

Équations différentielles

Exercice 1 : Existence et unicité pour une équation non linéaire

On considère le problème de Cauchy $y' = \sin(ty) + t$, $y(0) = 1$.

1. Justifier que ce problème admet une unique solution maximale.
2. Soit $T > 0$. Montrer que $f(t, y) = \sin(ty) + t$ est T -lipschitzienne par rapport à y sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$.
3. En déduire que la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $y(t) \geq 1 - t + \frac{t^2}{2}$, puis que $y(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Exercice 2 : Une équation sans unicité

On étudie l'équation scalaire $y' = 3|y|^{2/3}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que, pour tout réel c , la fonction $t \rightarrow (t - c)^3$ est solution sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $b \leq 0 \leq a$. Montrer que la fonction égale à $(t - b)^3$ sur $]-\infty, b]$, à 0 sur $[b, a]$ et à $(t - a)^3$ sur $[a, +\infty[$ est une solution de classe C^1 du problème $y(0) = 0$.
Conclure.
3. Montrer que $g : y \rightarrow 3|y|^{2/3}$ n'est lipschitzienne sur aucun voisinage de 0. Pourquoi le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique-t-il pas ?

4. On impose maintenant $y(0) = 1$. Déterminer la solution sur $] -1, +\infty[$ et justifier qu'elle y est unique. Est-elle unique sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 : Itérations de Picard

On considère le problème $y' = 2ty$, $y(0) = 1$, et l'opérateur $\Phi(\varphi)(t) = 1 + \int_0^t 2s \varphi(s) ds$.

On pose $\varphi_0 = 1$ et $\varphi_{k+1} = \Phi(\varphi_k)$.

1. Calculer φ_1 , φ_2 et φ_3 .

2. Montrer par récurrence que $\varphi_k(t) = \sum_{j=0}^k \frac{t^{2j}}{j!}$.

3. En déduire la solution du problème et vérifier le résultat par une résolution directe.

4. Montrer que, pour $|t| \leq 1$, $|e^{t^2} - \varphi_k(t)| \leq \frac{e}{(k+1)!}$.

Exercice 4 : Lemme de Gronwall : applications directes

Dans tout l'exercice, u est une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$.

1. On suppose $u(t) \leq 2 + 3 \int_0^t u(s) ds$ pour tout $t \geq 0$. Majorer $u(t)$.

2. On suppose $u(t) \leq 1 + \int_0^t s u(s) ds$ pour tout $t \geq 0$. Majorer $u(t)$.

3. Soit $k > 0$. On suppose $u(t) \leq k \int_0^t u(s) \, ds$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $u = 0$.
4. Soit a continue sur $\mathbb{R}$ avec $|a(t)| \leq 2$, et y une solution de $y' = a(t)y$. Montrer que $|y(t)| \leq |y(0)| e^{2t}$ pour $t \geq 0$.

Exercice 5 : Démonstration du lemme de Gronwall

Soient $t_0 < b$, u et β continues sur $[t_0, b[$ avec $\beta \geq 0$, et a un réel.

1. On suppose $u(t) \leq a + \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) \, ds$ sur $[t_0, b[$. On pose $v(t) = a + \int_{t_0}^t \beta u$ et

$B(t) = \int_{t_0}^t \beta$. Étudier le signe de la dérivée de $v e^{-B}$ et démontrer que $u \leq a e^B$.

2. On suppose maintenant $u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) \, ds$, où α est continue et croissante.

Montrer que $u(t) \leq \alpha(t) e^{B(t)}$.

3. Application : si u est continue sur $[0, +\infty[$ et $u(t) \leq t + \int_0^t u(s) \, ds$, montrer que

$$u(t) \leq t e^t.$$

4. Montrer que la majoration de la question 1 est optimale : on vérifiera que $u = a e^B$ satisfait l'hypothèse avec égalité.

Exercice 6 : Dépendance par rapport à la condition initiale

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et L -lipschitzienne par rapport à y .

1. Soient y et z deux solutions de $y' = f(t, y)$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $|y(t) - z(t)| \leq |y(0) - z(0)| e^{L|t|}$ pour tout réel t .
2. Soient y et z les solutions de $y' = \cos y$ telles que $y(0) = 0$ et $z(0) = 0,01$. Majorer $|y(1) - z(1)|$.
3. Montrer que la majoration de la question 1 est optimale en étudiant $y' = Ly$.
4. En déduire que, pour t fixé, l'application $y_0 \rightarrow y(t)$, qui à une condition initiale en 0 associe la valeur en t de la solution, est lipschitzienne.

Exercice 7 : Explosion en temps fini

On étudie l'équation $y' = 1 + y^2$.

1. Justifier que, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy associé admet une unique solution maximale.
2. Déterminer la solution maximale telle que $y(0) = 0$, avec son intervalle de définition.
3. Soit y une solution maximale quelconque. Montrer que $t \rightarrow \arctan y(t) - t$ est constante, puis que l'intervalle de définition de y est de longueur π .
4. En déduire qu'aucune solution de cette équation n'est globale, et expliquer ce résultat à l'aide du théorème des bouts.

Exercice 8 : Solution globale par majoration a priori

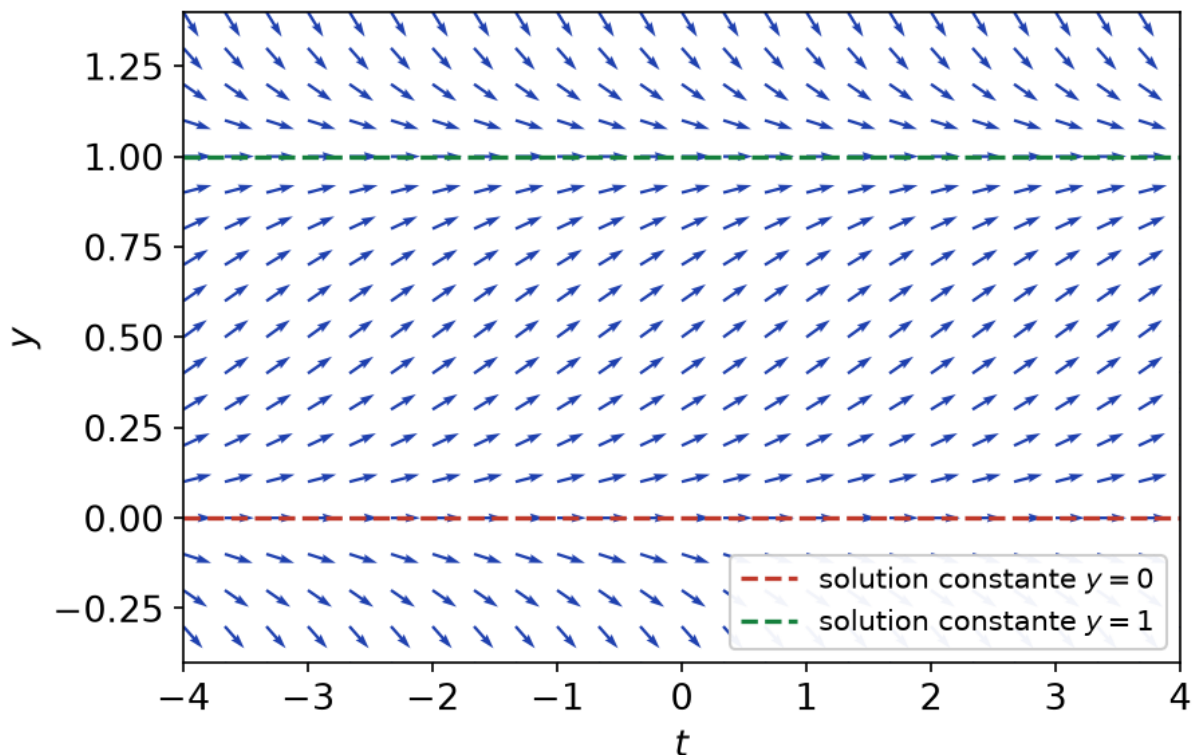
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème $y' = -y^3 + \sin t$, $y(0) = y_0$, et sa solution maximale y définie sur $] \alpha, \omega[$.

1. Justifier l'existence et l'unicité de y .

- Montrer que $(y^2)' \leq 0$ en tout point où $|y(t)| \geq 1$.
- On pose $M = \max(|y_0|, 1)$. Montrer que $|y(t)| \leq M$ pour tout $t \in [0, \omega[$.
- En déduire que $\omega = +\infty$.

Exercice 9 : Étude qualitative de l'équation logistique

On étudie $y' = y(1 - y)$ avec $y(0) = y_0 \in]0, 1[$, sans chercher d'abord à la résoudre. La figure représente le champ de directions de l'équation et ses deux solutions constantes.



- Justifier l'existence d'une unique solution maximale $\mathcal{Y}$, définie sur $] \alpha, \omega[$.
- Montrer que $0 < y(t) < 1$ pour tout $t \in] \alpha, \omega[$.
- En déduire que $\mathcal{Y}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\mathcal{Y}$ est strictement croissante, puis déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Vérifier que $y(t) = \frac{y_0 e^t}{1 - y_0 + y_0 e^t}$ et retrouver les résultats précédents.

Exercice 10 : Une solution qui explose sans formule explicite

On considère le problème $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 0$, et sa solution maximale y définie sur $]\alpha, \omega[$. On ne sait pas exprimer y à l'aide des fonctions usuelles.

1. Justifier l'existence et l'unicité de y .
2. Montrer que $z : t \rightarrow -y(-t)$ est aussi solution du problème. En déduire que $\alpha = -\omega$ et que y est impaire.
3. Montrer que y est strictement croissante et que $y(t) \geq t^3/3$ pour $t \in [0, \omega[$.
4. On suppose $\omega > 1$. Montrer que $\arctan y(t) \geq t - 1$ pour $t \in [1, \omega[$, puis que $\omega \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.
5. Conclure que ω est fini, puis que $y(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \omega$.

Exercice 11 : Résolvante et wronskien d'un système non autonome

Sur $I =]0, +\infty[$, on considère l'équation $t^2 y'' - 2t y' + 2y = 0$.

1. Écrire l'équation sous la forme d'un système $X' = A(t) X$ avec $X = (y, y')$. Pourquoi les solutions sont-elles définies sur I ?
2. Vérifier que t et t^2 sont solutions et calculer leur wronskien. Retrouver ce résultat par la formule de Liouville.
3. Calculer la résolvante $R(t, s)$ du système et vérifier que $R(s, s) = I_2$.
4. Résoudre, par la méthode de variation des constantes, l'équation $t^2 y'' - 2t y' + 2y = t^3$ sur

I .

Exercice 12 : Exponentielle d'une matrice diagonalisable

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A et calculer e^{tA} pour tout réel t .
2. Résoudre le système $x' = x + 2y$, $y' = 2x + y$ avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.
3. L'origine est-elle un équilibre stable ? Déterminer les conditions initiales pour lesquelles la solution tend vers $(0, 0)$ en $+\infty$.

Exercice 13 : Exponentielle par décomposition de Dunford

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2 , puis e^{tJ} à l'aide de la série exponentielle.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tA} , puis la solution de $X' = AX$ telle que $X(0) = (0, 0, 1)$.
3. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la décomposition de Dunford de B , calculer e^{tB} et vérifier que $\det e^{tB} = e^{t \operatorname{tr} B}$.
4. Soient $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^P , e^Q et e^{P+Q} . Comparer $e^P + e^Q$ et e^{P+Q} .

Exercice 14 : Système à coefficients constants avec second membre

On considère le système $x' = x + y$, $y' = -x + y + e^t$, avec $x(0) = y(0) = 0$.

1. Écrire le système sous la forme $X' = AX + B(t)$ et calculer e^{tA} , en remarquant que $A = I_2 + K$ avec $K^2 = -I_2$.
2. Résoudre le système par la formule de variation des constantes.
3. Vérifier le résultat en reportant dans le système.
4. Décrire l'allure de la trajectoire pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 15 : Stabilité d'un système linéaire selon un paramètre

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On étudie $X' = A_\alpha X$ avec $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, et on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. Calculer les valeurs propres complexes de A_α .
2. Montrer que, pour toute solution X , $\frac{d}{dt} |X(t)|^2 = 2\alpha |X(t)|^2$. En déduire $|X(t)|$ en fonction de $|X(0)|$.
3. Discuter selon α la stabilité de l'origine : stable, asymptotiquement stable ou instable.
4. Calculer e^{tA_α} et décrire les trajectoires dans chacun des cas.

Exercice 16 : Linéarisation autour des équilibres

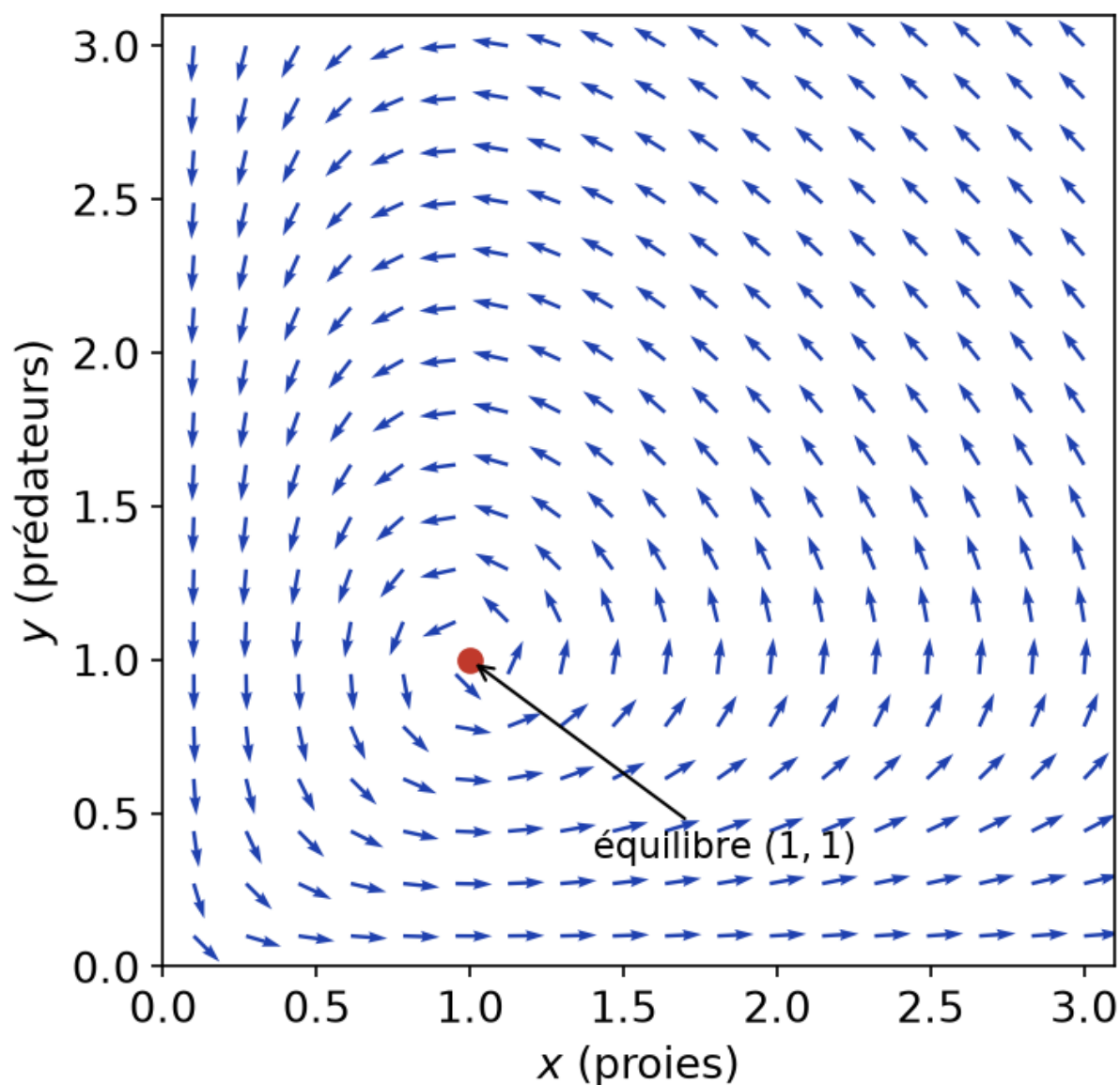
On étudie le système autonome $x' = y$, $y' = x - x^3 - y$.

1. Déterminer les points d'équilibre.

2. Calculer la matrice jacobienne en chacun d'eux et en déduire la nature et la stabilité de chaque équilibre.
3. On pose $E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$. Calculer la dérivée de E le long d'une solution.
4. En déduire que toute solution maximale est définie sur $[0, +\infty[$.

Exercice 17 : Modèle proies-prédateurs

On étudie le système $x' = x(1 - y)$, $y' = y(x - 1)$, où x et y représentent des populations de proies et de prédateurs. La figure donne le champ de vecteurs dans le quart de plan positif.



1. Justifier l'existence et l'unicité des solutions maximales, puis déterminer les équilibres.
2. Déterminer les solutions telles que $x(0) = 0$, puis celles telles que $y(0) = 0$. En déduire que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t .
3. Montrer que $H(x, y) = x - \ln x + y - \ln y$ est une intégrale première sur $]0, +\infty[^2$.
4. Montrer que les solutions issues du quart de plan ouvert sont définies sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier la linéarisation en $(0, 0)$ et en $(1, 1)$. Que peut-on conclure ? Montrer, à l'aide de H , que $(1, 1)$ est stable.

Exercice 18 : Méthode d'Euler pour l'exponentielle

On applique la méthode d'Euler au problème $y' = y$, $y(0) = 1$, sur $[0, 1]$, avec le pas $h = 1/N$.

1. Montrer que $y_k = (1 + h)^k$ pour $0 \leq k \leq N$.
2. Pour $N = 4$, calculer y_1, y_2, y_3, y_4 et l'erreur $e - y_4$.
3. Montrer que $y_N \rightarrow e$ quand $N \rightarrow +\infty$, et que $e - y_N \sim \frac{e}{2N}$.
4. Comparer avec la majoration générale $\frac{Mh}{2L}(e^{LT} - 1)$ du cours.

Exercice 19 : Convergence de la méthode d'Euler

Soit $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et L -lipschitzienne en y , avec $L > 0$. On note y la solution de $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, que l'on suppose de classe C^2 avec $|y''| \leq M$. On note y_k les valeurs données par la méthode d'Euler de pas $h = T/N$ et $e_k = |y(t_k) - y_k|$.

1. Montrer que $y(t_{k+1}) = y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)) + r_k$ avec $|r_k| \leq \frac{Mh^2}{2}$.
2. En déduire que $e_{k+1} \leq (1 + hL)e_k + \frac{Mh^2}{2}$.
3. Démontrer le lemme de Gronwall discret : si $e_0 = 0$ et $e_{k+1} \leq q e_k + c$ avec $q > 1$, $c \geq 0$, alors $e_k \leq c \frac{q^k - 1}{q - 1}$.
4. Conclure que $\max_k e_k \leq \frac{Mh}{2L}(e^{LT} - 1)$.
5. Application : pour $y' = -y + t$, $y(0) = 1$, sur $[0, 1]$, vérifier que $y(t) = t - 1 + 2e^{-t}$, puis trouver un pas h garantissant une erreur inférieure à 10^{-3} .

Exercice 20 : Cauchy-Lipschitz par une norme à poids

Soient $K = [c, d]$ un segment, $t_0 \in K$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et L -lipschitzienne par rapport à y , avec $L > 0$. On note $E = C(K, \mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $N(y) = \sup_{t \in K} e^{-2L|t - t_0|} |y(t)|$ est une norme sur E , équivalente à la norme uniforme. En déduire que (E, N) est complet.
2. On pose $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds$. Montrer que Φ envoie E dans E et que $N(\Phi(y) - \Phi(z)) \leq \frac{1}{2} N(y - z)$.
3. En déduire que le problème de Cauchy admet une unique solution sur K .
4. Pourquoi la norme uniforme ne suffit-elle pas en général ? Montrer que Φ est contractante pour la norme uniforme lorsque $L(d - c) < 1$.
5. Soit f continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, lipschitzienne en y sur chaque $[-m, m] \times \mathbb{R}^n$. Montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 : Formule de Liouville

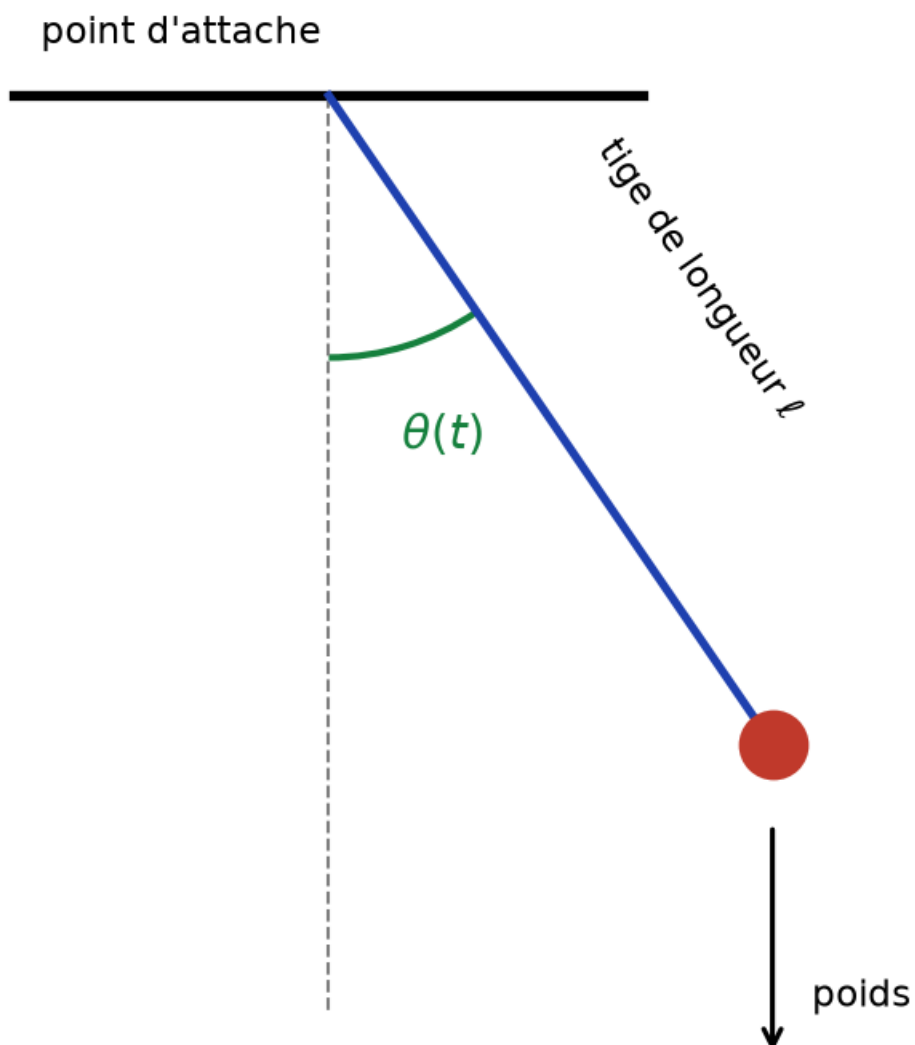
Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et Φ une matrice fondamentale du système $X' = A(t)X$, de colonnes $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

1. Montrer que $(\det \Phi)'(t) = \sum_{j=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_j(t), \dots, \varphi_n(t))$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(v_1, \dots, v_n) \rightarrow \sum_j \det(v_1, \dots, M v_j, \dots, v_n)$ est une forme n -linéaire alternée, puis qu'elle vaut $\text{tr}(M) \det(v_1, \dots, v_n)$.
3. En déduire la formule de Liouville, puis l'égalité $\det e^{tM} = e^{t \, \text{tr} M}$.

4. On considère $t y'' - (t + 1) y' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$. Vérifier que $y_1(t) = e^t$ est solution. À l'aide du wronskien, trouver toutes les solutions.

Exercice 22 : Problème : le pendule simple et le pendule amorti

Un pendule de longueur ℓ oscille dans un plan vertical, comme sur la figure. Après un choix d'unités, l'angle $\theta(t)$ avec la verticale vérifie $\theta'' + \sin \theta = 0$.



Partie A : pendule simple.

1. Écrire l'équation sous la forme d'un système $X' = F(X)$ avec $X = (x, y) = (\theta, \theta')$.
Montrer que F est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ et en déduire que toutes les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'énergie $E(x, y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$ est une intégrale première.
3. Déterminer les équilibres. Étudier la linéarisation en $(0, 0)$ et en $(\pi, 0)$. Que peut-on conclure dans chaque cas ?
4. Montrer que, pour $|x| \leq \pi$, on a $1 - \cos x \geq \frac{2x^2}{\pi^2}$. En déduire que $(0, 0)$ est un équilibre stable. Est-il asymptotiquement stable ?

Partie B : pendule amorti. On ajoute un frottement : $\theta'' + \gamma \theta' + \sin \theta = 0$, avec $\gamma > 0$.

1. Calculer la dérivée de E le long d'une solution et interpréter.
2. Montrer que $(0, 0)$ est asymptotiquement stable et que $(\pi, 0)$ est instable.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [équations différentielles, cours de maths en L3](#)
- À maîtriser avant : [Complétude, espaces de Banach et point fixe](#), [Réduction de Jordan et décomposition de Dunford](#)
- Chapitre précédent : [Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions holomorphes et formule de Cauchy](#)
- Le même thème en L1 : [équations différentielles, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)