

Équations différentielles linéaires

Corrigé de l'exercice 1 : Mise sous forme de système et forme intégrale

1. L'équation s'écrit $x''' = t x' - e^t x + \sin t$. On pose $X = (x, x', x'')$, vu comme une colonne. Les deux premières composantes vérifient $x' = x'$ et $(x')' = x''$. Ainsi,
 $X' = A(t) X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^t & t & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Les coefficients sont continus sur $\mathbb{R}$.

2. La condition initiale s'écrit $X(0) = (1, 0, 2)$. La forme intégrale est donc

$$X(t) = X(0) + \int_0^t (A(s) X(s) + B(s)) \, ds. \text{ Composante par composante, on obtient}$$

$$x(t) = 1 + \int_0^t x'(s) \, ds, \quad x'(t) = \int_0^t x''(s) \, ds,$$

$$x''(t) = 2 + \int_0^t (s x'(s) - e^s x(s) + \sin s) \, ds.$$

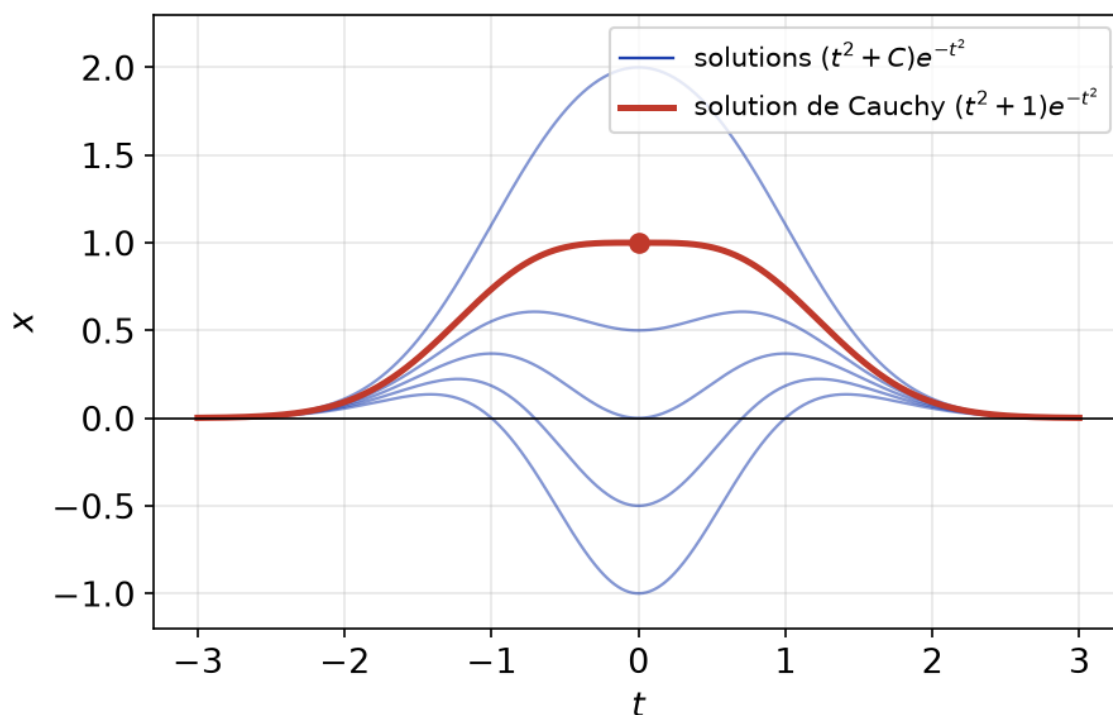
3. Le logarithme impose $t > 0$. Ensuite, pour appliquer le théorème, on divise par $t^2 - 4$, ce qui exige $t \neq 2$. Sur $]0, 2[$, les coefficients $\frac{t}{t^2 - 4}$ et $\frac{\ln t}{t^2 - 4}$ sont continus. Par conséquent, $J =]0, 2[$.
4. La fonction nulle est solution sur J et vérifie les mêmes conditions en $t_0 = 1$. D'après l'unicité

du théorème de Cauchy linéaire, x est nulle sur J .

Corrigé de l'exercice 2 : Deux équations scalaires d'ordre 1

1. L'équation homogène $x' = -2tx$ a pour solutions $C e^{-t^2}$. Cherchons ensuite $x = C(t) e^{-t^2}$. On obtient $C'(t) e^{-t^2} = 2t e^{-t^2}$, donc $C(t) = t^2 + K$. Ainsi, **les solutions sont** $x(t) = (t^2 + K) e^{-t^2}$, $K \in \mathbb{R}$. La condition $x(0) = 1$ donne $K = 1$, d'où $x(t) = (t^2 + 1) e^{-t^2}$. Par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2} \rightarrow 0$, donc $x(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$.

De plus, $x'(t) = e^{-t^2} (2t - 2t(t^2 + 1)) = -2t^3 e^{-t^2}$. La solution croît donc sur $\mathbb{R}_-$, décroît sur $\mathbb{R}_+$ et atteint son maximum 1 en 0. La figure ci-dessous la place parmi les autres solutions, qui tendent toutes vers 0.



2. Comme $1 + t^2 > 0$, on normalise : $x' + \frac{t}{1+t^2} x = \frac{1}{1+t^2}$, à coefficients continus sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $\frac{t}{1+t^2}$ est $\frac{1}{2} \ln(1+t^2)$. Les solutions homogènes sont donc $\frac{C}{\sqrt{1+t^2}}$. En

faisant varier la constante, on obtient $\frac{C'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2}$, soit $C'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Ainsi,
 $C(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + K$. Par conséquent, $x(t) = \frac{\ln(t + \sqrt{1+t^2}) + K}{\sqrt{1+t^2}}$, et la
condition $x(0) = 0$ donne $K = 0$.

Corrigé de l'exercice 3 : Principe de superposition

1. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0$. Donc **les solutions homogènes sont** $C_1 e^t + C_2 e^{2t}$.

2. Posons $x = \alpha t e^t$. Alors $x' = \alpha(1+t)e^t$ et $x'' = \alpha(2+t)e^t$. Ainsi,

$$x'' - 3x' + 2x = \alpha e^t (2+t-3-3t+2t) = -\alpha e^t.$$

Donc $\alpha = -1$ convient. Ensuite, pour $x = \beta e^{3t}$, on trouve
 $(9-9+2)\beta e^{3t} = 2\beta e^{3t}$, donc $\beta = \frac{1}{2}$.

3. D'après le principe de superposition, $-t e^t + \frac{1}{2} e^{3t}$ est une solution particulière. Par conséquent, les solutions sont

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - t e^t + \frac{1}{2} e^{3t}.$$

Les conditions donnent $C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0$ et $C_1 + 2C_2 - 1 + \frac{3}{2} = 0$. Par différence,
 $C_2 = 0$, puis $C_1 = -\frac{1}{2}$. Finalement, $x(t) = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) - t e^t$.

Corrigé de l'exercice 4 : Wronskien d'une équation d'Euler

1. Pour $x_1 = t$: $0 - 2t + 2t = 0$. Pour $x_2 = t^2$: $2t^2 - 4t^2 + 2t^2 = 0$. **Ce sont donc des solutions de (H).**

2. On a $W(t) = x_1 x_2' - x_2 x_1' = t \cdot 2t - t^2 \cdot 1 = t^2$. Sur I , l'équation se normalise en divisant par $t^2 \neq 0$, avec des coefficients continus. L'espace des solutions est donc de dimension 2. Comme $W(t) = t^2 \neq 0$, (x_1, x_2) **est une base**.

3. Sous forme résolue, $a(t) = -\frac{2}{t}$. La formule de Liouville annonce $W' = \frac{2}{t} W$. Or $W'(t) = 2t = \frac{2}{t} t^2$: **la formule est vérifiée.**
4. Pour $x = \alpha t^3$: $t^2 \cdot 6\alpha t - 2t \cdot 3\alpha t^2 + 2\alpha t^3 = 2\alpha t^3$. Donc $\alpha = \frac{1}{2}$. Les solutions de (E) sur I sont donc $x(t) = \frac{t^3}{2} + \lambda t + \mu t^2$. Les conditions en 1 donnent $\frac{1}{2} + \lambda + \mu = 0$ et $\frac{3}{2} + \lambda + 2\mu = 0$. Ainsi, $\mu = -1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$. Finalement, $x(t) = \frac{t(t-1)^2}{2}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Structure de l'espace des solutions

1. L'équation est normalisée et son coefficient $t \rightarrow e^t$ est continu sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy linéaire s'applique donc : pour tout (y_0, y_1) , il existe une unique solution telle que $x(0) = y_0$ et $x'(0) = y_1$. Autrement dit, φ **est bijective**. Elle est de plus linéaire, et S est un espace vectoriel par linéarité de l'équation. Donc $\dim S = 2$.
2. Supposons par l'absurde $x'(t_0) = 0$. Alors x et la fonction nulle résolvent le même problème de Cauchy en t_0 . Par unicité, $x = 0$, ce qui est exclu. Donc $x'(t_0) \neq 0$: **les zéros sont simples.**
3. L'équation n'a pas de terme en x' . La formule de Liouville donne donc $W' = 0$, et W est constant. Or $W(0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. Ainsi, $W = 1$ **sur** $\mathbb{R}$.
4. Soient $y, z \in S$ nulles en t_0 . Alors leur wronskien vaut $W(t_0) = y(t_0)z'(t_0) - z(t_0)y'(t_0) = 0$. D'après la caractérisation des bases, (y, z) est liée. Par conséquent, **l'une est multiple de l'autre.**

Corrigé de l'exercice 6 : Variation des constantes à coefficients constants

1. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ a la racine double 1. Donc $x_1 = e^t$ **et** $x_2 = t e^t$ forment une base. Leur wronskien vaut $W = e^t(1+t)e^t - t e^t e^t = e^{2t}$.

2. Avec $g(t) = \frac{e^t}{t}$, les formules donnent $\lambda' = -\frac{x_2 g}{W} = -\frac{t e^t e^t}{t e^{2t}} = -1$ et $\mu' = \frac{x_1 g}{W} = \frac{1}{t}$. On prend $\lambda = -t$ et $\mu = \ln t$. La solution particulière vaut $-t e^t + t \ln(t) e^t$. Or $-t e^t$ est une solution homogène. Par conséquent, **les solutions sont** $x(t) = (C_1 + C_2 t + t \ln t) e^t$.
3. On a $x(1) = (C_1 + C_2) e$. Ensuite, $x'(t) = e^t (C_1 + C_2 t + t \ln t + C_2 + \ln t + 1)$, donc $x'(1) = e (C_1 + 2 C_2 + 1)$. Les conditions donnent $C_1 = -C_2$ et $C_2 + 1 = 0$. Ainsi, $x(t) = (1 - t + t \ln t) e^t$.

Corrigé de l'exercice 7 : Équation de Legendre d'indice 1

1. Sur I , $1 - t^2 > 0$. On peut donc normaliser, avec des coefficients continus. D'après le théorème de Cauchy linéaire, **l'espace des solutions est de dimension 2**. Pour $x_1 = t$: $0 - 2t + 2t = 0$, donc x_1 **est solution**.
2. Sous forme résolue, $a(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$. La formule de Liouville donne $W' = \frac{2t}{1-t^2} W$. Or une primitive de $\frac{2t}{1-t^2}$ est $-\ln(1-t^2)$. Donc $W(t) = \frac{C}{1-t^2}$.
3. Sur $]0, 1[$, x_1 ne s'annule pas et $\left(\frac{x_2}{t}\right)' = \frac{1}{t^2(1-t^2)}$. Or $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}$, ce qui est la fraction cherchée. Une primitive est $-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$. En multipliant par t , on obtient $x_2(t) = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1$.
4. Posons $L(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$, définie sur I , avec $L'(t) = \frac{1}{1-t^2}$. Alors $x_2 = t L - 1$, puis $x_2' = L + \frac{t}{1-t^2}$. Ensuite,

$$x_2'' = \frac{1}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{2}{(1-t^2)^2}.$$

Par conséquent,

$$(1-t^2) x_2'' - 2t x_2' + 2x_2 = \frac{2}{1-t^2} - 2tL - \frac{2t^2}{1-t^2} + 2tL - 2 = 0.$$

Ainsi, x_2 est solution sur I . De plus,

$W(0) = x_1(0) x_2'(0) - x_2(0) x_1'(0) = 0 - (-1) \cdot 1 = 1 \neq 0$. Donc **les solutions sur I sont les** $\lambda t + \mu x_2(t)$.

5. Quand $t \rightarrow 1^-$, $L(t) \rightarrow +\infty$, donc $x_2 \rightarrow +\infty$. Quand $t \rightarrow -1^+$, $L(t) \rightarrow -\infty$.

et $t \rightarrow -1$, donc encore $x_2 \rightarrow +\infty$. Si $\mu \neq 0$, λt reste borné et μx_2 ne l'est pas. Par conséquent, **les solutions bornées sont les λt** .

Point de méthode : la formule de Liouville donne le wronskien sans connaître x_2 ; une seule intégration suffit alors pour obtenir la seconde solution.

Corrigé de l'exercice 8 : Abaissement de l'ordre par changement de fonction

1. Pour $x_1 = t$: $(1+t^2) \cdot 0 - 2t + 2t = 0$. **C'est donc une solution de (H) .**

2. Avec $x = tz$, on a $x' = z + tz'$ et $x'' = 2z' + tz''$. En reportant,

$$(1+t^2)(2z' + tz'') - 2t(z + tz') + 2tz = t(1+t^2)z'' + 2z'.$$

Les termes en z disparaissent, comme prévu. Ainsi, $w = z'$ vérifie

$$t(1+t^2)w' + 2w = 0. \text{ Or } \frac{2}{t(1+t^2)} = \frac{2}{t} - \frac{2t}{1+t^2}. \text{ Donc}$$

$$w = K \exp(-2 \ln t + \ln(1+t^2)) = K \frac{1+t^2}{t^2} = K \left(1 + \frac{1}{t^2}\right). \text{ En intégrant,}$$

$$z = K \left(t - \frac{1}{t}\right) + D, \text{ puis } x = K(t^2 - 1) + Dt. \text{ On retient } x_2(t) = t^2 - 1.$$

3. On vérifie x_2 sur $\mathbb{R}$: $2(1+t^2) - 4t^2 + 2(t^2 - 1) = 0$. Le coefficient $1+t^2$ ne s'annule pas, donc l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2. Enfin,

$$W = t \cdot 2t - (t^2 - 1) = t^2 + 1 \neq 0. \text{ Par conséquent, } (x_1, x_2) \text{ est une base sur } \mathbb{R}.$$

4. On normalise : $g(t) = 1 + t^2$. Les formules donnent $\lambda' = -\frac{(t^2-1)(1+t^2)}{1+t^2} = 1 - t^2$ et

$$\mu' = \frac{t(1+t^2)}{1+t^2} = t. \text{ On prend } \lambda = t - \frac{t^3}{3} \text{ et } \mu = \frac{t^2}{2}. \text{ La solution particulière vaut}$$

$$t^2 - \frac{t^4}{3} + \frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2} = \frac{t^4}{6} + \frac{t^2}{2}. \text{ Comme } \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(t^2 - 1) + \frac{1}{2}, \text{ on peut aussi garder } \frac{t^4}{6} + \frac{1}{2}.$$

. Vérifions-la : $(1+t^2) \cdot 2t^2 - 2t \cdot \frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{3} + 1 = t^4 + 2t^2 + 1$. Finalement,

$$x(t) = \frac{t^4}{6} + \frac{1}{2} + \lambda t + \mu(t^2 - 1), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Corrigé de l'exercice 9 : Variation des constantes et condition initiale

1. Le système s'écrit $\lambda' \cos t + \mu' \sin t = 0$ et $-\lambda' \sin t + \mu' \cos t = \tan t$. Son déterminant est le wronskien $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Ainsi, $\lambda' = -\sin t \tan t = -\frac{\sin^2 t}{\cos t}$ et $\mu' = \cos t \tan t = \sin t$.

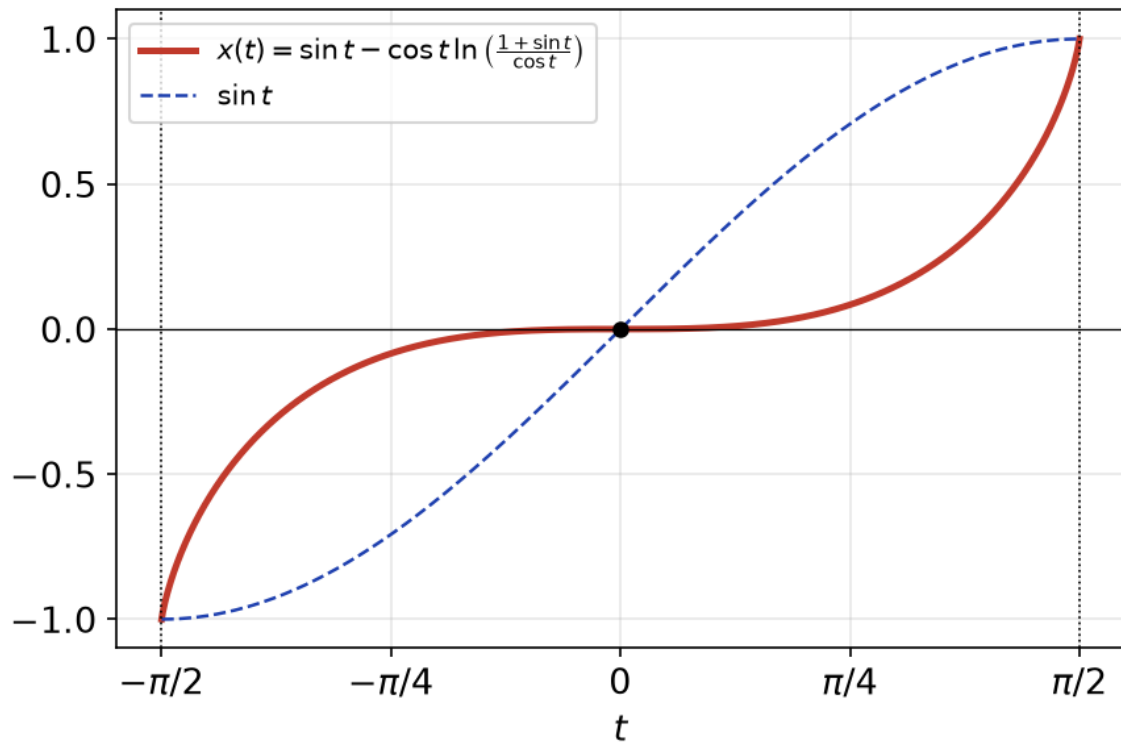
2. Sur I , $1 + \sin t > 0$ et $\cos t > 0$. La dérivée de $\ln(1 + \sin t) - \ln(\cos t)$ vaut

$$\frac{\cos t}{1 + \sin t} + \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin t + \sin^2 t}{(1 + \sin t) \cos t} = \frac{1}{\cos t}.$$

Ensuite, $\lambda' = -\frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} = \cos t - \frac{1}{\cos t}$. On prend donc $\lambda = \sin t - \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)$ et $\mu = -\cos t$. La solution particulière vaut $\lambda \cos t + \mu \sin t = -\cos t \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)$. Par conséquent, $x(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t - \cos t \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)$.

3. En 0 , le logarithme est nul, donc $x(0) = \alpha = 0$. Ensuite, la dérivée du dernier terme vaut $\sin t \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right) - \cos t \cdot \frac{1}{\cos t}$, soit -1 en 0 . Donc $x'(0) = \beta - 1 = 0$. Ainsi, $x(t) = \sin t - \cos t \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right)$. Quand $t \rightarrow \pi/2$, on écrit $\cos t \ln\left(\frac{1 + \sin t}{\cos t}\right) = \cos t \ln(1 + \sin t) - \cos t \ln(\cos t)$. Les deux termes tendent vers 0 , car $u \ln u \rightarrow 0$ en 0^+ . Donc $x(t) \rightarrow 1$.

La figure ci-dessous représente cette solution. Elle est très plate en 0 : en effet, $x''(0) = \tan 0 - x(0) = 0$ et $x'''(0) = 1$, donc $x(t) \sim t^3/6$.



Corrigé de l'exercice 10 : Formule intégrale et résonance

1. La base $(\cos, \sin)$ a pour wronskien 1. La variation des constantes donne

$\lambda' = -\sin(t) f(t)$ et $\mu' = \cos(t) f(t)$. On choisit $\lambda(t) = -\int_0^t \sin(s) f(s) ds$ et

$\mu(t) = \int_0^t \cos(s) f(s) ds$, de classe C^1 car f est continue. Alors

$$x(t) = \int_0^t (\sin t \cos s - \cos t \sin s) f(s) ds = \int_0^t \sin(t-s) f(s) ds.$$

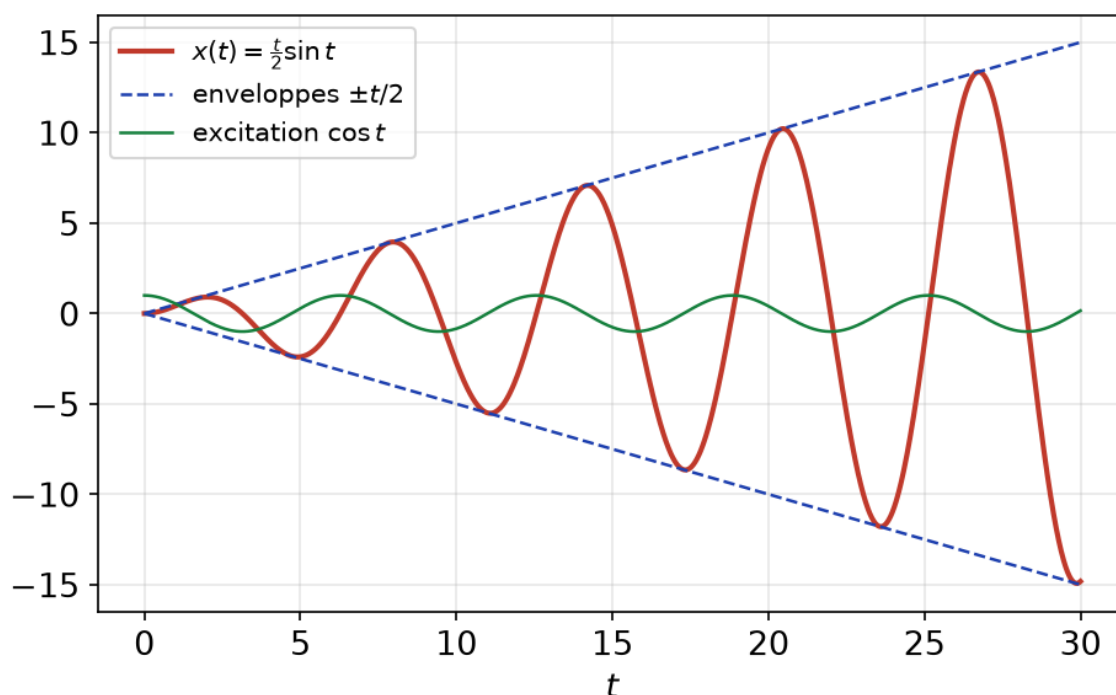
De plus, $x(0) = 0$. Par construction, $x' = -\lambda \sin + \mu \cos$, donc $x'(0) = \mu(0) = 0$.
Par unicité du théorème de Cauchy linéaire, **c'est l'unique solution.**

2. Pour $f = \cos$, on linéarise : $\sin(t-s) \cos s = \frac{1}{2} (\sin t + \sin(t-2s))$. Ainsi,

$$x(t) = \frac{t}{2} \sin t + \frac{1}{4} [\cos(t-2s)]_0^t = \frac{t}{2} \sin t + \frac{1}{4} (\cos t - \cos t).$$

Donc $x(t) = \frac{t}{2} \sin t$. En $t_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x(t_k) = \frac{t_k}{2} \rightarrow +\infty$. Par conséquent, **la solution n'est pas bornée** : c'est le phénomène de **résonance**, car la pulsation de l'excitation est celle de l'oscillateur.

Comme le montre la figure ci-dessous, l'amplitude croît linéairement entre les enveloppes $\pm t/2$, alors que l'excitation reste bornée.



3. Soit $t \in [0, \pi]$. Pour $s \in [0, t]$, on a $0 \leq t - s \leq \pi$, donc $\sin(t - s) \geq 0$. De plus, $f(s) \geq 0$. L'intégrande est positive et les bornes sont dans l'ordre croissant. Donc $x(t) \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

Corrigé de l'exercice 11 : Solutions développables en série entière

1. Sur $] -R, R[$, on dérive terme à terme. Le coefficient de t^k dans $(1 + t^2) x''$ vaut $(k+2)(k+1) a_{k+2} + k(k-1) a_k$. Celui de $4t x'$ vaut $4k a_k$, et celui de $2x$ vaut $2 a_k$. Or $k^2 - k + 4k + 2 = (k+1)(k+2)$. Par unicité du développement, on obtient

$$(k+1)(k+2)(a_{k+2} + a_k) = 0, \text{ soit } a_{k+2} = -a_k.$$

2. Ainsi, $a_{2p} = (-1)^p a_0$ et $a_{2p+1} = (-1)^p a_1$. Si $(a_0, a_1) \neq (0, 0)$, les coefficients sont bornés sans tendre vers 0 : le rayon vaut donc 1. Réciproquement, ces séries vérifient la récurrence, donc elles sont solutions sur $] -1, 1[$. Leur somme vaut $x(t) = \frac{a_0 + a_1 t}{1 + t^2}$, de rayon 1.

3. Notons $u(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \frac{t}{1+t^2}$. Le membre de gauche de (H) , appliqué à u , est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$. Elle est nulle sur $] -1, 1[$, donc son numérateur a une infinité de racines. Par conséquent, elle est nulle sur $\mathbb{R}$, et de même pour v . Ensuite, $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $v(0) = 0$ et $v'(0) = 1$, donc $W(0) = 1$. Comme $1 + t^2$ ne s'annule pas, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2. Ainsi, (u, v) **est une base sur $\mathbb{R}$** .

4. On a $((1+t^2)x)' = 2tx + (1+t^2)x'$, puis $((1+t^2)x)'' = 2x + 4tx' + (1+t^2)x''$. Donc (H) équivaut à $((1+t^2)x)'' = 0$, c'est-à-dire $(1+t^2)x = \alpha t + \beta$. On retrouve $x = \frac{\alpha t + \beta}{1+t^2}$. Le rayon fini s'explique par les pôles complexes $\pm i$, alors que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Série entière et raccordement en 0

1. Soit $x = \sum a_k t^k$ de rayon $R > 0$. Le coefficient de t^k dans $4tx''$ vaut $4(k+1)ka_{k+1}$, et celui de $2x'$ vaut $2(k+1)a_{k+1}$. L'équation donne donc $(k+1)(4k+2)a_{k+1} = a_k$, soit $a_{k+1} = \frac{a_k}{(2k+2)(2k+1)}$. Par récurrence, $a_k = \frac{a_0}{(2k)!}$.

Le rapport $\left| \frac{a_{k+1} t^{k+1}}{a_k t^k} \right| = \frac{|t|}{(2k+2)(2k+1)}$ tend vers 0, donc **le rayon est infini**. Les solutions développables sont donc les $a_0 f$, avec $f(t) = \sum \frac{t^k}{(2k)!}$.

2. Pour $t > 0$, $t^k = (\sqrt{t})^{2k}$, donc $f(t) = \text{ch}\sqrt{t}$. Pour $t < 0$, $t^k = (-1)^k (\sqrt{-t})^{2k}$, donc $f(t) = \cos\sqrt{-t}$.

3. Sur $]0, +\infty[$, posons $u = \sqrt{t}$, avec $u' = \frac{1}{2u}$. Pour $x = \text{sh } u$, on obtient

$$x' = \frac{\text{ch } u}{2u} \text{ et } x'' = \frac{\text{sh } u}{4u^2} - \frac{\text{ch } u}{4u^3}.$$

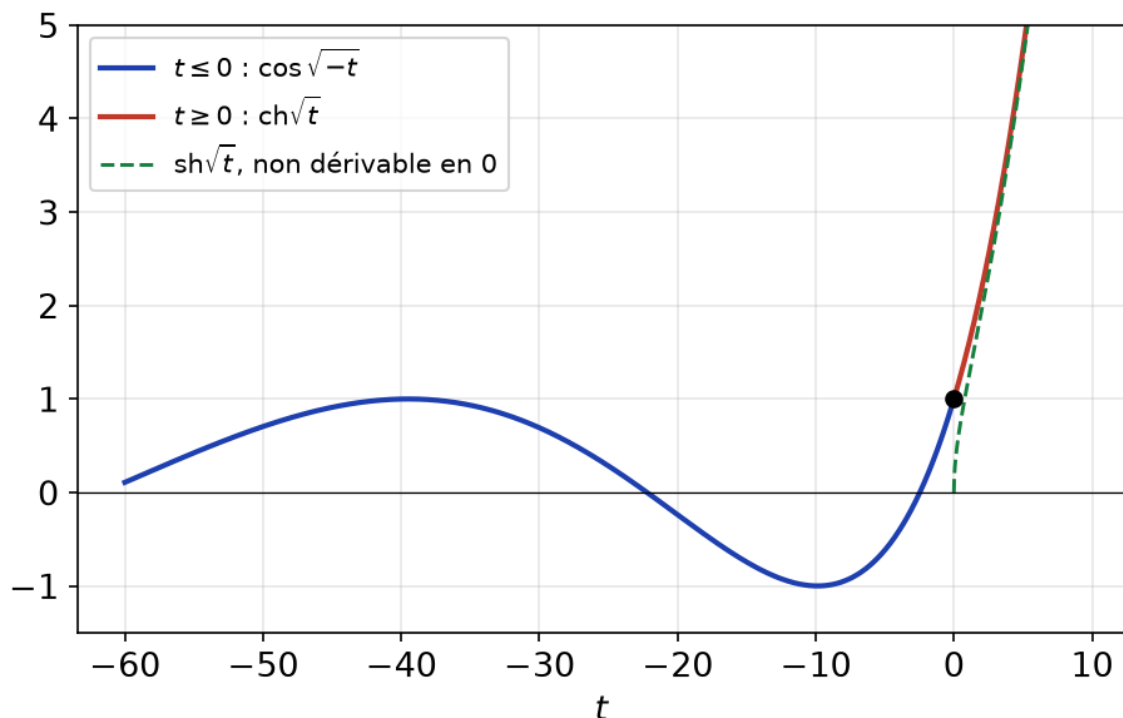
Alors $4tx'' + 2x' - x = \text{sh } u - \frac{\text{ch } u}{u} + \frac{\text{ch } u}{u} - \text{sh } u = 0$. Ensuite, le wronskien de

$(\text{ch } u, \text{sh } u)$ vaut $u'(\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \neq 0$. Comme l'équation se normalise sur

$]0, +\infty[$, les solutions y sont les $A \operatorname{ch}\sqrt{t} + B \operatorname{sh}\sqrt{t}$. Le même calcul avec $u = \sqrt{-t}$ montre que $\sin\sqrt{-t}$ est solution, et le wronskien de $(\cos u, \sin u)$ vaut $u' = -\frac{1}{2\sqrt{-t}} \neq 0$. Sur $]-\infty, 0[$, les solutions sont les $C \cos\sqrt{-t} + D \sin\sqrt{-t}$.

4. Soit x une solution sur $\mathbb{R}$. Par restriction, elle a les formes précédentes de chaque côté. La continuité en 0 donne $x(0) = A = C$. Ensuite, $g = x - A f$ est dérivable en 0, nulle en 0, et vaut $B \operatorname{sh}\sqrt{t}$ pour $t > 0$. Or $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{t}}{t} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$. Donc $B = 0$, et de même $D = 0$. Réciproquement, $A f$ est somme d'une série entière de rayon infini, donc de classe C^∞ , et elle vérifie (H) sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, **les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $A f$, et leur ensemble est de dimension 1.**

La figure ci-dessous montre f , qui oscille pour $t < 0$ et croît pour $t > 0$. La solution $\operatorname{sh}\sqrt{t}$ part au contraire de 0 avec une tangente verticale, ce qui interdit tout raccord.



Corrigé de l'exercice 13 : Raccordements à l'ordre 1

1. Sur $]0, +\infty[$, la forme résolue est $x' - \frac{x}{t} = t$. Les solutions homogènes sont les $C t$, et

t^2 est solution particulière : $t \cdot 2t - t^2 = t^2$. Donc $x = t^2 + C_2 t$, et de même $x = t^2 + C_1 t$ sur $] -\infty, 0[$. Soit x une solution sur $\mathbb{R}$. Par continuité, $x(0) = 0$. Ensuite, $\frac{x(t) - x(0)}{t} = t + C_i$ tend vers C_1 à gauche et C_2 à droite. La dérivabilité impose donc $C_1 = C_2$. Enfin, l'équation en 0 s'écrit $0 - 0 = 0$. Ainsi, **les solutions sont les $t^2 + C t$: espace affine de dimension 1.**

2. Sur chaque demi-droite, les solutions homogènes sont les $C t^2$, et t^3 est solution : $3t^3 - 2t^3 = t^3$. Donc $x = t^3 + C_1 t^2$ pour $t < 0$ et $x = t^3 + C_2 t^2$ pour $t > 0$, avec $x(0) = 0$ par continuité. Le taux $\frac{x(t)}{t} = t^2 + C_i t$ tend vers 0 des deux côtés : x est dérivable en 0, avec $x'(0) = 0$. De plus, l'équation est vérifiée en 0. Par conséquent, **les solutions dépendent de deux constantes indépendantes : dimension 2.**

3. Les solutions homogènes sont les $\frac{C}{t^2}$, et $\frac{t^2}{4}$ est solution : $\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} = t^2$. Donc $x = \frac{t^2}{4} + \frac{C_i}{t^2}$ de chaque côté. Une limite finie en 0 impose $C_1 = C_2 = 0$. Réciproquement, $\frac{t^2}{4}$ vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$. Ainsi, **il existe une unique solution, $\frac{t^2}{4}$: dimension 0.**

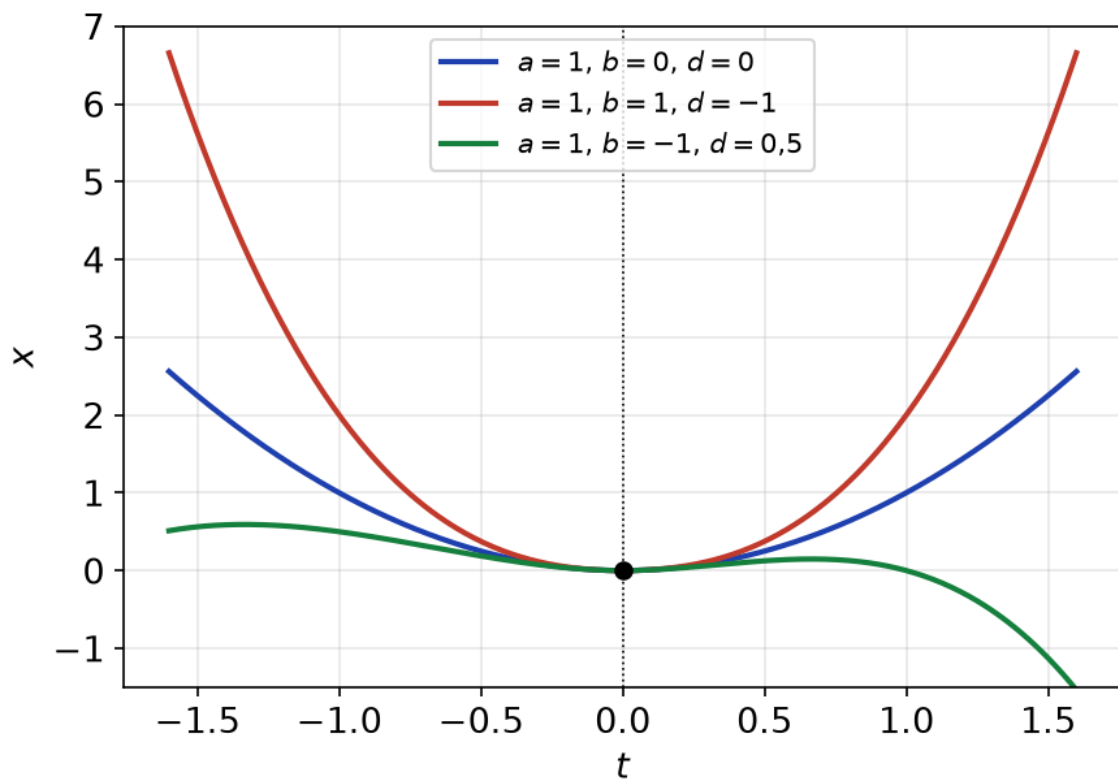
Point de méthode : on écrit toujours deux constantes indépendantes, une par intervalle, avant d'étudier le recollement.

Corrigé de l'exercice 14 : Raccordements à l'ordre 2

- Pour $x = t^r$ avec $t > 0$, on obtient $(r(r-1) - 4r + 6) t^r = (r-2)(r-3) t^r$. Donc t^2 et t^3 sont solutions. Leur wronskien vaut $t^2 \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 2t = t^4 \neq 0$. L'équation se normalise sur $]0, +\infty[$, donc **les solutions y sont les $a t^2 + b t^3$** . Les mêmes calculs, valables pour $t < 0$, donnent **$c t^2 + d t^3$ sur $] -\infty, 0[$.**
- Soit x une solution sur $\mathbb{R}$. Par continuité, $x(0) = 0$. Ensuite, $x'(t)$ vaut $2at + 3bt^2$ à droite et $2ct + 3dt^2$ à gauche. Le taux $\frac{x(t)}{t}$ tend vers 0, donc $x'(0) = 0$. Puis $\frac{x'(t) - x'(0)}{t}$ tend vers $2a$ à droite et $2c$ à gauche. Ainsi, x est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $a = c$. Enfin, l'équation en 0 se réduit à $6x(0) = 0$, qui est vérifiée. Par conséquent, **les solutions sur $\mathbb{R}$ forment un espace de dimension 3**, de paramètres a , b et d .

La figure ci-dessous montre trois solutions de même partie t^2 , mais de parties cubiques

différentes à gauche et à droite. Elles ont toutes la même tangente horizontale et la même dérivée seconde en 0 .



3. Toute solution vérifie $x(0) = x'(0) = 0$. Si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, **il n'y a aucune solution**. Si $\alpha = \beta = 0$, **il y en a une infinité**, formant un espace de dimension 3. Il n'y a aucune contradiction : le théorème de Cauchy linéaire exige une équation normalisée à coefficients continus. Or la division par t^2 fait apparaître $-\frac{4}{t}$ et $\frac{6}{t^2}$, qui ne sont pas définis en 0 .

Corrigé de l'exercice 15 : Équation d'Euler et changement de variable

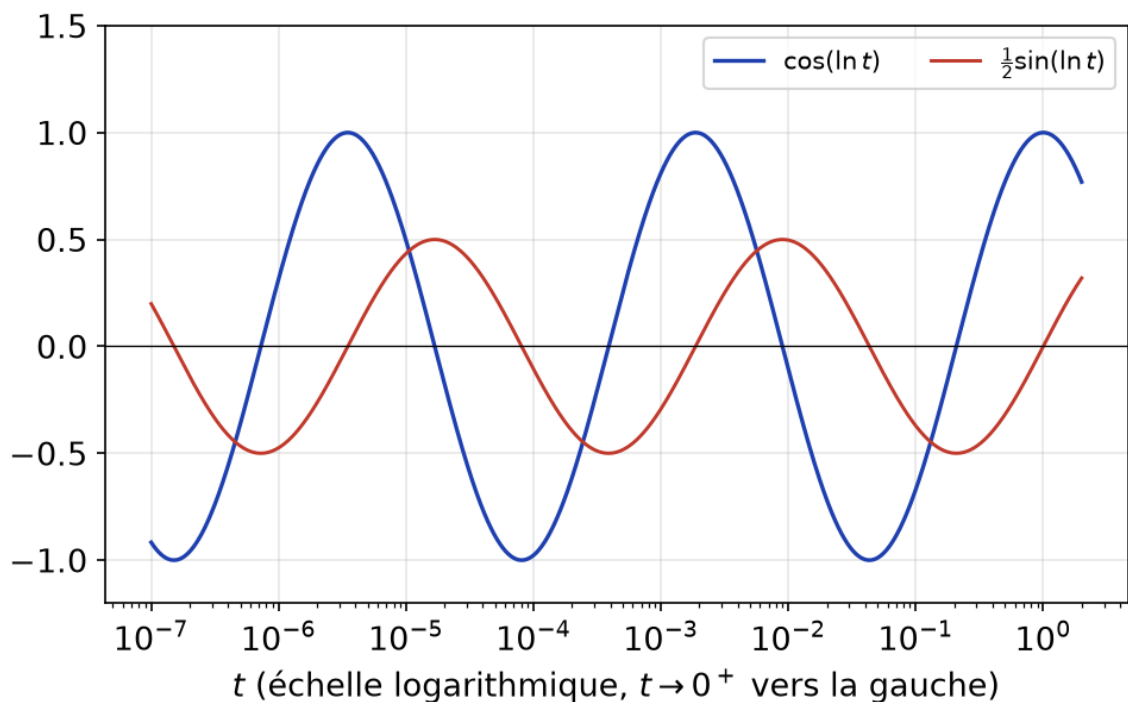
1. Comme $\ln$ est une bijection C^∞ de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, x est deux fois dérivable si et seulement si y l'est, et $x(t) = y(\ln t)$. On dérive : $x'(t) = \frac{y'(\ln t)}{t}$, puis
- $$x''(t) = \frac{y''(\ln t) - y'(\ln t)}{t^2}. \text{ Donc}$$

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + x(t) = y''(\ln t) + y(\ln t).$$

Par conséquent, x est solution de (H) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On a $y = A \cos + B \sin$. Donc, sur $]0, +\infty[$, $x(t) = A \cos(\ln t) + B \sin(\ln t)$.
 Pour $t < 0$, $x(t) = y(\ln(-t))$. La dérivée de $\ln(-t)$ vaut $\frac{1}{t}$, donc les mêmes calculs s'appliquent. Ainsi, sur $] -\infty, 0[$, $x(t) = C \cos(\ln |t|) + D \sin(\ln |t|)$.
3. Soit x une solution sur $\mathbb{R}$. Elle est continue en 0 , donc $x(t)$ a une limite quand $t \rightarrow 0^+$. Autrement dit, $y(u) = A \cos u + B \sin u$ a une limite quand $u \rightarrow -\infty$. Or y est 2π -périodique : elle est donc constante. Comme $y'' + y = 0$, cette constante est nulle, d'où $A = B = 0$. De même, $C = D = 0$. Enfin, la fonction nulle convient. Par conséquent, **la seule solution sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle**.

La figure ci-dessous, en échelle logarithmique, montre pourquoi : les solutions oscillent indéfiniment quand $t \rightarrow 0^+$, sans jamais se stabiliser.



Corrigé de l'exercice 16 : Système à matrice antisymétrique

- On a $|X|^2 = X^T X$. En dérivant,
 $(X^T X)' = X^T A^T X + X^T A X = X^T (A^T + A) X = 0$, car $A^T = -A$.
Donc $|X(t)|^2$ **est constante**.
- Le même calcul donne $(X_i^T X_j)' = X_i^T (A^T + A) X_j = 0$. Ainsi,
 $X_i(t)^T X_j(t) = X_i(0)^T X_j(0) = \delta_{ij}$. Les colonnes de $R(t)$ forment donc une famille orthonormée. Par conséquent, $R(t) \in O(n)$.
- La fonction $t \rightarrow \det R(t)$ est continue, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est donc constante, et $\det R(0) = \det I_n = 1$. Donc $\det R(t) = 1$. Or $\det R(t)$ est le **wronskien** de $(X_1, \dots, X_n)$ dans la base canonique. Il ne s'annule pas, ce qui confirme que ces solutions forment une base.
- Posons $Q(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta = \theta(t)$. Alors
 $Q' = \omega(t) \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$. Or ce produit est exactement $A(t) Q(t)$. De plus,
 $Q(0) = I_2$. Chaque colonne de Q résout donc le même problème de Cauchy que la colonne de R correspondante. Par unicité, $R(t)$ **est la rotation d'angle $\theta(t)$** .

Corrigé de l'exercice 17 : Équation d'Airy

- L'équation est normalisée, de coefficient $t \rightarrow -t$ continu. D'après le théorème de Cauchy linéaire, **l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2**.
- On a $x'' = \sum_{k \geq 0} (k+2)(k+1) a_{k+2} t^k$ et $tx = \sum_{k \geq 1} a_{k-1} t^k$. Par unicité du développement, le coefficient constant donne $2a_2 = 0$. Ensuite, pour $k \geq 1$,
 $(k+2)(k+1) a_{k+2} = a_{k-1}$. En remplaçant k par $k+1$, on obtient
 $a_{k+3} = \frac{a_k}{(k+3)(k+2)}$. En particulier, tous les a_{3p+2} sont nuls.
- Pour y_0 , seuls les a_{3p} sont non nuls, et ils sont strictement positifs. Pour $t \neq 0$, le rapport de deux termes consécutifs vaut $\frac{|t|^3}{(3p+3)(3p+2)} \rightarrow 0$. La série converge donc pour tout t : **le rayon est infini**. Le même argument vaut pour y_1 . Une série entière se dérive terme à terme sur

son disque de convergence. La récurrence garantit alors que y_0 et y_1 sont solutions sur $\mathbb{R}$.

4. On a $y_0(0) = 1$, $y_0'(0) = 0$, $y_1(0) = 0$ et $y_1'(0) = 1$, donc $W(0) = 1$. L'équation ne contient pas de terme en x' , donc W est constant : $W = 1$. Ainsi, (y_0, y_1) est une base. Par conséquent, **toute solution est développable en série entière de rayon infini**.
5. Pour $t \geq 0$, tous les termes de $y_0(t)$ sont positifs. On garde les deux premiers : $a_0 = 1$ et $a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$. Donc $y_0(t) \geq 1 + \frac{t^3}{6}$, et $y_0(t) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 18 : Théorème de séparation de Sturm

1. L'équation n'a pas de terme en x' . Par la formule de Liouville, $W' = 0$. De plus, (x_1, x_2) est une base, donc W ne s'annule pas. Ainsi, **W est une constante non nulle**.
2. Si $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, l'unicité donne $x = 0$. Donc $x'(t_0) \neq 0$. Ensuite, $\frac{x(t)}{t - t_0} \rightarrow x'(t_0) \neq 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que ce quotient soit non nul pour $0 < |t - t_0| \leq \eta$. Par conséquent, **x ne s'annule pas sur $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ privé de t_0** .
3. On a $W = W(\alpha) = x_1(\alpha)x_2'(\alpha) - x_2(\alpha)x_1'(\alpha) = -x_2(\alpha)x_1'(\alpha)$. Comme $W \neq 0$, $x_2(\alpha) \neq 0$. De même, $x_2(\beta) \neq 0$.
4. Supposons que x_2 ne s'annule pas sur $]\alpha, \beta[$. D'après la question précédente, x_2 ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$. La fonction $h = x_1 / x_2$ y est donc de classe C^1 , avec $h(\alpha) = h(\beta) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c \in]\alpha, \beta[$ tel que $h'(c) = 0$. Or $h' = \frac{x_1'x_2 - x_1x_2'}{x_2^2} = -\frac{W}{x_2^2} \neq 0$. C'est absurde. Donc **x_2 s'annule sur $]\alpha, \beta[$** .
5. D'abord, x_2 n'a qu'un nombre fini de zéros dans $[\alpha, \beta]$. Sinon, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, ils s'accumuleraient en un point t^* , zéro de x_2 par continuité, mais non isolé : cela contredit la question 2. Supposons alors que x_2 ait deux zéros dans $]\alpha, \beta[$, et prenons-en deux consécutifs $\gamma < \delta$. La base (x_2, x_1) a pour wronskien $-W \neq 0$. Les questions 3 et 4, appliquées en échangeant les rôles, montrent que x_1 s'annule sur $]\gamma, \delta[\subset]\alpha, \beta[$. Cela contredit le fait que α et β sont consécutifs. Ainsi, **x_2 s'annule exactement une fois entre deux zéros consécutifs de x_1** .

Point de méthode : le quotient x_1 / x_2 a pour dérivée $-W / x_2^2$, de signe constant ; c'est l'outil clé pour comparer les zéros de deux solutions.

Corrigé de l'exercice 19 : Équation à coefficient périodique

- Posons $y(t) = x(t + T)$. Alors
 $y''(t) = x''(t + T) = -q(t + T)x(t + T) = -q(t)y(t)$, par périodicité de q . Donc $y \in S$. L'application Φ est clairement linéaire. Si $\Phi(x) = 0$, alors $x(t + T) = 0$ pour tout t , donc $x = 0$. Ainsi, Φ est injective, et comme $\dim S = 2$, Φ est un **automorphisme de S** .
- Toute $y \in S$ s'écrit $y = y(0)x_1 + y'(0)x_2$. En effet, les deux membres résolvent le même problème de Cauchy en 0 . Appliquons ceci à $\Phi(x_1)$: $\Phi(x_1)(0) = x_1(T)$ et $\Phi(x_1)'(0) = x_1'(T)$. Donc $\Phi(x_1) = x_1(T)x_1 + x_1'(T)x_2$, et de même pour x_2 . On obtient ainsi **la matrice M annoncée**. Son déterminant vaut $W(T)$. Or l'équation n'a pas de terme en x' , donc $W(T) = W(0) = 1$. Par conséquent, $\det M = 1$.
- Notons $\tau = x_1(T) + x_2'(T) = \text{tr } M$. Le polynôme caractéristique de M est $\lambda^2 - \tau\lambda + 1$, de discriminant $\tau^2 - 4 > 0$. Il a donc deux racines réelles distinctes de produit 1 : l'une vérifie $|\lambda| > 1$. Soit $x \in S$ un vecteur propre associé. Alors $\Phi(x) = \lambda x$, c'est-à-dire $x(t + T) = \lambda x(t)$. Prenons t_0 tel que $x(t_0) \neq 0$. Par récurrence, $|x(t_0 + kT)| = |\lambda|^k |x(t_0)| \rightarrow +\infty$. Donc x **n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$** .
- Pour $q = \frac{1}{4}$, on a $x_1(t) = \cos \frac{t}{2}$ et $x_2(t) = 2 \sin \frac{t}{2}$. En $T = 2\pi$, on obtient $x_1(2\pi) = -1$, $x_1'(2\pi) = -\frac{1}{2} \sin \pi = 0$, $x_2(2\pi) = 0$ et $x_2'(2\pi) = \cos \pi = -1$. Donc $M = -I_2$. Ainsi, toute solution vérifie $x(t + 2\pi) = -x(t)$: elle est **antipériodique**, donc 4π -périodique. Ici $\tau = -2$, cas limite où la question 3 ne s'applique pas.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème, étude complète d'une équation singulière

Partie A.

1. Soit $x = \sum a_k t^k$ de rayon $R > 0$. Le coefficient de t^k dans $t x''$ vaut $(k+1)k a_{k+1}$, celui de $2 x'$ vaut $2(k+1) a_{k+1}$, et celui de $t x$ vaut a_{k-1} pour $k \geq 1$. Pour $k = 0$, on obtient $2 a_1 = 0$. Pour $k \geq 1$, on obtient $(k+1)(k+2) a_{k+1} = a_{k-1}$. Donc les coefficients impairs sont nuls. De plus, $a_{2p} = \frac{a_{2p-2}}{(2p)(2p+1)}$, d'où $a_{2p} = \frac{a_0}{(2p+1)!}$. Le rapport $\frac{|t|^2}{(2p+2)(2p+3)}$ tend vers 0, donc **le rayon est infini**. Enfin, pour $t \neq 0$, $t \varphi(t) = \sum \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}$, donc $\varphi(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$, avec $\varphi(0) = 1$.

Partie B.

2. Posons $y = t x$. Alors $y' = x + t x'$ et $y'' = 2 x' + t x''$. Donc $t x'' + 2 x' - t x = y'' - y$. Par conséquent, x est solution de (H) sur I si et seulement si $y'' = y$. Ainsi, $y = A \text{ ch } t + B \text{ sh } t$, et $x(t) = \frac{A \text{ ch } t + B \text{ sh } t}{t}$.
3. Notons $s = \text{sh } t$ et $c = \text{ch } t$. On a $x'_1 = \frac{c}{t} - \frac{s}{t^2}$ et $x'_2 = \frac{s}{t} - \frac{c}{t^2}$. Ainsi,

$$W = \frac{s}{t} \left(\frac{s}{t} - \frac{c}{t^2} \right) - \frac{c}{t} \left(\frac{c}{t} - \frac{s}{t^2} \right) = \frac{s^2 - c^2}{t^2} = -\frac{1}{t^2}.$$

Sous forme résolue, $a(t) = \frac{2}{t}$, et Liouville annonce $W' = -\frac{2}{t} W$. Or $W' = \frac{2}{t^3} = -\frac{2}{t} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)$: la formule est vérifiée.

Partie C.

4. On normalise (E) : le second membre devient $g = 1$. Les formules donnent $\lambda' = -\frac{x_2 g}{W} = t \text{ ch } t$ et $\mu' = \frac{x_1 g}{W} = -t \text{ sh } t$. Par intégration par parties, on prend $\lambda = t \text{ sh } t - \text{ch } t$ et $\mu = \text{sh } t - t \text{ ch } t$. Alors

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = \text{sh}^2 t - \frac{\text{sh } t \text{ ch } t}{t} + \frac{\text{ch } t \text{ sh } t}{t} - \text{ch}^2 t = -1.$$

On obtient donc la solution particulière constante -1 . On pouvait la deviner : pour $x = -1$, $t \cdot 0 + 0 - t \cdot (-1) = t$.

5. Soit x une solution sur $\mathbb{R}$. Sur $]0, +\infty[$, $x = -1 + \frac{A \text{ ch } t}{t} + B \varphi(t)$, et sur

$]-\infty, 0[$, $x = -1 + \frac{C \operatorname{ch} t}{t} + D \varphi(t)$. La continuité en 0 exige une limite finie. Or $\frac{\operatorname{ch} t}{t} \rightarrow \pm\infty$ et $\varphi \rightarrow 1$. Donc $A = C = 0$. Ensuite, les limites $-1 + B$ et $-1 + D$ coïncident, donc $B = D$. Réciproquement, $-1 + B \varphi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car φ est somme d'une série entière de rayon infini. Elle vérifie (E) sur $\mathbb{R}$, puisque φ vérifie (H) par construction. Ainsi, **les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les $-1 + B \frac{\operatorname{sh} t}{t}$, $B \in \mathbb{R}$.**

La condition $x(0) = 1$ donne $B = 2$, d'où $x(t) = -1 + \frac{2 \operatorname{sh} t}{t}$, prolongée par 1 en 0 . En revanche, φ est paire, donc $x'(0) = B \varphi'(0) = 0$ pour toute solution. Par conséquent, **aucune solution sur $\mathbb{R}$ ne vérifie $x'(0) = 1$** . D'ailleurs, l'équation en $t = 0$ se réduit à $2x'(0) = 0$.

Point de méthode : reconnaître une dérivée exacte, ici $(tx)''$, ramène l'équation à coefficients variables à une équation à coefficients constants.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [équations différentielles linéaires, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur équations différentielles linéaires](#)
- À maîtriser avant : [Fonctions vectorielles d'une variable réelle](#), [Séries entières](#)
- Chapitre précédent : [Endomorphismes autoadjoints et théorème spectral](#)
- Chapitre suivant : [Exponentielle de matrice et systèmes différentiels](#)
- Le même thème en L1 : [équations différentielles, exercices de maths en L1](#)
- Le même thème en maths sup : [équations différentielles linéaires, exercices de maths sup](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)