

Équations différentielles linéaires

Corrigé de l'exercice 1 : Équations homogènes du premier ordre

Dans chaque cas, l'équation est mise sous la forme $y' + a(x)y = 0$ avec a continue sur l'intervalle. Les solutions sont alors les fonctions λe^{-A} , où A est une primitive de a .

1. Ici, $a(x) = 3$ et $A(x) = 3x$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^{-3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. L'équation s'écrit $y' - 2x y = 0$. Donc $a(x) = -2x$ et $A(x) = -x^2$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^{x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, $(\lambda e^{x^2})' = 2x \lambda e^{x^2}$.
3. Comme $1 + x^2 > 0$, on normalise : $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 0$. Une primitive de a est $A(x) = \ln(1 + x^2)$. Ainsi, $e^{-A(x)} = \frac{1}{1+x^2}$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \frac{\lambda}{1+x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Sur $]0, +\infty[$, x ne s'annule pas et l'équation devient $y' - \frac{3}{x} y = 0$. On prend $A(x) = -3 \ln x$, donc $e^{-A(x)} = e^{3 \ln x} = x^3$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda x^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. La fonction $\tan$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et $\cos x > 0$ sur cet intervalle. Une primitive de $\tan$ est $A(x) = -\ln(\cos x)$. Par conséquent, $e^{-A(x)} = \cos x$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda \cos x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. On cherche λ tel que $\lambda \cdot 2^3 = 16$, soit $\lambda = 2$. **La solution cherchée est** $x \rightarrow 2x^3$.

Point de méthode : vérifiez toujours le signe de A . Une erreur de signe transforme e^{-x^2} en e^{x^2} ; une dérivation de contrôle la détecte immédiatement.

Corrigé de l'exercice 2 : Seconds membres usuels au premier ordre

1. Les solutions homogènes sont λe^{-2x} . Ensuite, on cherche $y_p(x) = \alpha x + \beta$. On a $y'_p + 2y_p = 2\alpha x + (\alpha + 2\beta)$. L'identification avec $4x + 2$ donne $\alpha = 2$, puis $2 + 2\beta = 2$, donc $\beta = 0$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow 2x + \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions homogènes sont λe^x . Comme $2 \neq 1$, on cherche $y_p = K e^{2x}$. Alors $y'_p - y_p = (2K - K) e^{2x} = K e^{2x}$, d'où $K = 1$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow e^{2x} + \lambda e^x$.
3. Les solutions homogènes sont λe^{-x} . Le second membre est lui-même solution homogène : c'est le cas de résonance. On cherche donc $y_p = K x e^{-x}$. On obtient $y'_p = K(1 - x) e^{-x}$, puis $y'_p + y_p = K e^{-x}$. Ainsi, $K = 1$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow (x + \lambda) e^{-x}$.
4. On applique le principe de superposition. D'abord, pour $y' + y = 2x$, on cherche $\alpha x + \beta$: $\alpha x + (\alpha + \beta) = 2x$ donne $\alpha = 2$ et $\beta = -2$. Ensuite, pour $y' + y = 3e^{-x}$, la question 3 fournit $3x e^{-x}$. Par conséquent, $y_p(x) = 2x - 2 + 3x e^{-x}$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow 2x - 2 + (3x + \lambda) e^{-x}$.
5. On cherche $z_p = K e^{ix}$. Alors $z'_p - 2z_p = (i - 2) K e^{ix}$, d'où

$$K = \frac{5}{i - 2} = \frac{5(-2 - i)}{(-2)^2 + 1^2} = -2 - i.$$

Ensuite, $z_p = (-2 - i)(\cos x + i \sin x) = (-2\cos x + \sin x) + i(-\cos x - 2\sin x)$.

Or les coefficients de l'équation sont réels et $5 \sin x = \operatorname{Im}(5 e^{ix})$. Donc

$y_p = \operatorname{Im}(z_p) = -\cos x - 2 \sin x$ convient. Vérifions :

$y'_p - 2y_p = (\sin x - 2\cos x) + 2\cos x + 4 \sin x = 5 \sin x$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^{2x} - \cos x - 2 \sin x$.

Corrigé de l'exercice 3 : Un problème de Cauchy du premier

ordre

1. Posons $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$. Alors $y' = -\alpha \sin x + \beta \cos x$, donc

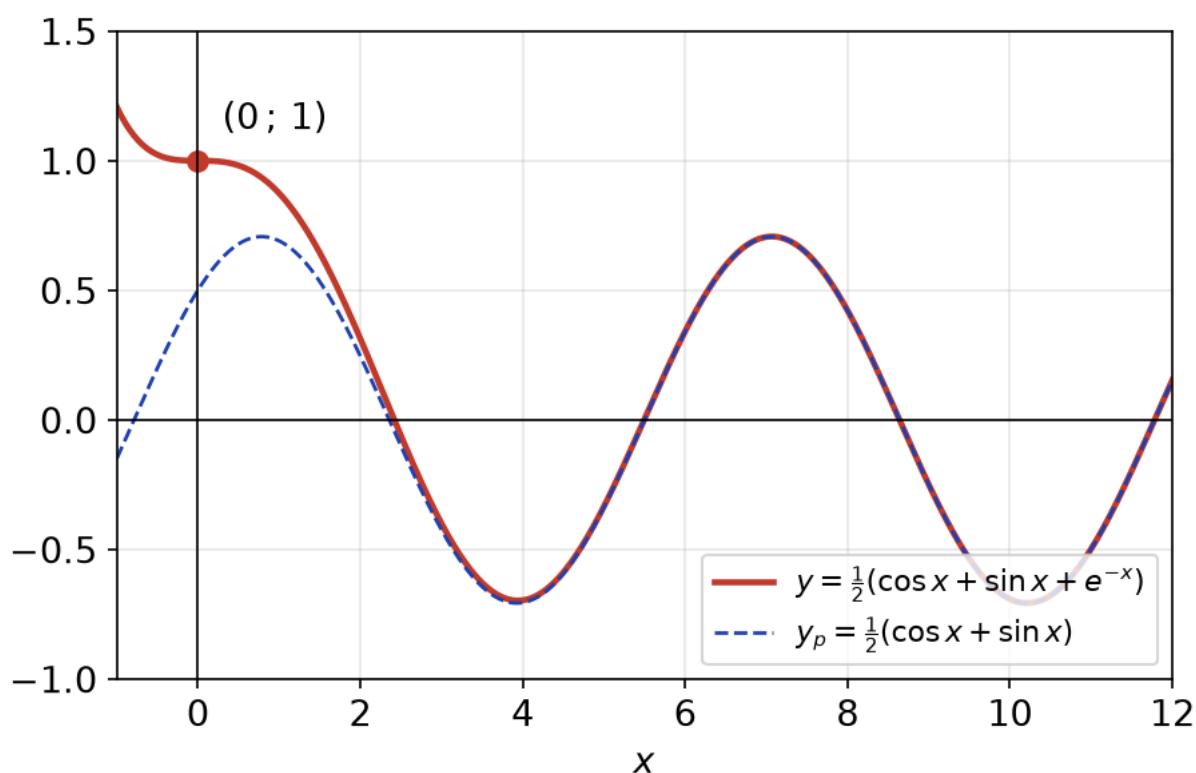
$$y' + y = (\alpha + \beta) \cos x + (\beta - \alpha) \sin x.$$

Cette fonction est égale à $\cos x$ pour tout x . En prenant $x = 0$, puis $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\alpha + \beta = 1$ et $\beta - \alpha = 0$. **Donc** $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

2. Les solutions homogènes sont λe^{-x} . D'après le théorème de structure, **les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. La condition $y(0) = 1$ s'écrit $\frac{1}{2} + \lambda = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{2}$. **L'unique solution est** $y(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^{-x})$.

4. On a $y(x) - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{1}{2}e^{-x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$. De plus, $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Ainsi, **la solution se rapproche de la fonction** 2π -**périodique** $x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, **d'amplitude** $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$. La figure ci-dessous montre ce rapprochement : le terme $\frac{1}{2}e^{-x}$ est un régime transitoire.



Corrigé de l'exercice 4 : Variation de la constante

- Sur $]0, +\infty[$, on normalise : $y' - \frac{1}{x}y = x$. Les coefficients sont continus. Avec $A(x) = -\ln x$, les solutions homogènes sont λx . Ensuite, on cherche $y_p = \lambda(x)x$. On obtient $y'_p - \frac{1}{x}y_p = \lambda'(x)x$. Il faut donc $\lambda'(x)x = x$, soit $\lambda' = 1$. On prend $\lambda(x) = x$, d'où $y_p = x^2$. Les solutions sont les fonctions $x \rightarrow x^2 + Cx$. Enfin, $y(1) = 1 + C = 3$ donne $C = 2$. **La solution cherchée est** $y(x) = x^2 + 2x$.
- Avec $A(x) = x^2$, les solutions homogènes sont λe^{-x^2} . On pose $y = \lambda(x)e^{-x^2}$. Alors $y' + 2xy = \lambda'(x)e^{-x^2}$. L'équation équivaut donc à $\lambda'(x) = x$. On prend $\lambda(x) = \frac{x^2}{2}$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos x > 0$. L'équation devient $y' + \tan(x)y = \frac{1}{\cos^2 x}$. D'après l'exercice 1, les solutions homogènes sont $\lambda \cos x$. Ensuite, on pose $y = \lambda(x) \cos x$; il vient $\lambda'(x) \cos x = \frac{1}{\cos^2 x}$, donc $\lambda'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. On prend $\lambda(x) = \tan x$, d'où $y_p(x) = \tan x \cos x = \sin x$. Les solutions sont les fonctions $x \rightarrow \sin x + C \cos x$. Vérifions : $\cos x(\cos x - C \sin x) + \sin x(\sin x + C \cos x) = 1$. Enfin, $y(0) = C = 2$. **La solution cherchée est** $y(x) = \sin x + 2 \cos x$.

Point de méthode : après la variation de la constante, le terme en λ disparaît toujours. S'il reste, c'est qu'une erreur de calcul s'est glissée dans les solutions homogènes.

Corrigé de l'exercice 5 : Coefficients variables et dérivée d'un produit

- La formule de dérivation d'un produit donne $((1 + e^x)y)' = e^x y + (1 + e^x)y'$. Ainsi, l'équation équivaut à $((1 + e^x)y)' = 1 + e^x$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, cela équivaut à l'existence d'une constante C telle que $(1 + e^x)y = x + e^x + C$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \frac{x + e^x + C}{1 + e^x}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Pour tout réel x , on a $\sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. Donc $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$, et g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée. Ensuite,

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}(x + \sqrt{1 + x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

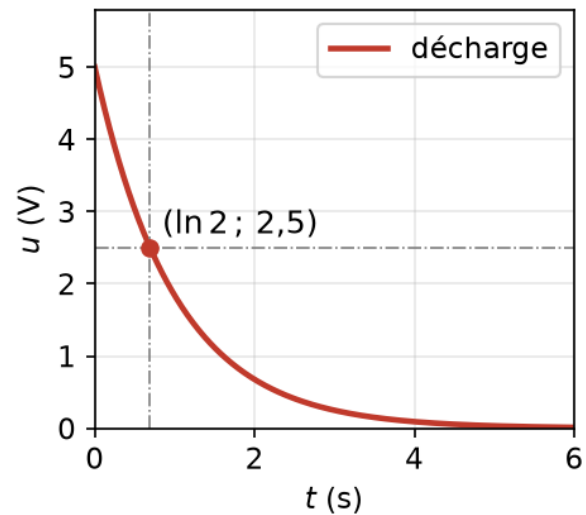
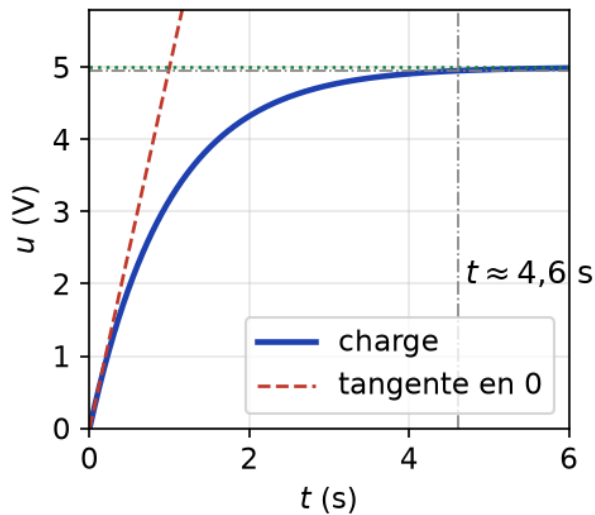
On a bien $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

- On normalise : $y' + \frac{x}{1 + x^2}y = \frac{1}{1 + x^2}$. Une primitive de $\frac{x}{1 + x^2}$ est $A(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$, donc $e^{-A(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. Posons $y = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$. L'équation devient $\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{1 + x^2}$, c'est-à-dire $\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. D'après la question 2, on peut prendre $\lambda = g$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C}{\sqrt{1 + x^2}}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Comme $g(0) = \ln 1 = 0$, la condition $y(0) = 0$ donne $C = 0$. Ensuite, $(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x) = 1$. Donc $g(-x) = \ln(\sqrt{1 + x^2} - x) = -g(x)$: g est impaire. Le dénominateur étant pair, **la solution** $y(x) = \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$ **est impaire**. On peut aussi le voir sans calcul : $x \rightarrow -y(-x)$ résout le même problème de Cauchy, donc lui est égale par unicité.

Corrigé de l'exercice 6 : Charge et décharge d'un condensateur

1. On remplace i par $C u'$ dans la loi des mailles : $R C u' + u = E$. Ensuite, $\tau = RC = 10^4 \times 10^{-4} = 1$ s. **L'équation est $\tau u' + u = E$, avec $\tau = 1$ s, soit $u' + u = 5$.**
2. La constante E est une solution particulière, et les solutions homogènes sont $\lambda e^{-t/\tau}$. Donc $u(t) = E + \lambda e^{-t/\tau}$. La condition $u(0) = 0$ impose $\lambda = -E$. **Ainsi, $u(t) = 5(1 - e^{-t})$ pour $t \geq 0$, en volts.**
3. On résout $1 - e^{-t} = 0,99$, soit $e^{-t} = 0,01$. Donc $t = \ln 100 = 2 \ln 10$. **La tension atteint 99 % de E au bout de $t \approx 4,6$ s.**
4. On a $u'(t) = \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau}$, donc $u'(0) = \frac{E}{\tau}$. La tangente en 0 a pour équation $v(t) = \frac{E}{\tau} t$. Par conséquent, $v(t) = E$ équivaut à $t = \tau$. **La tangente à l'origine coupe l'asymptote $u = E$ à l'instant $t = \tau = 1$ s.**
5. Sans générateur, la loi des mailles devient $R i + u = 0$, donc $\tau u' + u = 0$. Avec $u(0) = E$, on trouve $u(t) = E e^{-t/\tau} = 5 e^{-t}$. Ensuite, $u(t) = \frac{E}{2}$ équivaut à $e^{-t} = \frac{1}{2}$, soit $t = \ln 2$. **La tension est divisée par deux au bout de $\tau \ln 2 \approx 0,69$ s.**

La figure ci-dessous résume l'exercice : à gauche la charge avec sa tangente à l'origine et l'instant $t = \ln 100$; à droite la décharge avec son temps de demi-décroissance.



Corrigé de l'exercice 7 : Mélange dans une cuve

- Il entre 2 litres et il sort 1 litre par minute. Donc $V(t) = 100 + t$. **La cuve est pleine quand $100 + t = 500$, soit au bout de 400 minutes.**
- Par minute, il entre $2 \times 30 = 60$ grammes de sel. D'autre part, le mélange est homogène, de concentration $\frac{q(t)}{V(t)}$. Il sort donc $1 \times \frac{q(t)}{100 + t}$ gramme par minute. La variation instantanée de la masse de sel est la différence de ces deux débits. **Ainsi, $q'(t) = 60 - \frac{q(t)}{100 + t}$ sur $[0, 400]$.**
- L'équation s'écrit $q' + \frac{1}{100 + t} q = 60$, avec des coefficients continus. Une primitive de $\frac{1}{100 + t}$ est $\ln(100 + t)$, donc les solutions homogènes sont $\frac{\lambda}{100 + t}$. Par variation de la constante, $\frac{\lambda'(t)}{100 + t} = 60$, soit $\lambda'(t) = 60(100 + t)$. On prend $\lambda(t) = 30(100 + t)^2$. Les solutions sont donc

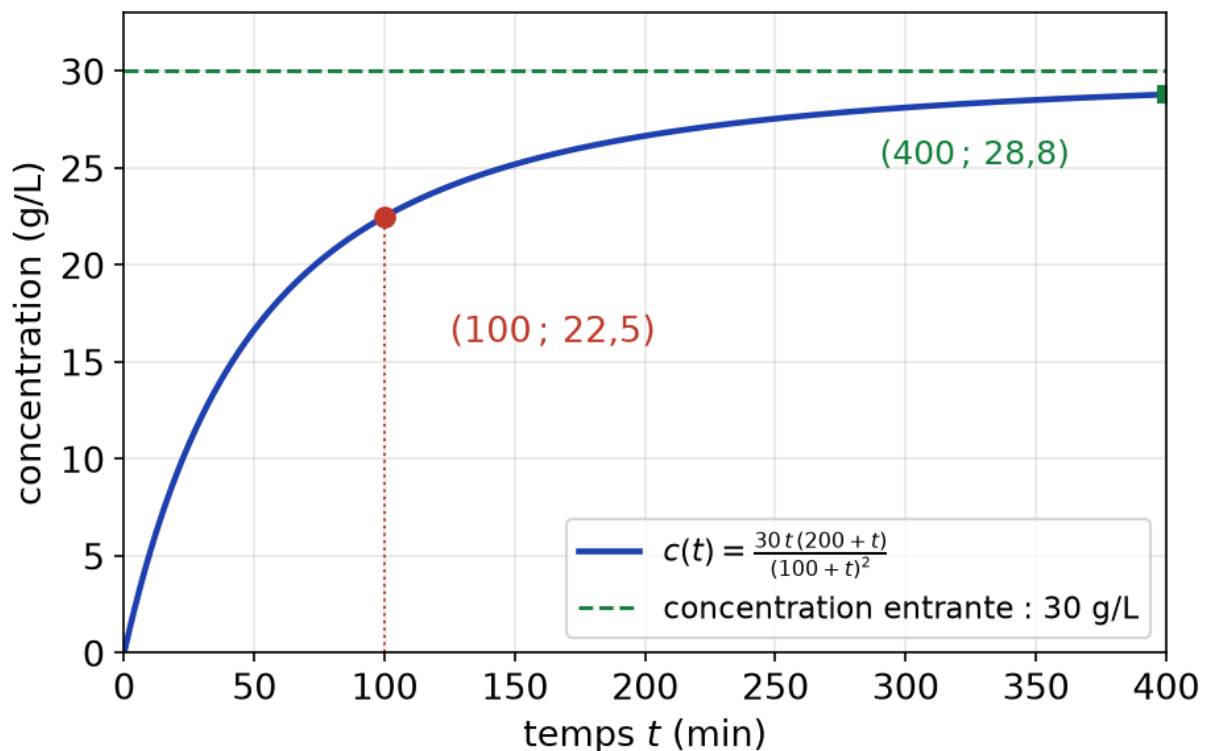
$$q(t) = 30(100 + t) + \frac{K}{100 + t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

La condition $q(0) = 0$ donne $3000 + \frac{K}{100} = 0$, soit $K = -300\,000$. Enfin,
 $30(100 + t)^2 - 300\,000 = 30((100 + t)^2 - 100^2) = 30 t (200 + t)$. **Donc**
 $q(t) = \frac{30 t (200 + t)}{100 + t}$.

- On a $c(t) = \frac{30 t (200 + t)}{(100 + t)^2}$. Ainsi, $c(100) = \frac{30 \times 100 \times 300}{200^2} = \frac{900\,000}{40\,000}$. **Donc**

$c(100) = 22,5 \text{ g/L}$. De même, $c(400) = \frac{30 \times 400 \times 600}{500^2} = \frac{7\,200\,000}{250\,000}$. **Quand la cuve est pleine, $c(400) = 28,8 \text{ g/L}$.**

5. D'après le calcul de la question 3, $c(t) = 30\left(1 - \frac{10\,000}{(100+t)^2}\right)$. **Donc $c(t) \rightarrow 30 \text{ g/L}$ quand $t \rightarrow +\infty$.** Autrement dit, l'eau pure initiale est peu à peu diluée, et le mélange tend vers la concentration de l'eau versée. La figure suivante montre cette évolution sur $[0, 400]$.

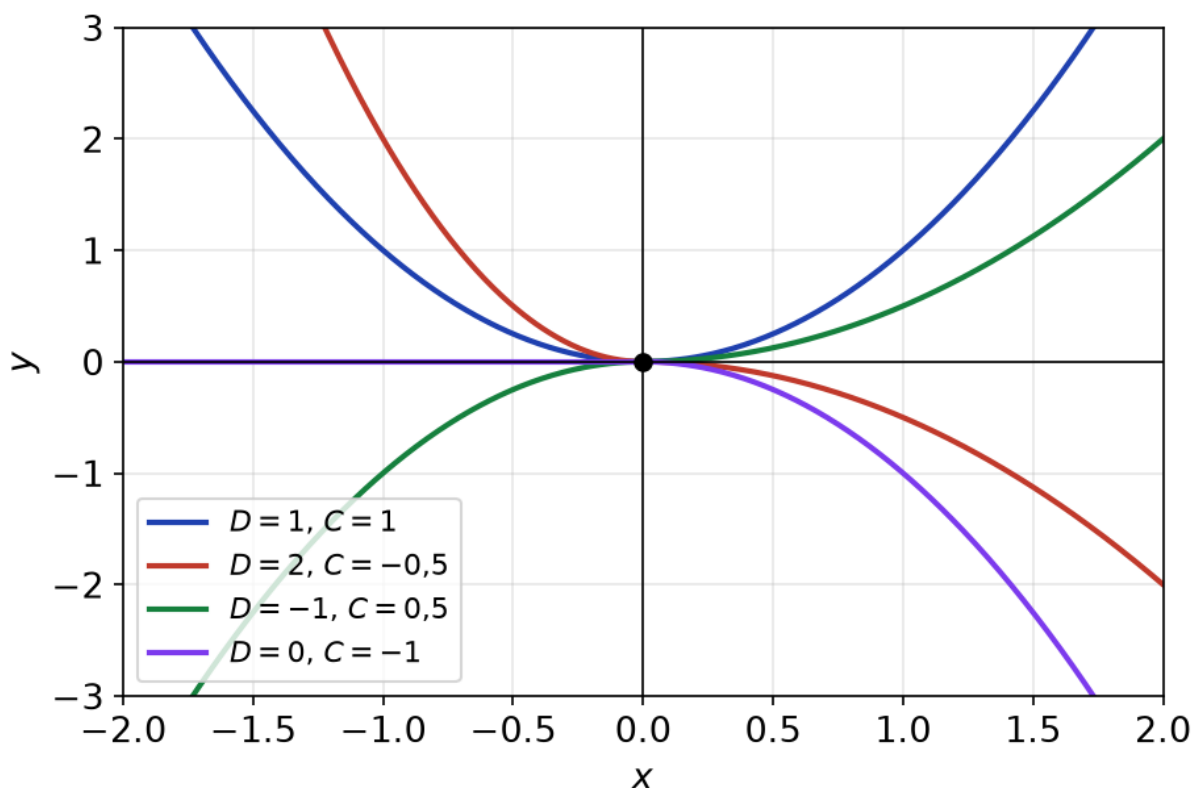


Corrigé de l'exercice 8 : Raccordement de solutions

- Sur $]0, +\infty[$, l'équation s'écrit $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Avec $A(x) = -2\ln x$, on obtient $e^{-A(x)} = x^2$. Sur $] -\infty, 0[$, on prend $A(x) = -2\ln|x|$ et on obtient encore x^2 . **Les solutions sont $x \rightarrow Cx^2$ sur $]0, +\infty[$ et $x \rightarrow Dx^2$ sur $] -\infty, 0[$, avec $C, D \in \mathbb{R}$.**
- Soit y une solution dérivable sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions sont solutions sur chaque demi-droite, donc il existe C et D tels que $y(x) = Cx^2$ pour $x > 0$ et $y(x) = Dx^2$ pour $x < 0$. De plus, l'équation en $x = 0$ donne $0 \cdot y'(0) - 2y(0) = 0$, donc $y(0) = 0$.

Réciproquement, fixons C et D réels, et définissons y ainsi, avec $y(0) = 0$. Le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{y(h)}{h} = Ch$ si $h > 0$ et Dh si $h < 0$. Il tend vers 0 , donc y est dérivable en 0 avec $y'(0) = 0$. Enfin, l'équation est vérifiée en 0 , puisque $0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$. **Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions égales à Dx^2 pour $x \leq 0$ et à Cx^2 pour $x \geq 0$, où C et D sont deux réels arbitraires.** La figure ci-dessous en montre quelques-unes : toutes passent par l'origine avec une tangente horizontale.

- Sur chaque demi-droite, l'équation $y' + \frac{1}{x}y = 0$ a pour solutions $\frac{C}{x}$ et $\frac{D}{x}$. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable, donc continue en 0 . Or $\frac{C}{x}$ n'a une limite finie en 0^+ que si $C = 0$. De même, $D = 0$. Enfin, l'équation en 0 donne $y(0) = 0$. **La seule solution sur $\mathbb{R}$ de $xy' + y = 0$ est la fonction nulle.**
- D'après la question 2, toute solution vérifie $y(0) = 0$, et il y en a une infinité (une par couple (C, D)). **Le problème avec $y(0) = 0$ admet donc une infinité de solutions, et celui avec $y(0) = 1$ n'en admet aucune.** Cela ne contredit pas le théorème de Cauchy. En effet, celui-ci s'applique à une équation normalisée $y' + a(x)y = b(x)$ avec a continue sur un intervalle. Ici, $a(x) = -\frac{2}{x}$ n'est pas définie en 0 .



Corrigé de l'exercice 9 : Équations homogènes du second ordre

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3) = 0$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. On a $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$: -2 est racine double. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow (\lambda x + \mu) e^{-2x}$.
3. Le discriminant de $r^2 - 2r + 5$ vaut $4 - 20 = -16 = (4i)^2$. Les racines sont donc $1 \pm 2i$. **Les solutions réelles sont les fonctions** $x \rightarrow e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$.
4. Les racines de $r^2 + 9$ sont $\pm 3i$, donc $\alpha = 0$ et $\beta = 3$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x)$.
5. Le discriminant de $r^2 - 2r + 2$ vaut -4 , donc les racines sont $1 \pm i$. **Les solutions complexes sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^{(1+i)x} + \mu e^{(1-i)x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ensuite, une solution réelle est la partie réelle d'une solution complexe de la forme $c e^{(1+i)x}$. Écrivons $c = \alpha - i\beta$ avec α, β réels. Alors

$$\operatorname{Re}((\alpha - i\beta) e^x (\cos x + i \sin x)) = e^x (\alpha \cos x + \beta \sin x).$$

On retrouve les solutions réelles $x \rightarrow e^x (\alpha \cos x + \beta \sin x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. L'équation caractéristique est $r^2 - 2i r - 1 = 0$, c'est-à-dire $(r - i)^2 = 0$. Ainsi, i est racine double. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow (\lambda x + \mu) e^{ix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Ici, les coefficients ne sont pas réels : il n'y a pas lieu de chercher des solutions réelles.

Corrigé de l'exercice 10 : Retrouver l'équation à partir des solutions

1. D'abord, e^x est solution si et seulement si $1 + a + b = 0$. Ensuite, pour $y = x e^x$, on a $y' = (1 + x) e^x$ et $y'' = (2 + x) e^x$. Donc

$$y'' + a y' + b y = ((2 + a) + (1 + a + b) x) e^x.$$

Cette fonction est nulle si et seulement si $2 + a = 0$ et $1 + a + b = 0$. **Donc** $a = -2$ et $b = 1$: **l'équation est** $y'' - 2y' + y = 0$. On retrouve bien la racine double 1 de $(r - 1)^2$.

2. Posons $y(x) = e^{-x} \cos(3x)$. Alors $y'(x) = e^{-x}(-\cos(3x) - 3\sin(3x))$ et $y''(x) = e^{-x}(-8\cos(3x) + 6\sin(3x))$. Par conséquent,
- $$y'' + a y' + b y = e^{-x}((-8 - a + b)\cos(3x) + (6 - 3a)\sin(3x)).$$

Si cette fonction est nulle, on obtient en $x = 0$: $-8 - a + b = 0$. En $x = \frac{\pi}{6}$, on obtient $6 - 3a = 0$. Donc $a = 2$ et $b = 10$. Réciproquement, ces valeurs annulent l'expression.

L'équation est $y'' + 2y' + 10y = 0$. Ses racines caractéristiques sont $-1 \pm 3i$. **Ses solutions réelles sont les fonctions** $x \rightarrow e^{-x}(\lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x))$.

3. La fonction $x \rightarrow e^{rx}$ est solution si et seulement si r est racine de $P(r) = r^2 + ar + b$. Or P est de degré 2 : il a au plus deux racines. **Aucun couple** (a, b) **ne convient, car** 1, 2 et 3 **ne peuvent pas être trois racines distinctes de** P .

Corrigé de l'exercice 11 : Second membre polynomial

1. On a $r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2)$, donc les solutions homogènes sont $\lambda e^x + \mu e^{-2x}$. Comme $b = -2 \neq 0$, on cherche $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Alors

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = -2\alpha x^2 + (2\alpha - 2\beta)x + (2\alpha + \beta - 2\gamma).$$

L'identification donne $\alpha = -1$, puis $\beta = \alpha = -1$, puis $-2 - 1 - 2\gamma = 0$, soit $\gamma = -\frac{3}{2}$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^x + \mu e^{-2x} - x^2 - x - \frac{3}{2}$.

2. Les racines de $r^2 - r$ sont 0 et 1, donc les solutions homogènes sont $\lambda + \mu e^x$. Si y est un polynôme de degré $n \geq 1$, alors $y'' - y'$ est de degré $n - 1$. Pour obtenir x , il faut donc $n = 2$. De plus, la constante est inutile, puisqu'elle est solution homogène. On cherche $y_p = \alpha x^2 + \beta x$: $y_p'' - y_p' = -2\alpha x + (2\alpha - \beta)$. Donc $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = 2\alpha = -1$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda + \mu e^x - \frac{x^2}{2} - x$.

3. Les solutions homogènes sont $\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$. On cherche $y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$: $y_p'' + 4y_p = 4\alpha x^2 + 4\beta x + (2\alpha + 4\gamma)$. Donc $\alpha = 2$, $\beta = 0$ et $4 + 4\gamma = 0$, soit $\gamma = -1$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) + 2x^2 - 1$.

Corrigé de l'exercice 12 : Second membre exponentiel et résonance

Dans les trois premières questions, $P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$ ou $P(r) = (r - 2)^2$. On compare l'exposant du second membre aux racines de P .

1. Le réel 3 n'est pas racine de P , et $P(3) = 9 - 9 + 2 = 2$. On prend donc $y_p = \frac{1}{2} e^{3x}$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$.
2. Le réel 1 est racine simple de P , et $P'(1) = 2 - 3 = -1$. On prend donc $y_p = \frac{x e^x}{P'(1)} = -x e^x$. Vérifions : $y'_p = -(1+x)e^x$, $y''_p = -(2+x)e^x$, et $-(2+x) + 3(1+x) - 2x = 1$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^x + \mu e^{2x} - x e^x$.
3. Ici, $P(r) = (r - 2)^2$ et 2 est racine double. On prend $y_p = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$. En effet, avec $y = z e^{2x}$, l'équation devient $z'' e^{2x} = e^{2x}$, et $z = \frac{x^2}{2}$ convient. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right) e^{2x}$.
4. Les racines de $r^2 + 2r + 2$ sont $-1 \pm i$. Le complexe $-1 + i$ est racine simple, et $P'(-1 + i) = 2(-1 + i) + 2 = 2i$. Une solution particulière complexe est donc $z_p(x) = \frac{x e^{(-1+i)x}}{2i} = -\frac{i}{2} x e^{-x} (\cos x + i \sin x) = \frac{x e^{-x}}{2} (\sin x - i \cos x)$.

Or les coefficients sont réels et $e^{-x} \sin x = \operatorname{Im}(e^{(-1+i)x})$. Donc

$y_p = \operatorname{Im}(z_p) = -\frac{x}{2} e^{-x} \cos x$ convient. **Les solutions réelles sont les fonctions** $x \rightarrow e^{-x} \left(\lambda \cos x + \mu \sin x - \frac{x}{2} \cos x \right)$.

Corrigé de l'exercice 13 : Second membre trigonométrique

1. Les racines de $r^2 + 2r + 2$ sont $-1 \pm i$, donc les solutions homogènes sont $e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$. Ensuite, on résout $z'' + 2z' + 2z = 5 e^{ix}$. Comme $P(i) = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \neq 0$, on prend

$$z_p = \frac{5}{1+2i} e^{ix} = (1-2i)(\cos x + i \sin x) = (\cos x + 2 \sin x) + i(\sin x - 2 \cos x).$$

La partie réelle $y_p = \cos x + 2 \sin x$ est solution de l'équation réelle. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \cos x + 2 \sin x$.

2. Comme $5 \sin x = \text{Im}(5 e^{ix})$, la partie imaginaire de z_p convient. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) + \sin x - 2 \cos x$.

3. Les solutions homogènes sont $\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$. Le complexe $2i$ est racine simple de $r^2 + 4$, avec $P'(2i) = 4i$. Donc $z_p = \frac{x}{4i} e^{2ix} = \frac{x}{4} \sin(2x) - i \frac{x}{4} \cos(2x)$. Sa partie imaginaire est $-\frac{x}{4} \cos(2x)$. Vérifions : si $y = -\frac{x}{4} \cos(2x)$, alors $y'' = \sin(2x) + x \cos(2x)$, et $y'' + 4y = \sin(2x)$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) - \frac{x}{4} \cos(2x)$.

4. Dans la question 1, le terme $e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$ tend vers 0. Ainsi, toute solution se rapproche de la fonction bornée $\cos x + 2 \sin x = \sqrt{5} \cos(x - \varphi)$. En revanche, dans la question 3, la partie homogène est bornée, mais $-\frac{x}{4} \cos(2x)$ vaut $-\frac{k\pi}{4}$ en $x = k\pi$. **Les solutions de la question 1 sont bornées sur $[0, +\infty[$, tandis que celles de la question 3 ne le sont pas : c'est la résonance.**

Corrigé de l'exercice 14 : Principe de superposition

Dans tout l'exercice, $P(r) = r^2 - 1$ et les solutions homogènes sont les fonctions $\lambda e^x + \mu e^{-x}$.

1. On traite chaque terme séparément. D'abord, pour $2x$, on cherche $\alpha x + \beta$: $-\alpha x - \beta = 2x$ donne $-2x$. Ensuite, pour $4e^x$, le réel 1 est racine simple et $P'(1) = 2$: on obtient $\frac{4}{2} x e^x = 2x e^x$. Enfin, pour $2 \cos x$, on a $P(i) = -2$, donc $z_p = \frac{2 e^{ix}}{-2} = -e^{ix}$, de partie réelle $-\cos x$. Par superposition, **les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^x + \mu e^{-x} - 2x + 2x e^x - \cos x$.

2. On écrit $\text{ch } x = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$. Pour $\frac{1}{2} e^x$, on obtient $\frac{1}{2} \cdot \frac{x e^x}{P'(1)} = \frac{x e^x}{4}$. Pour $\frac{1}{2} e^{-x}$, on a $P'(-1) = -2$, d'où $-\frac{x e^{-x}}{4}$. La somme vaut $\frac{x}{4}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{2} \text{sh } x$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{x}{2} \text{sh } x$.

3. On linéarise : $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x)$. Pour la constante $\frac{1}{2}$, la constante $-\frac{1}{2}$ convient. Pour

$-\frac{1}{2}\cos(2x)$, on a $P(2i) = -5$, donc $z_p = \frac{-\frac{1}{2}e^{2ix}}{-5} = \frac{1}{10}e^{2ix}$, de partie réelle $\frac{1}{10}\cos(2x)$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \lambda e^x + \mu e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\cos(2x)$.

Point de méthode : un produit ou une puissance de fonctions trigonométriques se linéarise toujours avant d'appliquer la méthode ; chaque terme obtenu relève alors d'un cas du cours.

Corrigé de l'exercice 15 : Problèmes de Cauchy du second ordre

- La fonction $x \rightarrow x$ est solution particulière, et les solutions sont $y = \lambda \cos x + \mu \sin x + x$. Alors $y(0) = \lambda = 1$. Ensuite, $y'(x) = -\lambda \sin x + \mu \cos x + 1$, donc $y'(0) = \mu + 1 = 0$. **La solution est** $y(x) = \cos x - \sin x + x$.
- Les racines caractéristiques sont $-1 \pm 2i$, donc $y = e^{-x}(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$. On obtient $y(0) = \lambda = 1$ et $y'(0) = -\lambda + 2\mu = 1$, donc $\mu = 1$. **La solution est** $y(x) = e^{-x}(\cos(2x) + \sin(2x))$.
- La constante -1 est solution particulière. Donc $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x} - 1$. Les conditions donnent $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda - 2\mu = 2$. Ainsi, $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. **La solution est** $y(x) = e^{2x} - 1$.
- Ici, 1 est racine double de $(r - 1)^2$. D'après l'exercice 12, $\frac{x^2}{2}e^x$ est solution particulière. Donc $y = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right)e^x$. D'abord, $y(0) = \mu = 0$. Ensuite, $y'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + (1 + \lambda)x + \lambda + \mu\right)e^x$, donc $y'(0) = \lambda + \mu = \lambda = 1$. **La solution est** $y(x) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)e^x$.

Corrigé de l'exercice 16 : Oscillateur amorti et ses trois régimes

1. La masse subit la force de rappel $-ky$ et le frottement $-h y'$. Les forces verticales se compensent. Le principe fondamental de la dynamique, projeté sur l'axe horizontal, donne $m y'' = -ky - h y'$. Avec $m = 1$ et $k = 4$, on obtient $y'' + h y' + 4y = 0$.
2. Le discriminant de $r^2 + hr + 4$ vaut $\Delta = h^2 - 16$. Si $0 < h < 4$, les racines sont **complexes conjuguées (régime pseudo-périodique)**. Si $h = 4$, -2 est racine double (**régime critique**). Si $h > 4$, il y a deux racines réelles distinctes (**régime apériodique**). Dans ce dernier cas, leur somme $-h$ est négative et leur produit 4 est positif : elles sont toutes deux négatives.
3. Pour $h = 2$, les racines sont $-1 \pm i\sqrt{3}$. Donc $y = e^{-t}(\lambda \cos(\sqrt{3}t) + \mu \sin(\sqrt{3}t))$, avec $y(0) = \lambda = 1$ et $y'(0) = -\lambda + \sqrt{3}\mu = 0$. **Ainsi,**

$$y(t) = e^{-t}\left(\cos(\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right).$$

Pour $h = 4$, on a $y = (\lambda t + \mu)e^{-2t}$, avec $\mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 0$. **Ainsi,**

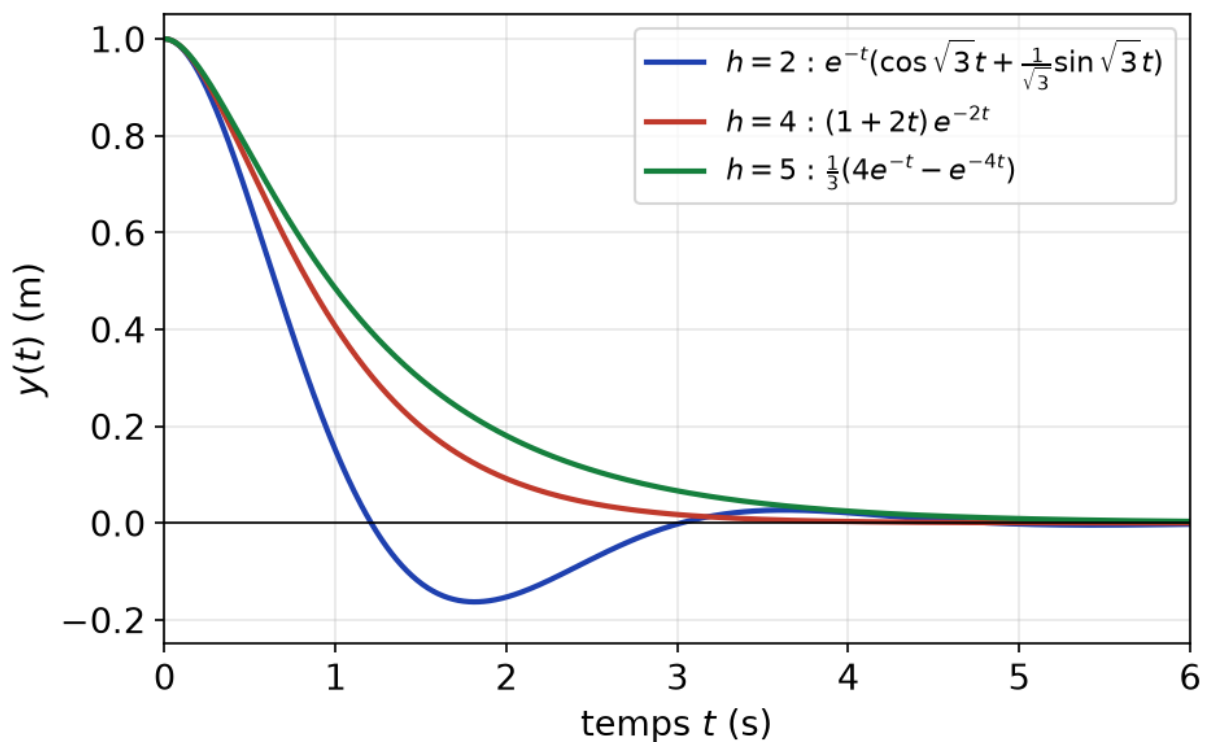
$$y(t) = (1 + 2t)e^{-2t}.$$

Pour $h = 5$, on a $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. Donc $y = \lambda e^{-t} + \mu e^{-4t}$, avec $\lambda + \mu = 1$ et $-\lambda - 4\mu = 0$. On trouve $\mu = -\frac{1}{3}$ et $\lambda = \frac{4}{3}$. **Ainsi,**

$$y(t) = \frac{1}{3}(4e^{-t} - e^{-4t}).$$

La figure ci-dessous compare les trois mouvements.

4. Pour $t = kT$, on a $\sqrt{3} kT = 2k\pi$. Donc $\cos(\sqrt{3}kT) = 1$ et $\sin(\sqrt{3}kT) = 0$. **Par conséquent,** $y(kT) = e^{-kT} = e^{-2k\pi/\sqrt{3}}$. Autrement dit, à chaque pseudo-période, l'élongation est multipliée par $e^{-T} \approx 0,027$.
5. Pour $t \geq 0$, $y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(4 - e^{-3t})$. Or $e^{-3t} \leq 1 < 4$. **Donc** $y(t) > 0$ **pour tout** $t \geq 0$: **la masse ne repasse jamais par l'équilibre.**



Corrigé de l'exercice 17 : Régime forcé d'un circuit RLC

- Les racines de $r^2 + r + 1$ sont $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions homogènes sont donc

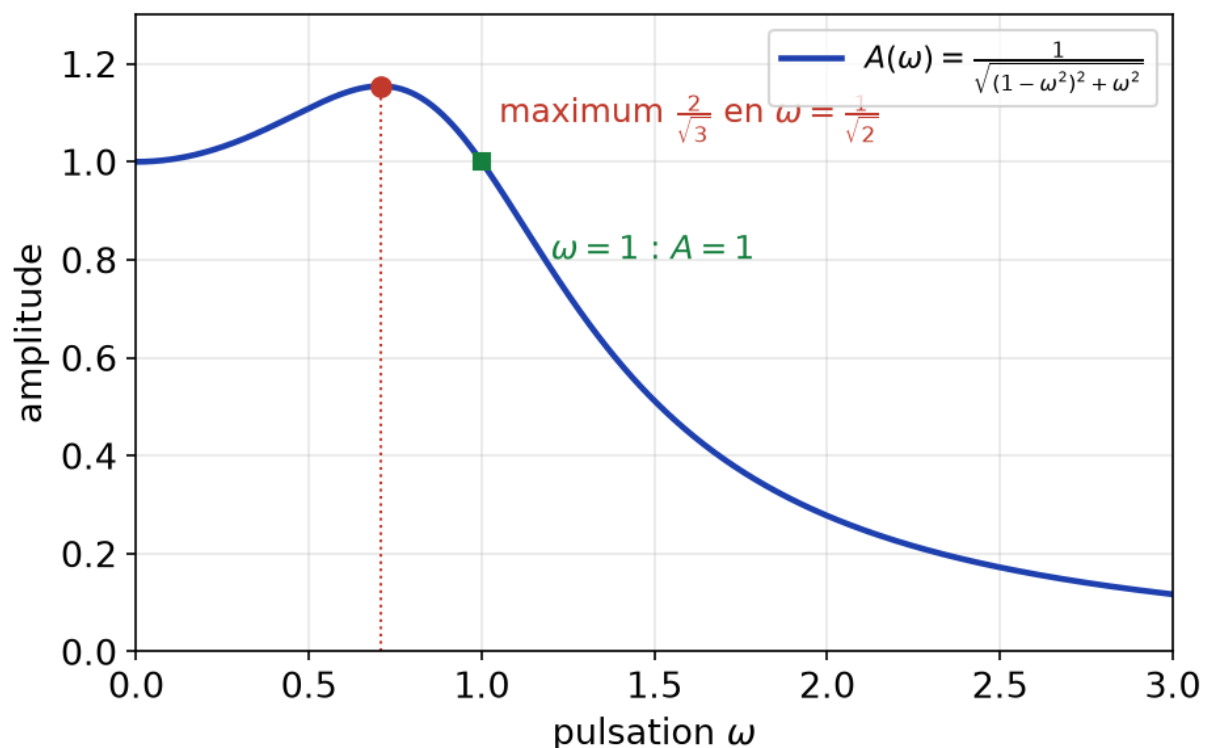
$$y_h(t) = e^{-t/2} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right).$$
On a $|y_h(t)| \leq (|\lambda| + |\mu|) e^{-t/2}$. **Donc toute solution homogène tend vers 0 en $+\infty$.**
- On résout $z'' + z' + z = e^{i\omega t}$. Or $P(i\omega) = 1 - \omega^2 + i\omega$ a une partie imaginaire $\omega \neq 0$, donc $P(i\omega) \neq 0$. Ainsi, $z_p = K e^{i\omega t}$ avec $K = \frac{1}{1 - \omega^2 + i\omega}$. Les coefficients étant réels, $y_\omega = \text{Re}(z_p)$ est solution. **On obtient $K = \frac{1}{1 - \omega^2 + i\omega}$ et**

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}.$$
- Si y est solution, $y - y_\omega$ est solution homogène. D'après la question 1, elle tend vers 0.
Donc $y(t) - y_\omega(t) \rightarrow 0$: après un régime transitoire, toute solution se comporte comme le régime permanent y_ω .
- Posons $u = \omega^2$ et $g(u) = (1 - u)^2 + u = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Ainsi, $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{g(\omega^2)}}$. La fonction g décroît sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Comme $\omega \rightarrow \omega^2$ croît sur $\left]0, +\infty\right[$

, A croît sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, décroît sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, et atteint son maximum

$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. De plus, $A(\omega) \rightarrow 1$ en 0 et $A(\omega) \rightarrow 0$ en $+\infty$, comme le montre la figure ci-dessous.

5. Pour $\omega = 1$, on a $K = \frac{1}{i} = -i$. Donc $z_p = -i(\cos t + i \sin t) = \sin t - i \cos t$.
Ainsi, $y_1(t) = \sin t$. Vérifions : $-\sin t + \cos t + \sin t = \cos t$.



Corrigé de l'exercice 18 : Unicité et comparaison des solutions

- Les solutions homogènes sont les fonctions λe^{-A} . Si l'une d'elles s'annule en x_0 , alors $\lambda e^{-A(x_0)} = 0$. Or une exponentielle ne s'annule pas. **Donc $\lambda = 0$, et la solution est nulle sur I .**
- Posons $d = y_2 - y_1$. Par linéarité, d est solution de l'équation homogène, et $d(x_0) > 0$. D'après la question 1, d ne s'annule jamais sur I . De plus, d est continue sur l'intervalle I . Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde donc un signe constant, celui de $d(x_0)$.
Ainsi, $y_1(x) < y_2(x)$ pour tout $x \in I$.

3. Posons $y_2(x) = x^2 - 2x + 2$. Alors $y_2' + y_2 = 2x - 2 + x^2 - 2x + 2 = x^2$: c'est une solution. Ensuite, $y(0) = 1 < 2 = y_2(0)$. La question 2 s'applique sur $\mathbb{R}$. **Donc** $y(x) < x^2 - 2x + 2$ **pour tout réel** x . Contrôlons : $y = x^2 - 2x + 2 + \lambda e^{-x}$, et $y(0) = 2 + \lambda = 1$ donne $\lambda = -1$. On obtient bien $y(x) = x^2 - 2x + 2 - e^{-x} < x^2 - 2x + 2$.
4. Les fonctions $\sin$ et 0 sont deux solutions distinctes de $y'' + y = 0$. Pourtant, leurs courbes se coupent en $x = 0$. Au second ordre, une seule valeur commune ne suffit donc pas. **D'après le théorème de Cauchy, deux solutions sont égales dès qu'elles ont, en un même point, la même valeur et la même dérivée.** Ici, $\sin'(0) = 1 \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 19 : Équation d'Euler par changement de variable

1. Pour $x > 0$, on a $y(x) = z(\ln x)$, et $z = y \circ \exp$ est deux fois dérivable. En dérivant la composée, $y'(x) = \frac{z'(\ln x)}{x}$ et $y''(x) = \frac{z''(\ln x) - z'(\ln x)}{x^2}$.
2. On reporte ces expressions :

$$x^2 y'' - 2x y' + 2y = z''(\ln x) - 3z'(\ln x) + 2z(\ln x).$$

De plus, $x^3 = e^{3\ln x}$. Or $x \rightarrow \ln x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. **Donc y est solution de (E) si et seulement si $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{3t}$ pour tout réel t .**

3. Les racines caractéristiques sont 1 et 2 , et $P(3) = 2$. Donc $z(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$. On revient à $y(x) = z(\ln x)$. **Les solutions de (E) sont les fonctions $x \rightarrow \lambda x + \mu x^2 + \frac{x^3}{2}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.**
4. On a $y(1) = \lambda + \mu + \frac{1}{2} = 0$ et $y'(1) = \lambda + 2\mu + \frac{3}{2} = 0$. Par soustraction, $\mu = -1$, puis $\lambda = \frac{1}{2}$. **La solution est** $y(x) = \frac{x}{2} - x^2 + \frac{x^3}{2} = \frac{x(x-1)^2}{2}$.

Corrigé de l'exercice 20 : Équations fonctionnelles

1. *Analyse.* Soit f une solution. La fonction $t \rightarrow f(t) + t$ est continue. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $x \rightarrow \int_0^x (f(t) + t) dt$ est dérivable, de dérivée $f(x) + x$. Donc f est dérivable, avec $f' = f + x$ et $f(0) = 1$. On résout $y' - y = x$: la fonction $-x - 1$ est solution particulière, donc $f(x) = \lambda e^x - x - 1$. Ensuite, $f(0) = \lambda - 1 = 1$ donne $\lambda = 2$.

Synthèse. Pour $f(x) = 2e^x - x - 1$, on a

$$1 + \int_0^x (2e^t - 1) dt = 1 + 2e^x - 2 - x = f(x). \text{ L'unique solution est } f(x) = 2e^x - x - 1.$$

2. *Analyse.* Soit f une solution. La fonction $x \rightarrow f(-x)$ est dérivable, donc f' aussi. En dérivant la relation, $f''(x) = -f'(-x)$. Or la relation appliquée en $-x$ donne $f'(-x) = f(x)$. Donc $f'' + f = 0$, et il existe A, B réels tels que $f = A \cos + B \sin$.

Synthèse. On a $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $f(-x) = A \cos x - B \sin x$. Ces fonctions sont égales si et seulement si $A = B$ (on compare en $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$). **Les solutions sont les fonctions $x \rightarrow A(\cos x + \sin x)$, $A \in \mathbb{R}$.**

Point de méthode : dans une équation fonctionnelle, raisonnez par analyse et synthèse. La dérivation fait apparaître une équation différentielle, mais elle peut ajouter des solutions parasites : la synthèse les élimine.

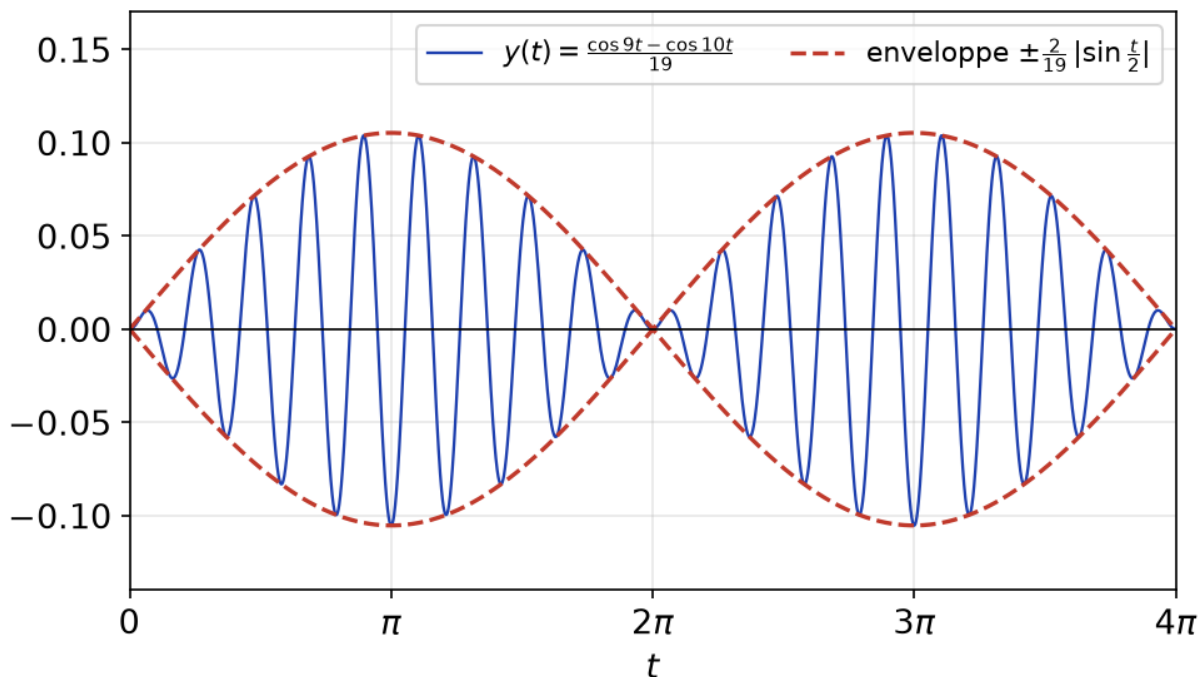
Corrigé de l'exercice 21 : Problème : battements et résonance

1. Les racines de $r^2 + \omega^2$ sont $\pm i\omega$. Comme $\Omega \neq \omega$ et $\Omega, \omega > 0$, $i\Omega$ n'est pas racine, et $P(i\Omega) = \omega^2 - \Omega^2$. Donc $\frac{\cos(\Omega t)}{\omega^2 - \Omega^2}$ est solution particulière. Les solutions sont $y = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) + \frac{\cos(\Omega t)}{\omega^2 - \Omega^2}$. Ensuite, $y(0) = 0$ donne $\lambda = -\frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$.

et $y'(0) = \mu\omega = 0$ donne $\mu = 0$. **Par unicité**, $y_{\Omega}(t) = \frac{\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \Omega^2}$.

2. On utilise $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ avec $p = \Omega t$ et $q = \omega t$. On obtient $y_{\Omega}(t) = \frac{2}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \frac{(\omega - \Omega)t}{2} \sin \frac{(\omega + \Omega)t}{2}$.

3. Avec $\omega = 10$ et $\Omega = 9$, on a $\omega^2 - \Omega^2 = 19$. Donc $y_{\Omega}(t) = \frac{2}{19} \sin \frac{t}{2} \sin \frac{19t}{2}$. Le facteur $\sin \frac{19t}{2}$ oscille vite, avec la pulsation 9,5. En revanche, le facteur $\frac{2}{19} \sin \frac{t}{2}$ varie lentement : il module l'amplitude. **La courbe oscille entre les enveloppes $\pm \frac{2}{19} \left| \sin \frac{t}{2} \right|$, de période 2π , et son amplitude maximale vaut $\frac{2}{19} \approx 0,105$.** Les « ventres » sont centrés sur les instants $\pi + 2k\pi$, et les « nœuds » sur les multiples de 2π , comme sur la figure ci-dessous.



4. Fixons $t \neq 0$ (pour $t = 0$, tout vaut 0). Posons $v = \frac{(\omega - \Omega)t}{2}$, qui tend vers 0 quand $\Omega \rightarrow \omega$. On écrit

$$y_{\Omega}(t) = \frac{2 \sin v}{\omega - \Omega} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega + \Omega)t}{2}}{\omega + \Omega} = t \frac{\sin v}{v} \cdot \frac{\sin \frac{(\omega + \Omega)t}{2}}{\omega + \Omega}.$$

Or $\frac{\sin v}{v} \rightarrow 1$ quand $v \rightarrow 0$. **Donc** $\lim_{\Omega \rightarrow \omega} y_{\Omega}(t) = \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$.

5. Ici, $i\omega$ est racine simple de P , et $P'(i\omega) = 2i\omega$. Une solution complexe de second membre $e^{i\omega t}$ est donc $\frac{t e^{i\omega t}}{2i\omega} = \frac{t}{2\omega}(\sin(\omega t) - i \cos(\omega t))$. Sa partie réelle $\frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$ est solution de l'équation réelle. Ensuite, $y = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) + \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$. D'abord, $y(0) = \lambda = 0$. De plus, la dérivée de $\frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$ est nulle en 0, donc $y'(0) = \mu\omega = 0$.
La solution est $y(t) = \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$: **c'est exactement la limite trouvée à la question 4.**

6. Pour tout t , $|y_{\Omega}(t)| \leq \frac{|\cos(\Omega t)| + |\cos(\omega t)|}{|\omega^2 - \Omega^2|} \leq \frac{2}{|\omega^2 - \Omega^2|}$. En revanche, posons $t_k = \frac{1}{\omega}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Alors $\sin(\omega t_k) = 1$ et $y(t_k) = \frac{t_k}{2\omega} \rightarrow +\infty$.
Chaque y_{Ω} est bornée, mais la solution résonante ne l'est pas : son amplitude croît linéairement avec le temps.

Point de méthode : la résonance apparaît comme la limite des battements. Plus Ω est proche de ω , plus l'enveloppe est lente et haute, jusqu'à devenir la droite $t \rightarrow \frac{t}{2\omega}$.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [équations différentielles linéaires, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur équations différentielles linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Nombres complexes et exponentielle complexe](#), [Primitives et calcul intégral](#)
- Chapitre précédent : [Primitives et calcul intégral](#)
- Chapitre suivant : [Nombres réels et suites numériques](#)
- Le même thème en L1 : [équations différentielles, exercices de maths en L1](#)

- Le même thème en maths spé : [équations différentielles linéaires, exercices de maths spé](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)