous forme de système et forme intégrale

Les questions sont indépendantes.

1. Écrire l'équation $x''' - t x' + e^t x = \sin t$ sous la forme $X' = A(t) X + B(t)$, en précisant X , $A(t)$ et $B(t)$.
2. Écrire la forme intégrale du problème de Cauchy formé par cette équation et les conditions $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$.
3. On considère l'équation $(t^2 - 4) x'' + t x' + \ln(t) x = 0$. Déterminer le plus grand intervalle J contenant 1 sur lequel le théorème de Cauchy linéaire s'applique.
4. Soit x une solution sur J telle que $x(1) = x'(1) = 0$. Que peut-on dire de x ?

Exercice 2 : Deux équations scalaires d'ordre 1

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x' + 2t x = 2t e^{-t^2}$, puis déterminer la solution telle que $x(0) = 1$. Étudier sa limite en $+\infty$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + t^2) x' + t x = 1$ par la méthode de variation de la constante. Donner la solution telle que $x(0) = 0$.

Exercice 3 : Principe de superposition

On considère l'équation $x'' - 3x' + 2x = e^t + e^{3t}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. Trouver une solution particulière de $x'' - 3x' + 2x = e^t$ de la forme $\alpha t e^t$, puis une solution particulière de $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation, puis celle qui vérifie $x(0) = x'(0) = 0$.

Exercice 4 : Wronskien d'une équation d'Euler

On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation $(E): t^2 x'' - 2t x' + 2x = t^3$ et l'équation homogène associée (H) .

1. Vérifier que $x_1: t \rightarrow t$ et $x_2: t \rightarrow t^2$ sont solutions de (H) sur I .
2. Calculer leur wronskien W . En déduire qu'elles forment une base des solutions de (H) sur I .
3. Vérifier que W satisfait la formule de Liouville.
4. Chercher une solution particulière de (E) de la forme αt^3 . Résoudre (E) sur I , puis déterminer la solution telle que $x(1) = x'(1) = 0$.

Exercice 5 : Structure de l'espace des solutions

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x'' + e^t x = 0$.

1. Justifier que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension 2, et que $\varphi: x \rightarrow (x(0), x'(0))$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $x \in \mathcal{S}$ non nulle et t_0 tel que $x(t_0) = 0$. Montrer que $x'(t_0) \neq 0$.
3. Soient $x_1, x_2 \in \mathcal{S}$ telles que $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.
Montrer que leur wronskien vaut 1 sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que deux solutions qui s'annulent en un même point sont proportionnelles.

Exercice 6 : Variation des constantes à coefficients constants

On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t}$.

1. Donner une base (x_1, x_2) des solutions de l'équation homogène et calculer son wronskien.
2. Par la méthode de variation des constantes, déterminer toutes les solutions de l'équation.
3. Déterminer la solution telle que $x(1) = x'(1) = 0$.

Exercice 7 : Équation de Legendre d'indice 1

On considère sur $I =]-1, 1[$ l'équation $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$.

1. Justifier que l'ensemble des solutions sur I est un plan vectoriel. Vérifier que $x_1 : t \rightarrow t$ est solution.
2. Soit x_2 une solution quelconque. À l'aide de la formule de Liouville, montrer qu'il existe une constante C telle que $W(t) = \frac{C}{1-t^2}$ sur I , où W est le wronskien de (x_1, x_2) .
3. En prenant $C = 1$, déterminer sur $]0, 1[$ une solution x_2 à l'aide de la relation $(x_2/x_1)' = W/x_1^2$.
4. Vérifier que la fonction $x_2 : t \rightarrow \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1$ est solution sur I tout entier. En déduire toutes les solutions sur I .

5. Quelles sont les solutions bornées sur I ?

Exercice 8 : Abaissement de l'ordre par changement de fonction

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : (1 + t^2) x'' - 2t x' + 2x = (1 + t^2)^2$ et l'équation homogène associée (H) .

1. Vérifier que $x_1 : t \rightarrow t$ est solution de (H) .
2. Sur $]0, +\infty[$, on pose $x(t) = t z(t)$. Écrire l'équation vérifiée par z' lorsque x est solution de (H) , la résoudre, et en déduire une seconde solution x_2 polynomiale.
3. Montrer que (x_1, x_2) est une base des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ par la méthode de variation des constantes.

Exercice 9 : Variation des constantes et condition initiale

On considère sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$ l'équation $x'' + x = \tan t$.

1. Écrire le système vérifié par λ' et μ' lorsqu'on cherche une solution $x = \lambda \cos + \mu \sin$, et le résoudre.
2. Montrer qu'une primitive de $\frac{1}{\cos}$ sur I est $t \rightarrow \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)$. En déduire toutes les solutions de l'équation.
3. Déterminer la solution x telle que $x(0) = x'(0) = 0$, puis sa limite en $\pi/2$.

Exercice 10 : Formule intégrale et résonance

Soit f continue sur $\mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy $x'' + x = f(t)$,
 $x(0) = x'(0) = 0$.

1. Par la variation des constantes, montrer que l'unique solution est

$$x(t) = \int_0^t \sin(t-s) f(s) \, ds.$$

2. Calculer x lorsque $f = \cos$. La solution est-elle bornée sur $\mathbb{R}_+$?
3. On suppose $f \geq 0$ sur $[0, \pi]$. Montrer que $x \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 11 : Solutions développables en série entière

On considère l'équation $(H): (1+t^2)x'' + 4tx' + 2x = 0$.

1. On suppose que $x(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^k$ est solution sur $] -R, R[$, avec $R > 0$. Établir une relation de récurrence entre a_{k+2} et a_k .
2. En déduire les solutions développables en série entière, leur rayon de convergence et leur somme.
3. Montrer que les fonctions $t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ et $t \rightarrow \frac{t}{1+t^2}$ forment une base des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ tout entier.
4. Vérifier que le membre de gauche de (H) est égal à $((1+t^2)x)''$, et retrouver ainsi le résultat.

Exercice 12 : Série entière et raccordement en 0

On considère l'équation $(H): 4t x'' + 2x' - x = 0$.

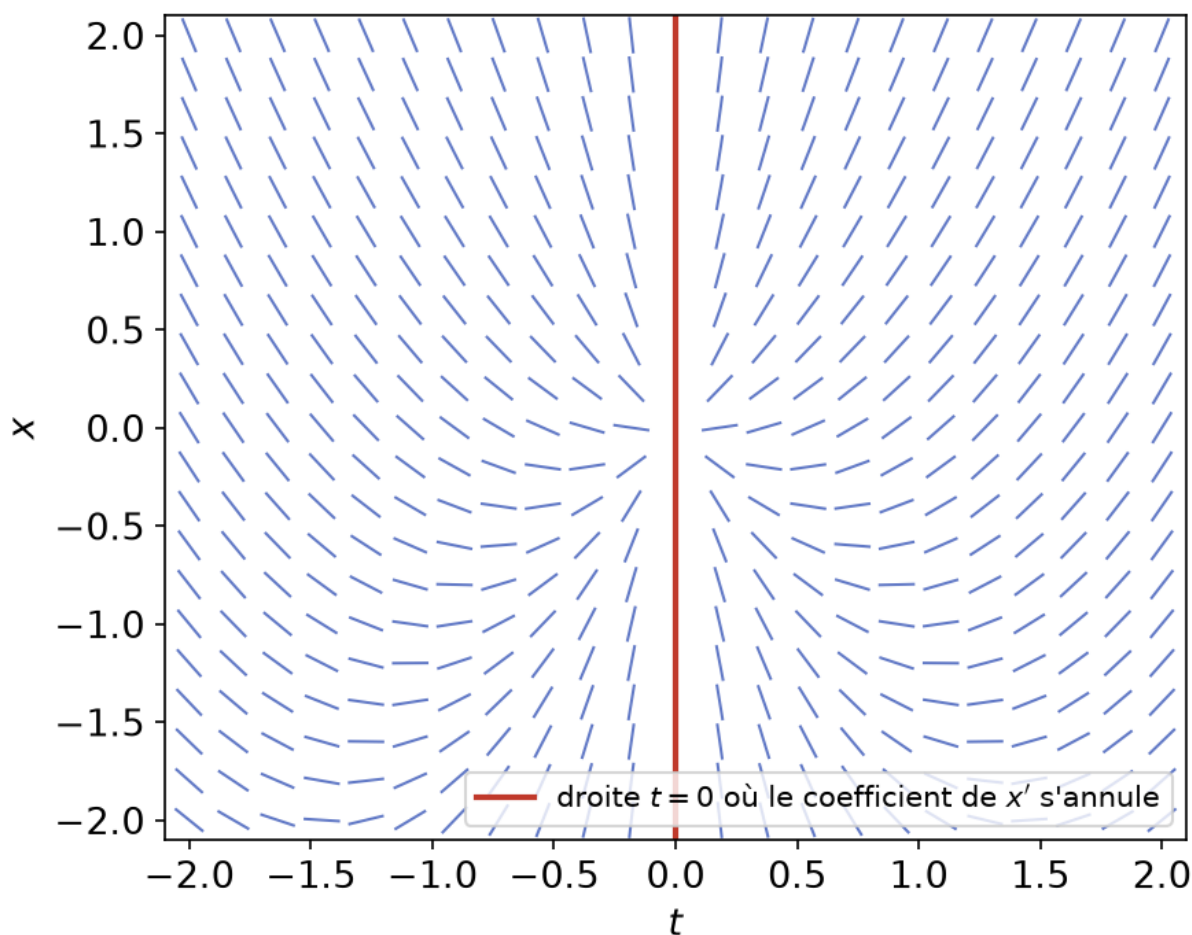
1. Déterminer les solutions de (H) développables en série entière et leur rayon. On note f celle qui vaut 1 en 0.
2. Exprimer $f(t)$ à l'aide de fonctions usuelles, pour $t > 0$ puis pour $t < 0$.
3. Vérifier que $t \rightarrow \sinh\sqrt{t}$ est solution sur $]0, +\infty[$, puis donner toutes les solutions sur $]0, +\infty[$. Faire de même sur $] -\infty, 0[$ avec $t \rightarrow \sin\sqrt{-t}$.
4. Déterminer toutes les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de leur ensemble ?

Exercice 13 : Raccordements à l'ordre 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, et donner la dimension de l'espace affine des solutions sur $\mathbb{R}$.

1. $t x' - x = t^2$.
2. $t x' - 2x = t^3$.
3. $t x' + 2x = t^2$.

La figure ci-dessous représente le champ de directions de la première équation. Sur chaque demi-plan, la pente vaut $(x + t^2) / t$; la droite $t = 0$ est celle où le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique pas.



Exercice 14 : Raccordements à l'ordre 2

On considère l'équation $(H): t^2 x'' - 4 t x' + 6 x = 0$.

1. Chercher les solutions de la forme $t \rightarrow t^r$ sur $]0, +\infty[$. En déduire toutes les solutions sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$.
2. Déterminer toutes les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient (H) en tout point. Quelle est la dimension de leur ensemble ?
3. Étudier le problème de Cauchy en $t_0 = 0$ avec $x(0) = \alpha$, $x'(0) = \beta$. Expliquer pourquoi ces résultats ne contredisent pas le théorème de Cauchy linéaire.

Exercice 15 : Équation d'Euler et changement de variable

On considère l'équation $(H): t^2 x'' + t x' + x = 0$.

1. Soit x deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $y: u \rightarrow x(e^u)$. Montrer que x est solution de (H) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de (H) sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$ à l'aide de $y: u \rightarrow x(-e^u)$.
3. Déterminer les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Système à matrice antisymétrique

Soit $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, telle que $A(t)$ soit antisymétrique pour tout t . On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle et l'on considère le système $X' = A(t) X$.

1. Montrer que, pour toute solution X , la fonction $t \rightarrow |X(t)|^2$ est constante.
2. Pour $1 \leq i \leq n$, soit X_i la solution telle que $X_i(0) = e_i$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique. Soit $R(t)$ la matrice de colonnes $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Montrer que $R(t)$ est orthogonale pour tout t .
3. Montrer que $\det R(t) = 1$ pour tout t . Que représente $\det R(t)$ pour le système ?

4. Pour $n = 2$, on prend $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega(t) \\ \omega(t) & 0 \end{pmatrix}$, avec ω continue, et l'on pose

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(s) \, ds. \text{ Déterminer } R(t).$$

Exercice 17 : Équation d'Airy

On considère l'équation $(H): x'' - tx = 0$ sur $\mathbb{R}$.

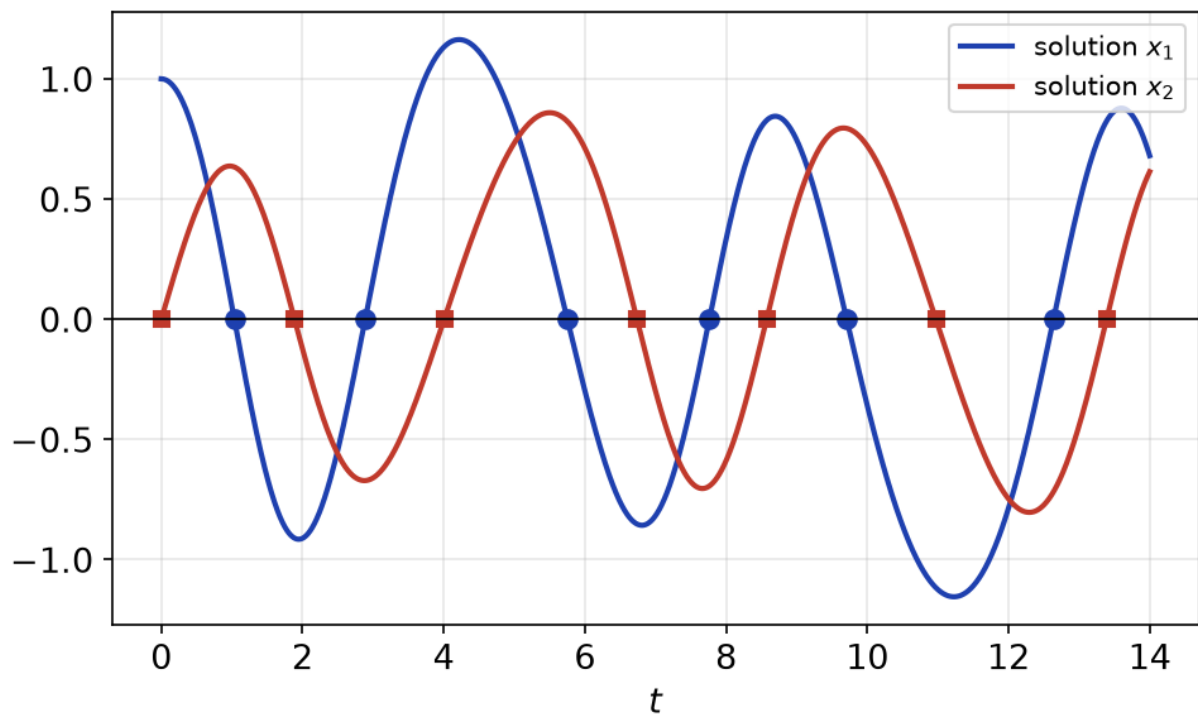
1. Rappeler la dimension de l'espace des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x(t) = \sum a_k t^k$ une série entière de rayon $R > 0$, solution sur $] -R, R[$. Montrer que $a_2 = 0$ et que $a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+3)(k+2)}$ pour tout $k \geq 0$.
3. On note y_0 la série obtenue avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, et y_1 celle obtenue avec $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Montrer que leur rayon est infini et qu'elles sont solutions sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que (y_0, y_1) est une base des solutions et que son wronskien vaut 1. Que peut-on en déduire pour toutes les solutions de (H) ?
5. Montrer que $y_0(t) \geq 1 + \frac{t^3}{6}$ pour tout $t \geq 0$. En déduire la limite de y_0 en $+\infty$.

Exercice 18 : Théorème de séparation de Sturm

Soit q continue sur $\mathbb{R}$ et $(H): x'' + q(t)x = 0$. Soit (x_1, x_2) une base des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$, de wronskien W .

1. Montrer que W est une constante non nulle.
2. Soit x une solution non nulle. Montrer que ses zéros sont simples, puis isolés : pour tout zéro t_0 , il existe $\eta > 0$ tel que x ne s'annule pas sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ privé de t_0 .
3. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de x_1 . Montrer que $x_2(\alpha) \neq 0$ et $x_2(\beta) \neq 0$.
4. En raisonnant par l'absurde avec la fonction x_1 / x_2 et le théorème de Rolle, montrer que x_2 s'annule sur $] \alpha, \beta[$.
5. Montrer que x_2 s'annule exactement une fois sur $] \alpha, \beta[$: les zéros de x_1 et de x_2 s'entrelacent.

La figure ci-dessous illustre ce résultat pour $q(t) = 2 + \sin t$, avec les solutions telles que $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$. Les ronds marquent les zéros de x_1 , les carrés ceux de x_2 .



Exercice 19 : Équation à coefficient périodique

Soit $T > 0$ et $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. On note S l'espace des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de $x'' + q(t)x = 0$, et x_1, x_2 les solutions telles que $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_2'(0) = 1$.

1. Montrer que, pour $x \in S$, la fonction $\Phi(x): t \rightarrow x(t + T)$ appartient à S , et que Φ est un automorphisme de S .

2. Montrer que la matrice de Φ dans la base (x_1, x_2) est

$$M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x_1^{[\text{pme}]}(T) & x_2^{[\text{primime}]}(T) \end{pmatrix}, \text{ et que } \det M = 1.$$

- On suppose $|x_1(T) + x_2'(T)| > 2$. Montrer qu'il existe une solution non nulle x et un réel λ avec $|\lambda| > 1$ tels que $x(t+T) = \lambda x(t)$ pour tout t . En déduire que l'équation possède une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- Traiter l'exemple $q = \frac{1}{4}$, $T = 2\pi$: calculer M et interpréter.

Exercice 20 : Problème, étude complète d'une équation singulière

On considère les équations $(E): t x'' + 2 x' - t x = t$ et $(H): t x'' + 2 x' - t x = 0$.

Partie A : solution développable en série entière.

- Déterminer les solutions de (H) développables en série entière au voisinage de 0. On note φ celle qui vaut 1 en 0 ; préciser son rayon et exprimer $\varphi(t)$ pour $t \neq 0$.

Partie B : solutions de (H) sur un intervalle ne contenant pas 0.

- Soit $I =]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$. Montrer que x est solution de (H) sur I si et seulement si $y: t \rightarrow t x(t)$ vérifie $y'' = y$ sur I . En déduire les solutions de (H) sur I .
- On pose $x_1(t) = \frac{\sinh t}{t}$ et $x_2(t) = \frac{\cosh t}{t}$. Calculer leur wronskien et vérifier la formule de Liouville.

Partie C : équation complète.

- Sur I , appliquer la méthode de variation des constantes à (E) avec la base (x_1, x_2) . Quelle solution particulière obtient-on ? Aurait-on pu la deviner ?

5. Déterminer toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, puis la solution sur $\mathbb{R}$ telle que $x(0) = 1$.
Existe-t-il une solution sur $\mathbb{R}$ telle que $x'(0) = 1$?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [équations différentielles linéaires, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#), [Séries entières](#)
- Chapitre précédent : [Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral](#)
- Chapitre suivant : [Exponentielle de matrice et systèmes différentiels](#)
- Le même thème en L1 : [équations différentielles, exercices de maths en L1](#)
- Le même thème en maths sup : [équations différentielles linéaires, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)