

Équations différentielles

Exercice 1 : Équations homogènes du premier ordre

Résoudre les équations suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' - 2xy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $xy' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$.
4. $y' + \tan(x) y = 0$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 2 : Seconds membres simples au premier ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en cherchant une solution particulière de la forme suggérée.

1. $y' + 2y = e^x$, avec une solution particulière de la forme λe^x .
2. $y' - y = x^2$, avec une solution particulière polynomiale de degré 2.
3. $y' + y = e^{-x}$, avec une solution particulière de la forme $\lambda x e^{-x}$.

Exercice 3 : Un problème de Cauchy au premier ordre

On considère l'équation $(E) : y' + 2xy = 2x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver une solution constante de (E) .
2. En déduire toutes les solutions de (E) .
3. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(0) = 3$.
4. Étudier les variations de f et sa limite en $\pm\infty$.

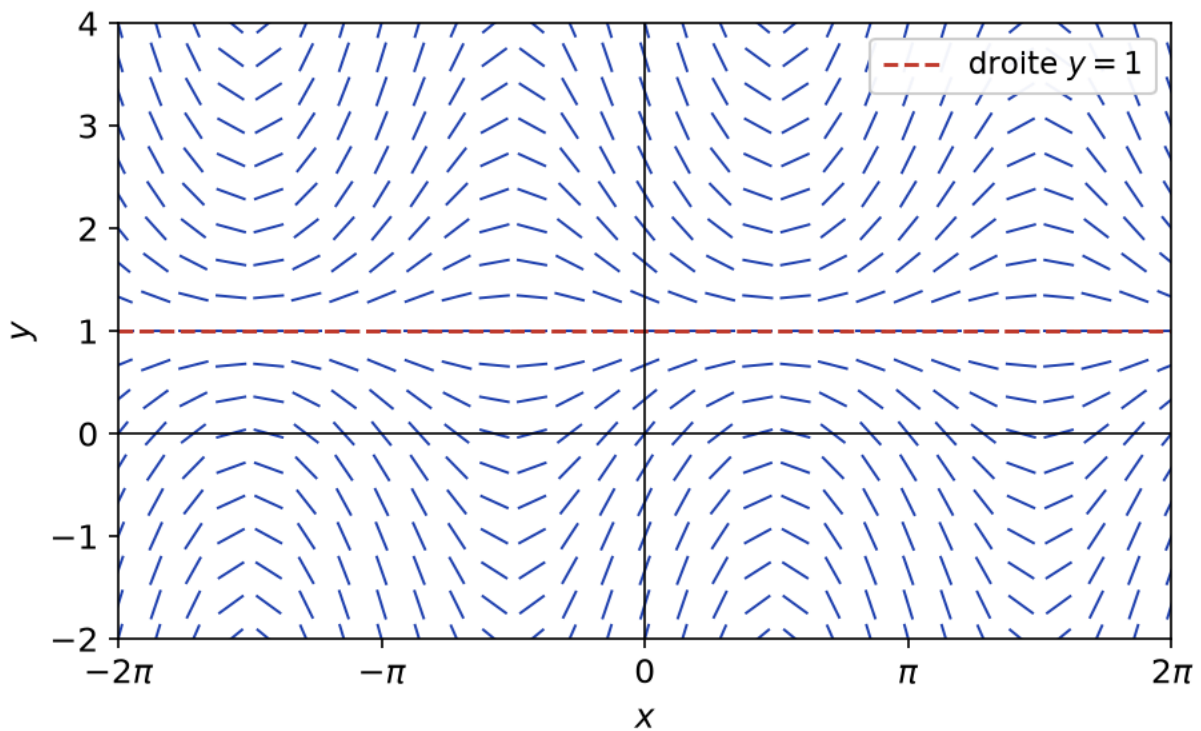
Exercice 4 : Variation de la constante

Résoudre les équations suivantes par la méthode de variation de la constante.

1. $xy' - y = x^2 e^x$ sur $]0, +\infty[$.
2. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : Structure affine et solution évidente

On considère l'équation $(E) : y' + (\cos x) y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$. La figure ci-dessous représente son champ de directions : en chaque point (x, y) , le petit segment a pour pente $\cos(x)(1-y)$.



1. Montrer, dans le cas général d'une équation $y' + a(x)y = b(x)$ à coefficients continus, que la différence de deux solutions est solution de l'équation homogène.
2. Trouver une solution évidente de (E) , puis résoudre (E) .
3. Montrer que toutes les solutions de (E) sont 2π -périodiques.
4. Déterminer la solution dont la courbe passe par le point $(0; 3)$.
5. Montrer sans calcul que deux solutions distinctes de (E) ne prennent jamais la même valeur au même point. Que dire d'une solution qui prend la valeur 1 en un point ?

Exercice 6 : Principe de superposition au premier ordre

On considère l'équation $(E) : y' - y = e^x + \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Trouver une solution particulière de $y' - y = e^x$ de la forme $\lambda x e^x$.

2. Trouver une solution particulière de $y' - y = \cos x$ de la forme $\alpha \cos x + \beta \sin x$.
3. En déduire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0.

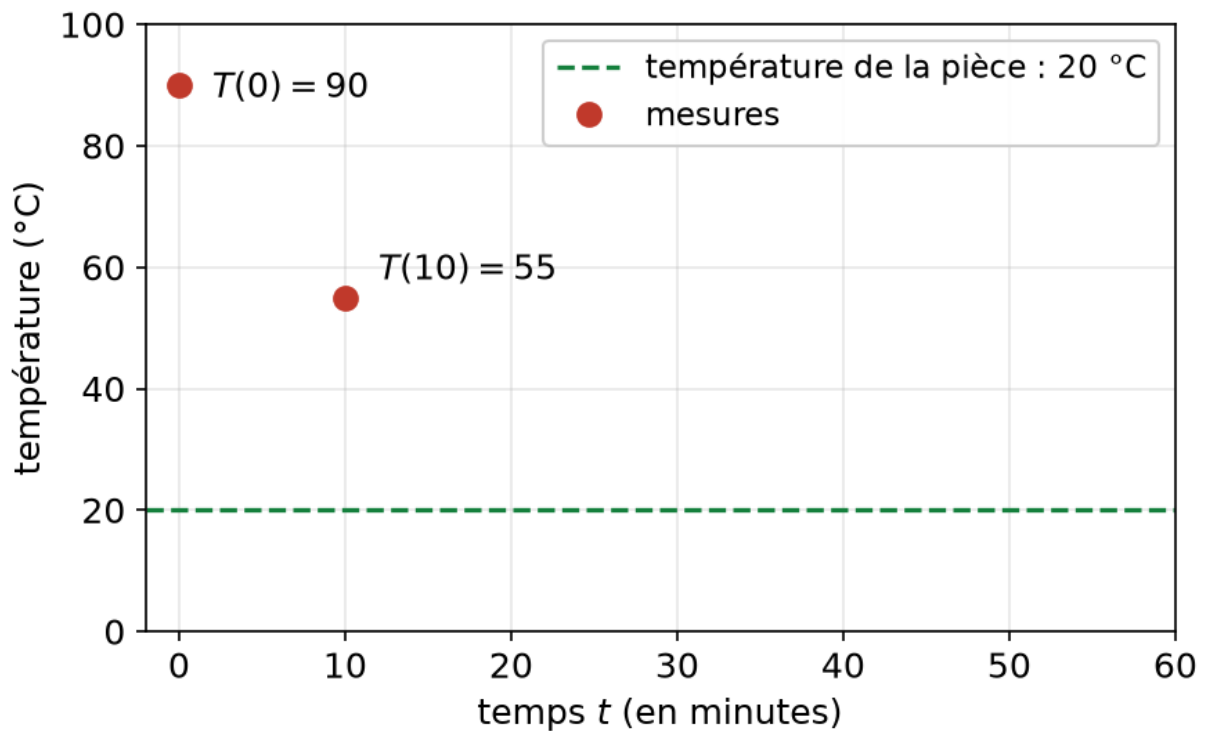
Exercice 7 : Variation de la constante avec une racine carrée

On considère l'équation $(E) : (1+x^2) y' + x y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que l'on peut normaliser (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier, puis résoudre l'équation homogène associée.
2. Vérifier que la fonction $g : x \rightarrow \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Résoudre (E) par variation de la constante.
4. Déterminer la solution telle que $y(0) = 1$, puis montrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 : Loi de refroidissement de Newton

Une tasse de thé est posée dans une pièce à 20 °C. On note $T(t)$ sa température en degrés Celsius, t en minutes. On admet la loi de Newton : il existe $k > 0$ tel que $T'(t) = -k(T(t) - 20)$ pour tout $t \geq 0$. Les deux mesures disponibles sont représentées ci-dessous.



1. Exprimer $T(t)$ en fonction de k et de t , sachant que $T(0) = 90$.
2. Sachant que $T(10) = 55$, déterminer la valeur exacte de k .
3. Calculer $T(30)$.
4. Au bout de combien de temps le thé atteint-il 25 $^{\circ}\text{C}$? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à la minute près.

Exercice 9 : Recollement de solutions en un point singulier

On considère l'équation $(E): xy' - 2y = 0$. On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $xf'(x) - 2f(x) = 0$ pour tout réel x .

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$, puis sur $] -\infty, 0[$.
2. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels C_1 et C_2 tels que $f(x) = C_1 x^2$ pour $x > 0$ et $f(x) = C_2 x^2$ pour $x < 0$. Que vaut $f(0)$?

3. Réciproquement, montrer que toute fonction de cette forme est solution sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que le problème « (E) , $y(0) = 0$ » a une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$, et que le problème « (E) , $y(0) = 1$ » n'en a aucune. Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème de Cauchy ?

Exercice 10 : Solutions périodiques et unicité

Soient $T > 0$ et a, b deux fonctions continues et T -périodiques sur $\mathbb{R}$. On considère $(E) : y' + a(x)y = b(x)$.

1. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g : x \rightarrow f(x+T)$ est aussi solution de (E) .
2. En déduire que f est T -périodique si et seulement si $f(T) = f(0)$.
3. Application : résoudre $y' + y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$, puis montrer que cette équation possède une unique solution 2π -périodique.
4. Montrer que toute solution de $y' + y = \cos x$ vérifie $y(x) - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 11 : Équations homogènes du second ordre

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes (solutions réelles).

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

4. $y'' + 9y = 0$.

5. Donner les solutions complexes de l'équation 3.

Exercice 12 : Problème de Cauchy au second ordre

1. Déterminer l'unique solution de $y'' - y' - 6y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 8$.

2. Déterminer l'unique solution de $y'' + 9y = 0$ telle que $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ et $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$.

3. Déterminer l'unique solution de $y'' + 4y' + 4y = 0$ telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Montrer qu'elle est strictement positive sur $[0, +\infty[$.

Exercice 13 : Second membre polynomial

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3$;

2. $y'' - y' = 2x$. On expliquera pourquoi une solution particulière de degré 1 ne peut pas convenir.

Exercice 14 : Second membre exponentiel : les trois cas

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$.

2. $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Exercice 15 : Second membre polynôme-exponentielle

1. Résoudre $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$, en posant $y = z e^x$.

2. Résoudre $y'' + y' = x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Seconds membres trigonométriques et résonance

1. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = \cos x$ sur $\mathbb{R}$, en passant par l'équation complexe associée.

2. Résoudre $y'' + 4y = \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que, dans la question 1, toutes les solutions sont bornées sur $[0, +\infty[$, alors que, dans la question 2, aucune ne l'est.

Exercice 17 : Superposition et conditions initiales

On considère $(E) : y'' - y = 2e^x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.

2. Trouver une solution particulière de $y'' - y = 2e^x$, puis de $y'' - y = -2$.

3. En déduire la solution générale de (E) .

4. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 18 : Démonstration de la structure au second ordre

Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ et $(H) : y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$. Les fonctions sont à valeurs complexes, définies sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y deux fois dérivable. On pose $z = y' - r_2 y$. Montrer que y est solution de (H) si et seulement si $z' = r_1 z$.
2. En déduire les solutions de (H) lorsque $r_1 \neq r_2$, puis lorsque $r_1 = r_2$.
3. Montrer que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2.
4. On suppose $r_1 \neq r_2$. Soient x_0, α, β donnés. Montrer, à l'aide d'un déterminant, qu'il existe une unique solution telle que $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$.

Exercice 19 : Équation d'Euler par changement de variable

On considère $(E) : x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3$ sur $]0, +\infty[$.

1. Soit y deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. On pose $z(t) = y(e^t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ à l'aide de $y'(e^t)$ et $y''(e^t)$.
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $z'' - 3z' + 2z = e^{3t}$.
3. Résoudre cette équation, puis en déduire les solutions de (E) .
4. Vérifier directement que $x \rightarrow \frac{x^3}{2}$ est solution de (E) .

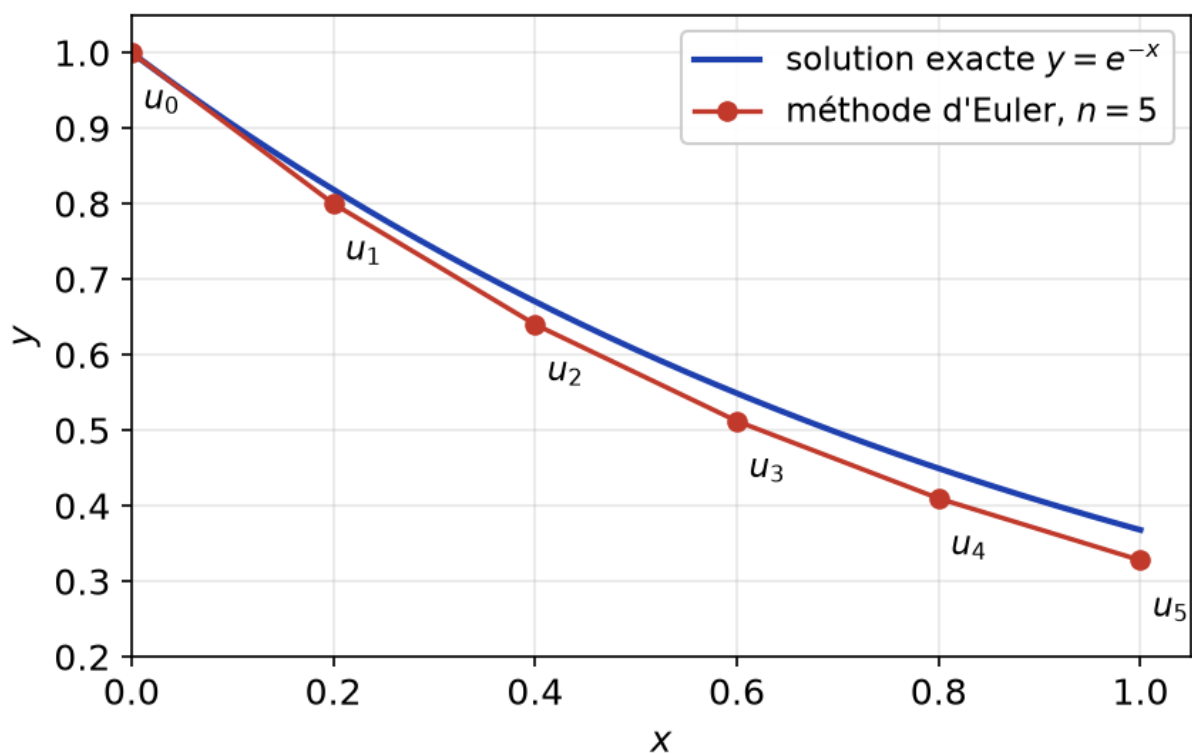
Exercice 20 : Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Déterminer le terme général des suites suivantes.

1. $u_0=1$, $u_1=4$ et $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_0=1$, $v_1=4$ et $v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_0=0$, $w_1=1$ et $w_{n+2}=w_{n+1}-w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (w_n) est périodique et préciser sa période.
4. Comparer avec les solutions de $y''-5y'+6y=0$: quelle équation caractéristique commune apparaît ?

Exercice 21 : Méthode d'Euler et suite géométrique

On considère le problème de Cauchy $y' = -y$, $y(0) = 1$, sur $[0, 1]$. Soit $n \geq 2$ un entier et $h = \frac{1}{n}$. La méthode d'Euler définit $u_0 = 1$ et $u_{k+1} = u_k + h(-u_k)$: on remplace la courbe par une ligne brisée, comme sur la figure ci-dessous où $n = 5$.



1. Résoudre le problème de Cauchy de manière exacte.
2. Montrer que (u_k) est une suite géométrique et exprimer u_n en fonction de n .
3. Montrer que $u_n \leq e^{-1}$ pour tout $n \geq 2$, en utilisant $\ln(1-t) \leq -t$ pour $t \in [0, 1[$.
4. Montrer que u_n tend vers e^{-1} quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 22 : Discrétisation de l'oscillateur harmonique

La solution de $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ est $\cos$. On l'approche par un schéma aux différences. Soit $h \in]0, 2[$. On définit $u_0 = 1$, $u_1 = 1 - \frac{h^2}{2}$ et, pour $k \geq 1$,

$$u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} = -h^2 u_k.$$

1. Écrire l'équation caractéristique de cette récurrence. Montrer que ses racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, où $\theta \in]0, \pi[$ vérifie $\cos \theta = 1 - \frac{h^2}{2}$.
2. En déduire que $u_k = \cos(k\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\theta \rightarrow 0$ et que $\frac{\theta}{h} \rightarrow 1$ lorsque $h \rightarrow 0$.
4. Soit $x > 0$ fixé. Pour $n > \frac{x}{2}$, on prend $h = \frac{x}{n}$ et on note θ_n l'angle associé. Montrer que $u_n = \cos(n\theta_n)$ tend vers $\cos x$.

Exercice 23 : Équations fonctionnelles

1. Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x ,

$$f(x) = 1 + 2 \int_0^x t f(t) dt.$$

2. Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , $f'(x) = f(-x)$. On montrera d'abord que f est deux fois dérivable.

Exercice 24 : Problème : oscillateur amorti et régime forcé

Soit $\alpha \geq 0$. On étudie $(H_\alpha) : y'' + 2\alpha y' + y = 0$ avec les conditions $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On note y_α l'unique solution de ce problème de Cauchy.

Partie A : cas $0 < \alpha < 1$.

- Posons $\beta = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Montrer que $y_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \left(\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta t) \right)$.
- Montrer qu'il existe $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $y_\alpha(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$. En déduire que y_α s'annule une infinité de fois sur $[0, +\infty[$, et que deux zéros consécutifs sont distants de $\frac{\pi}{\beta}$.

Partie B : cas $\alpha = 1$ et cas $\alpha > 1$.

- Déterminer y_1 .
- Pour $\alpha > 1$, déterminer y_α et montrer que $y_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.
- Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, $y_\alpha(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Que se passe-t-il pour $\alpha = 0$?

Partie C : régime forcé. On prend $\alpha = \frac{1}{2}$ et l'on considère $(E) : y'' + y' + y = \cos t$.

1. Trouver une solution particulière de (E) de la forme $\lambda \cos t + \mu \sin t$.
2. Résoudre (E) , puis déterminer la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.
3. Montrer que toute solution y de (E) vérifie $y(t) - \sin t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [équations différentielles, cours de maths en L1](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Riemann et calcul de primitives](#), [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre précédent : [Intégrale de Riemann et calcul de primitives](#)
- Chapitre suivant : [Formules de Taylor et développements limités](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)