

Équations différentielles

Corrigé de l'exercice 1 : Existence et unicité pour une équation non linéaire

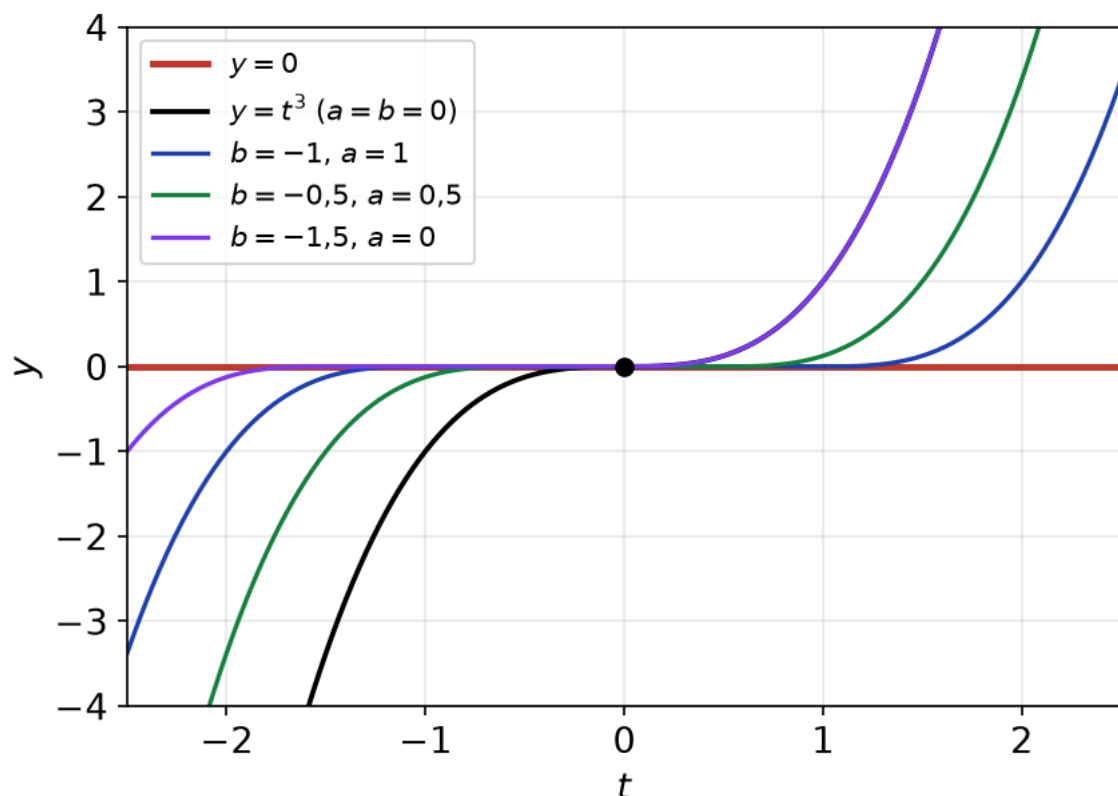
1. La fonction $f(t, y) = \sin(ty) + t$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Elle est donc localement lipschitzienne par rapport à y . Par conséquent, le théorème de Cauchy-Lipschitz, version locale, fournit **une unique solution maximale**, définie sur un intervalle ouvert $] \alpha, \omega[$ contenant 0 .
2. On a $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = t \cos(ty)$, donc $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq |t| \leq T$ sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$. Ensuite, pour t fixé, l'inégalité des accroissements finis donne $|f(t, y) - f(t, z)| \leq T |y - z|$. Ainsi, **f est T -lipschitzienne en y sur $[-T, T] \times \mathbb{R}$.**
3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De plus, tout segment K est inclus dans un $[-T, T]$, sur lequel f est lipschitzienne en y . La version globale du théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc avec $I = \mathbb{R}$. Par conséquent, **la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}$.**
4. Comme $\sin(ty) \geq -1$, on a $y'(s) \geq s - 1$ pour tout s . En intégrant sur $[0, t]$, avec $t \geq 0$, on obtient $y(t) - 1 \geq \frac{t^2}{2} - t$. Donc $y(t) \geq 1 - t + \frac{t^2}{2}$. Or $1 - t + \frac{t^2}{2} = \frac{(t-1)^2 + 1}{2} > 0$. Par conséquent, **$y(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.**

Point de méthode : une dérivée partielle $\partial f / \partial y$ bornée sur chaque bande $[-T, T] \times \mathbb{R}$ donne directement une solution globale, sans étude de l'explosion.

Corrigé de l'exercice 2 : Une équation sans unicité

1. Posons $y(t) = (t - c)^3$. Alors $|y(t)|^{2/3} = |t - c|^2 = (t - c)^2$. Donc $3|y(t)|^{2/3} = 3(t - c)^2 = y'(t)$. Ainsi, $t \rightarrow (t - c)^3$ est solution sur $\mathbb{R}$.
2. Notons $y_{a,b}$ la fonction décrite. Sur chacun des trois intervalles, c'est une solution : les deux branches cubiques par la question 1, et la fonction nulle car $g(0) = 0$. Ensuite, aux points de raccord a et b , la fonction est continue (elle vaut 0) et ses dérivées à gauche et à droite valent 0. Donc $y_{a,b}$ est de classe C^1 et vérifie l'équation partout. Enfin, $y_{a,b}(0) = 0$ car $0 \in [b, a]$. Par conséquent, **le problème $y(0) = 0$ admet une infinité de solutions définies sur $\mathbb{R}$** , indexées par les couples $b \leq 0 \leq a$, auxquelles s'ajoutent les solutions nulles sur une demi-droite.

La figure ci-dessous représente quelques-unes de ces solutions : toutes passent par l'origine, et elles restent collées à l'axe pendant des durées différentes.



3. Pour $y \neq 0$, $\frac{|g(y) - g(0)|}{|y - 0|} = 3|y|^{-1/3}$, qui tend vers $+\infty$ quand $y \rightarrow 0$. Donc aucune

constante L ne convient sur un voisinage de 0 : g **n'est pas lipschitzienne près de** 0 .
L'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz est en défaut en tout point $(t_0, 0)$. Seule l'existence reste assurée, par la continuité de g .

4. Sur l'ouvert $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, la fonction $g(y) = 3y^{2/3}$ est de classe C^1 . Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'y applique. La fonction $(t+1)^3$ est une solution positive sur $]-1, +\infty[$, avec $y(0) = 1$. Soit maintenant z une solution sur $]-1, +\infty[$ telle que $z(0) = 1$. Notons J le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel $z > 0$. Sur J , $z = (t+1)^3$ par unicité dans U . Si J avait une borne t_1 dans $]-1, +\infty[$, on aurait $z(t_1) = 0$ par continuité, alors que $z(t_1) = (t_1+1)^3 > 0$. Donc $y(t) = (t+1)^3$ **est l'unique solution sur** $]-1, +\infty[$. En revanche, sur $\mathbb{R}$, pour tout $c \leq -1$, la fonction égale à $(t-c)^3$ sur $]-\infty, c]$, à 0 sur $[c, -1]$ et à $(t+1)^3$ ensuite est solution. **Il n'y a donc pas unicité sur** $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Itérations de Picard

1. On a $\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t 2s \, ds = 1 + t^2$. Ensuite,
- $$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t (2s + 2s^3) \, ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}.$$
- De même,
- $$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t (2s + 2s^3 + s^5) \, ds.$$
- Donc $\varphi_1 = 1 + t^2$, $\varphi_2 = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$ **et**
- $$\varphi_3 = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}.$$

2. La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons-la vraie au rang k . Alors

$$\varphi_{k+1}(t) = 1 + \sum_{j=0}^k \int_0^t \frac{2s^{2j+1}}{j!} \, ds = 1 + \sum_{j=0}^k \frac{t^{2j+2}}{(j+1)j!} = 1 + \sum_{j=1}^{k+1} \frac{t^{2j}}{j!}.$$

Ainsi, $\varphi_k(t) = \sum_{j=0}^k t^{2j} / j!$ **pour tout** k .

3. La série exponentielle donne $\varphi_k(t) \rightarrow e^{t^2}$ pour tout réel t . La solution est le point fixe de Φ , limite des itérées. Donc $y(t) = e^{t^2}$. Vérification directe : l'équation est linéaire, avec une primitive t^2 de $2t$. Ses solutions sont donc $C e^{t^2}$, et $y(0) = 1$ impose $C = 1$.

4. Posons $x = t^2 \in [0, 1]$. La formule de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle à l'ordre k donne $c \in [0, x]$ tel que $e^x - \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} = \frac{e^c x^{k+1}}{(k+1)!}$. Or $e^c \leq e$ et $x^{k+1} \leq 1$. Par conséquent, $|e^{t^2} - \varphi_k(t)| \leq \frac{e}{(k+1)!}$ pour $|t| \leq 1$. La convergence est donc uniforme sur $[-1, 1]$.

Corrigé de l'exercice 4 : Lemme de Gronwall : applications directes

1. Le lemme de Gronwall s'applique avec $\alpha = 2$ et $\beta = 3 \geq 0$. Donc $u(t) \leq 2e^{3t}$ pour tout $t \geq 0$.

2. Ici, $\alpha = 1$ et $\beta(s) = s \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Or $\int_0^t s \, ds = \frac{t^2}{2}$. Par conséquent, $u(t) \leq e^{t^2/2}$.

3. Le lemme avec $\alpha = 0$ et $\beta = k$ donne $u(t) \leq 0 \cdot e^{kt} = 0$. Comme $u \geq 0$, on conclut que $u = 0$. C'est exactement l'argument d'unicité du cours.

4. La forme intégrale donne $y(t) = y(0) + \int_0^t a(s) y(s) \, ds$. Donc, pour $t \geq 0$,

$$|y(t)| \leq |y(0)| + \int_0^t 2|y(s)| \, ds. \text{ La fonction } u = |y| \text{ est continue et positive. Le lemme avec } \beta = 2 \text{ donne alors } |y(t)| \leq |y(0)| e^{2t}.$$

Corrigé de l'exercice 5 : Démonstration du lemme de Gronwall

1. La fonction v est de classe C^1 , avec $v' = \beta u$. Par hypothèse, $u \leq v$. Comme $\beta \geq 0$, on en déduit $v' = \beta u \leq \beta v$. Ensuite, $(v e^{-B})' = (v' - \beta v) e^{-B} \leq 0$. Ainsi, $v e^{-B}$ est décroissante, et $v(t) e^{-B(t)} \leq v(t_0) = a$. Finalement, $u(t) \leq v(t) \leq a e^{B(t)}$.

2. Fixons $T \in]t_0, b[$. Pour $t \in [t_0, T]$, la croissance de α donne

$$u(t) \leq \alpha(T) + \int_{t_0}^t \beta u. \text{ La question 1, appliquée sur } [t_0, T] \text{ avec la constante } \alpha(T),$$

donne $u(t) \leq \alpha(T) e^{B(t)}$. En prenant $t = T$, on obtient $u(T) \leq \alpha(T) e^{B(T)}$. Le cas $T = t_0$ est immédiat. Donc $u(t) \leq \alpha(t) e^{B(t)}$ **pour tout** t .

3. On applique la question 2 avec $\alpha(t) = t$, croissante, et $\beta = 1$. Alors $B(t) = t$, et $u(t) \leq t e^t$. On remarque que la fonction $e^t - 1$, qui réalise l'égalité dans l'hypothèse, vérifie bien $e^t - 1 \leq t e^t$.

4. Posons $u = a e^B$. Alors $\int_{t_0}^t \beta(s) a e^{B(s)} ds = a [e^B]_{t_0}^t = a e^{B(t)} - a$, car

$$B' = \beta \text{ et } B(t_0) = 0. \text{ Donc } a + \int_{t_0}^t \beta u = a e^{B(t)} = u(t). \text{ L'hypothèse est}$$

vérifiée avec égalité, et la conclusion aussi : la majoration ne peut pas être améliorée.

Corrigé de l'exercice 6 : Dépendance par rapport à la condition initiale

1. Soit $t \geq 0$. Par la forme intégrale,

$$y(t) - z(t) = y(0) - z(0) + \int_0^t (f(s, y(s)) - f(s, z(s))) ds. \text{ Le caractère lipschitzien donne}$$

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(0) - z(0)| + \int_0^t L |y(s) - z(s)| ds. \text{ Le lemme de Gronwall, appliqué à}$$

$u = |y - z|$, donne $|y(t) - z(t)| \leq |y(0) - z(0)| e^{Lt}$. Pour $t \leq 0$, on raisonne de même sur $[t, 0]$, avec la version à gauche du lemme. Donc $|y(t) - z(t)| \leq |y(0) - z(0)| e^{L|t|}$.

2. La fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne, car $|\cos'| = |\sin| \leq 1$. Les solutions sont globales par Cauchy-Lipschitz global. La question 1 donne donc $|y(1) - z(1)| \leq 0,01 e \approx 0,0272$.

3. Pour $y' = Ly$, la fonction $f(t, y) = Ly$ est L -lipschitzienne en y . Les solutions sont $y(t) = y(0) e^{Lt}$. Ainsi, pour $t \geq 0$, $|y(t) - z(t)| = |y(0) - z(0)| e^{Lt}$. **La majoration est une égalité** : elle est donc optimale.

4. Notons $y(t; y_0)$ la solution telle que $y(0) = y_0$. La question 1 s'écrit
 $|y(t; y_0) - y(t; z_0)| \leq e^{L|t|} |y_0 - z_0|$. Par conséquent, l'application $y_0 \rightarrow y(t; y_0)$
est $e^{L|t|}$ -lipschitzienne, donc continue.

Corrigé de l'exercice 7 : Explosion en temps fini

- La fonction $f(t, y) = 1 + y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz local donne donc **une unique solution maximale pour toute condition initiale**.
- La fonction $\tan$ vérifie $\tan' = 1 + \tan^2$ et $\tan 0 = 0$. Elle est solution sur $] -\pi/2, \pi/2[$. De plus, elle ne se prolonge pas, car $|\tan t| \rightarrow +\infty$ aux bornes. Donc **la solution maximale est** $y = \tan$ **sur** $] -\pi/2, \pi/2[$.
- Sur son intervalle J , on a $(\arctan y)' = \frac{y'}{1+y^2} = 1$. Donc $\arctan y(t) - t$ est une constante c . Ainsi, $\arctan y(t) = t + c \in] -\pi/2, \pi/2[$, ce qui impose $J \subset] -\pi/2 - c, \pi/2 - c[$. Réciproquement, $\tan(t + c)$ est solution sur tout cet intervalle et prolonge y . Par maximalité, $J =] -\pi/2 - c, \pi/2 - c[$, **de longueur** π .
- Un intervalle de longueur π n'est pas $\mathbb{R}$. Donc **aucune solution n'est globale**. C'est cohérent avec le théorème des bouts : comme $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la solution doit tendre en norme vers $+\infty$ aux bornes finies, ce que fait $\tan(t + c)$.

Corrigé de l'exercice 8 : Solution globale par majoration a priori

- La fonction $f(t, y) = -y^3 + \sin t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz local, **il existe une unique solution maximale**, sur un intervalle ouvert $] \alpha, \omega[$.
- On a $(y^2)' = 2y y' = -2y^4 + 2y \sin t$. Donc $(y^2)' \leq -2y^4 + 2|y| = 2|y|(1 - |y|^3)$. Si $|y(t)| \geq 1$, ce produit est négatif. Ainsi, $(y^2)'(t) \leq 0$ **dès que** $|y(t)| \geq 1$.
- Raisonnons par l'absurde : supposons $|y(t_1)| > M$ pour un $t_1 \in]0, \omega[$. Posons $t_2 = \sup \{ t \in]0, t_1] : |y(t)| \leq M \}$. Cet ensemble contient 0 , et $|y(t_2)| = M$ par

continuité. Sur $]t_2, t_1]$, on a $|y| > M \geq 1$, donc y^2 décroît. Ainsi, $y(t_1)^2 \leq y(t_2)^2 = M^2$, ce qui est absurde. Donc $|y(t)| \leq M$ sur $[0, \omega[$.

4. Si ω était fini, le corollaire du théorème des bouts imposerait $|y(t)| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \omega$. Cela contredit la question 3. Par conséquent, $\omega = +\infty$.

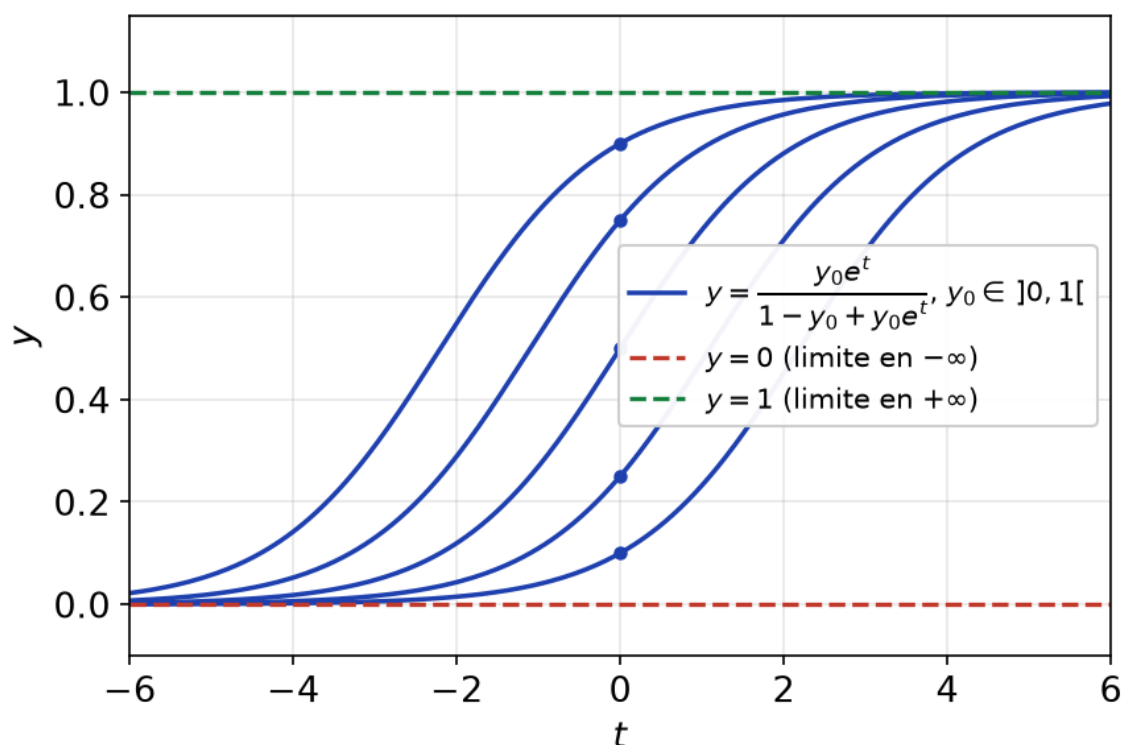
Point de méthode : dans le passé, l'argument tombe, car y^2 croît quand on remonte le temps ; la solution peut alors exploser, comme pour $y' = -y^3$.

Corrigé de l'exercice 9 : Étude qualitative de l'équation logistique

- La fonction $f(t, y) = y(1 - y)$ est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne **une unique solution maximale**, sur $] \alpha, \omega[$.
- Les fonctions constantes 0 et 1 sont solutions. Supposons qu'il existe t_1 tel que $y(t_1) = 0$. Alors y et la solution nulle vérifient la même condition en t_1 . Par unicité, $y = 0$, ce qui contredit $y(0) = y_0 > 0$. De même, y ne prend jamais la valeur 1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, y reste donc dans $]0, 1[$. Ainsi, $0 < y(t) < 1$ sur $] \alpha, \omega[$.
- La solution est bornée. Or, si ω était fini, $|y(t)|$ tendrait vers $+\infty$ en ω par le théorème des bouts. Donc $\omega = +\infty$, et de même $\alpha = -\infty$. Par conséquent, y **est définie sur $\mathbb{R}$** .
- On a $y' = y(1 - y) > 0$, donc y **est strictement croissante**. Elle admet une limite $\ell \in]y_0, 1]$ en $+\infty$. Si $\ell < 1$, alors $y'(t) \rightarrow \ell(1 - \ell) > 0$. Il existerait donc T tel que $y' \geq \ell(1 - \ell)/2$ sur $[T, +\infty[$, et y tendrait vers $+\infty$: c'est absurde. Donc $y(t) \rightarrow 1$ en $+\infty$. De même, la limite $m \in [0, y_0[$ en $-\infty$ vérifie $m(1 - m) = 0$, sinon y tendrait vers $-\infty$. Donc $y(t) \rightarrow 0$ en $-\infty$.
- Posons $D(t) = 1 - y_0 + y_0 e^t > 0$ et $y = y_0 e^t / D$. Alors
$$y' = \frac{y_0 e^t D - y_0 e^t \cdot y_0 e^t}{D^2} = \frac{y_0 e^t (1 - y_0)}{D^2}.$$
 D'autre part, $1 - y = \frac{1 - y_0}{D}$, donc
$$y(1 - y) = \frac{y_0 e^t (1 - y_0)}{D^2}.$$
 De plus, $y(0) = y_0$. Par unicité, $y(t) = \frac{y_0 e^t}{1 - y_0 + y_0 e^t}$. On retrouve bien $0 < y < 1$, une définition sur $\mathbb{R}$ et les limites 0 et 1.

La figure ci-dessous représente ces solutions pour plusieurs valeurs de y_0 . Elles sont toutes

coincées entre les deux solutions constantes, conformément à la question 2.



Corrigé de l'exercice 10 : Une solution qui explose sans formule explicite

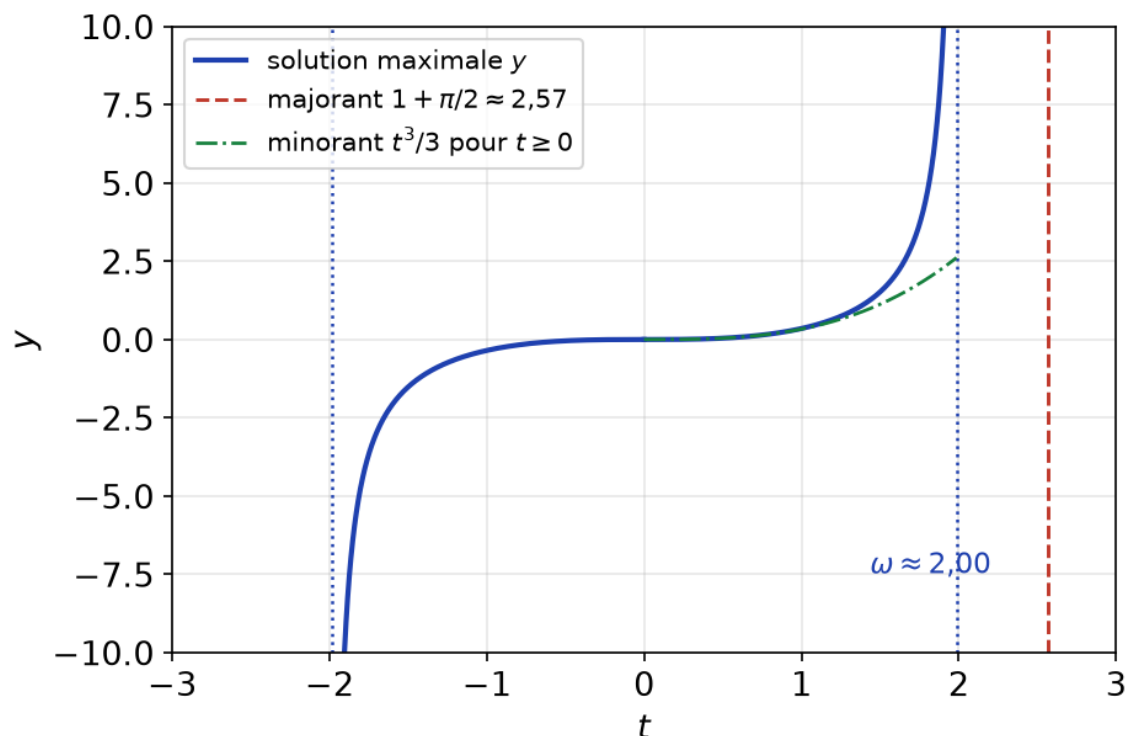
1. La fonction $f(t, y) = t^2 + y^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne donc **une unique solution maximale** y , sur $] \alpha, \omega[$.
2. La fonction z est définie sur $] -\omega, -\alpha[$. De plus,
 $z'(t) = y'(-t) = t^2 + y(-t)^2 = t^2 + z(t)^2$, et $z(0) = 0$. Ensuite, z est maximale : un prolongement de z donnerait, par la même symétrie, un prolongement de y . Par unicité de la solution maximale, $z = y$ et les intervalles coïncident. Donc $\alpha = -\omega$ **et**
 $y(-t) = -y(t)$.
3. On a $y'(t) = t^2 + y(t)^2 \geq t^2$, et $y'(t) > 0$ pour $t \neq 0$. Donc y **est strictement**

croissante. Ensuite, pour $t \in [0, \omega[$, $y(t) = \int_0^t y' \geq \int_0^t s^2 ds$. Ainsi, $y(t) \geq t^3/3$.

4. Pour $t \in [1, \omega[$, on a $t^2 \geq 1$, donc $y' \geq 1 + y^2$. Par conséquent,
 $(\arctan y)' = \frac{y'}{1+y^2} \geq 1$. En intégrant sur $[1, t]$, on obtient
 $\arctan y(t) \geq \arctan y(1) + t - 1$. Or $y(1) \geq 1/3 > 0$, donc $\arctan y(t) \geq t - 1$.
 Comme $\arctan y(t) < \pi/2$, on a $t < 1 + \pi/2$ pour tout $t \in [1, \omega[$. Donc
 $\omega \leq 1 + \frac{\pi}{2}$.

5. Si $\omega \leq 1$, il est fini ; sinon, il est majoré par $1 + \pi/2$. Dans tous les cas, ω **est fini** et la solution n'est pas globale. Ensuite, y croît, donc elle admet une limite en ω . Si cette limite était finie, y serait bornée près de ω , ce qui contredit le théorème des bouts. Donc $y(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \omega$, et $y(t) \rightarrow -\infty$ en $-\omega$ par imparité.

La figure ci-dessous montre une approximation numérique de y . L'explosion a lieu vers $\omega \approx 2,00$, bien en dessous du majorant $1 + \pi/2 \approx 2,57$. On voit aussi le minorant $t^3/3$ de la question 3.



Corrigé de l'exercice 11 : Résolvante et wronskien d'un système non autonome

1. Sur I , on divise par $t^2 \neq 0$: $y'' = \frac{2}{t} y' - \frac{2}{t^2} y$. Avec $X = (y, y')$, on obtient $X' = A(t) X$, où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/t^2 & 2/t \end{pmatrix}$. Cette matrice est continue sur I . Le système est linéaire, donc **ses solutions sont définies sur I tout entier**.

2. Pour $y = t$: $t^2 \cdot 0 - 2t \cdot 1 + 2t = 0$. Pour $y = t^2$: $t^2 \cdot 2 - 2t \cdot 2t + 2t^2 = 0$. Ce sont bien des solutions. Leur wronskien vaut $W(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2$. Donc

$W(t) = t^2$. Par Liouville, $W(t) = W(1) \exp \int_1^t \frac{2}{s} ds = 1 \cdot e^{2 \ln t} = t^2$. Le résultat concorde.

3. Une matrice fondamentale est $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$, de déterminant t^2 . Donc

$\Phi(s)^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} 2s & -s^2 \\ -1 & s \end{pmatrix}$. Le produit $\Phi(t) \Phi(s)^{-1}$ donne

$$R(t, s) = \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} 2ts - t^2 & ts(t - s) \\ 2(s - t) & s(2t - s) \end{pmatrix}.$$

Pour $t = s$, on trouve $\frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} s^2 & 0 \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}$, donc $R(s, s) = I_2$.

4. L'équation normalisée s'écrit $y'' - \frac{2}{t} y' + \frac{2}{t^2} y = t$. On cherche $y = \lambda(t) t + \mu(t) t^2$ avec $\lambda' t + \mu' t^2 = 0$ et $\lambda' + 2t \mu' = t$. La première équation donne $\lambda' = -t \mu'$. En reportant, $t \mu' = t$, donc $\mu' = 1$ et $\lambda' = -t$. On prend $\mu = t$ et $\lambda = -t^2/2$: la solution particulière est $-\frac{t^3}{2} + t^3 = \frac{t^3}{2}$. Vérification : $t^2 \cdot 3t - 2t \cdot \frac{3t^2}{2} + t^3 = t^3$. Donc **les solutions sont $y = \frac{t^3}{2} + a t + b t^2$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$** .

Point de méthode : la formule $\int_1^t R(t, s) B(s) ds$ avec $B(s) = (0, s)$ donne la solution nulle en

1 : sa première composante vaut $\int_1^t t(t-s) ds = \frac{t(t-1)^2}{2}$, qui diffère de $t^3/2$ par

$-t^2 + t/2$, solution homogène.

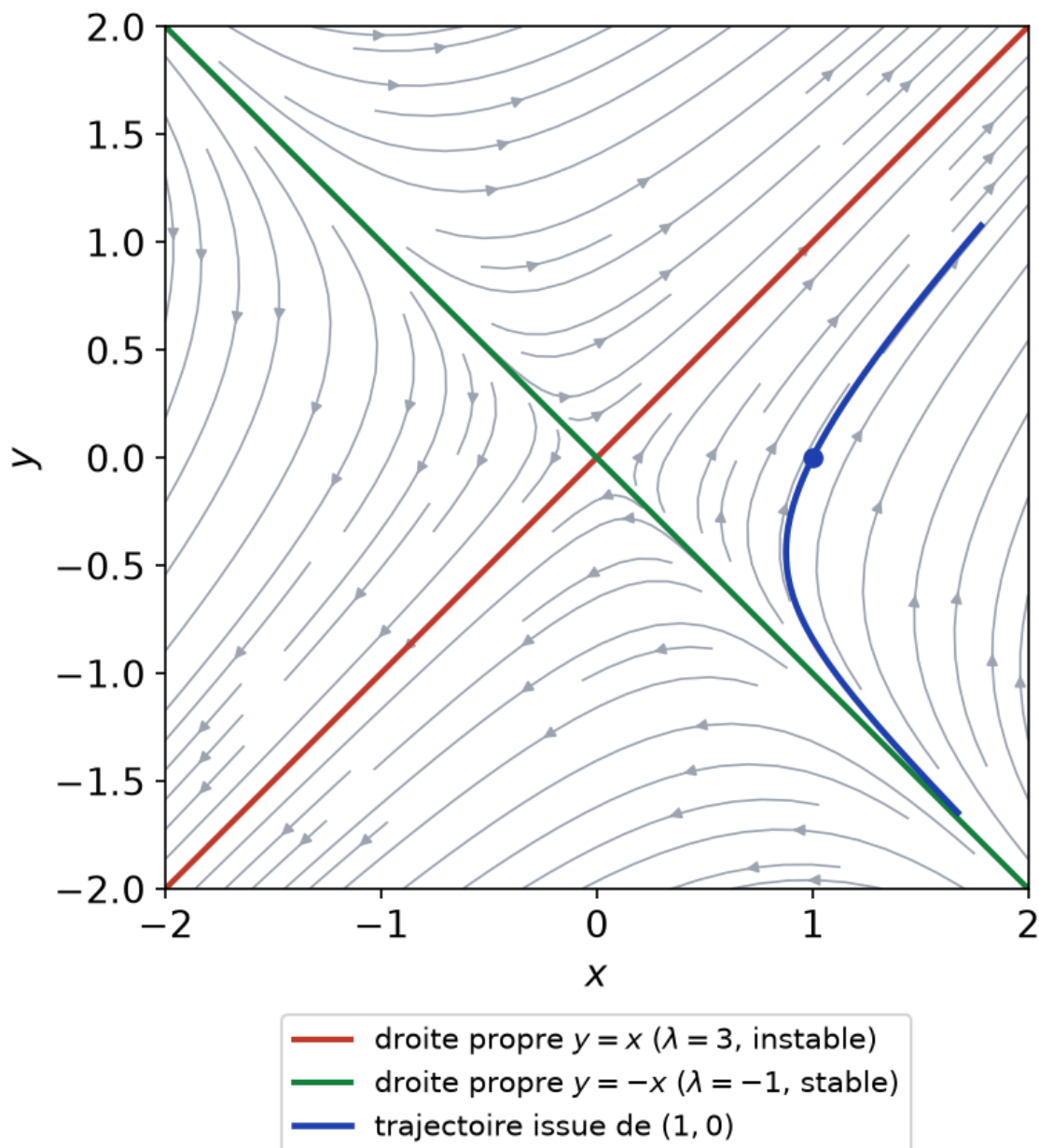
Corrigé de l'exercice 12 : Exponentielle d'une matrice diagonalisable

1. Le polynôme caractéristique vaut $(1 - \lambda)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Les vecteurs propres sont $(1, 1)$ pour 3 et $(1, -1)$ pour -1 . Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = P \operatorname{diag}(3, -1) P^{-1}$. Donc

$$e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2. La solution est $e^{tA} (1, 0)$, c'est-à-dire la première colonne. Donc $x(t) = \frac{e^{3t} + e^{-t}}{2}$ et $y(t) = \frac{e^{3t} - e^{-t}}{2}$. On vérifie : $x + 2y = \frac{3e^{3t} - e^{-t}}{2} = x'$.
3. La valeur propre 3 est strictement positive : **l'origine est instable**. Plus précisément, toute solution s'écrit $X(t) = c_1 e^{3t} (1, 1) + c_2 e^{-t} (1, -1)$, avec $c_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$. Elle tend vers 0 si et seulement si $c_1 = 0$. Ainsi, **la solution tend vers l'origine si et seulement si $x_0 + y_0 = 0$** .

La figure ci-dessous illustre ce col. La droite $y = -x$ est attirée vers l'origine, la droite $y = x$ en est repoussée. La trajectoire issue de $(1, 0)$ finit par longer la direction instable.



Corrigé de l'exercice 13 : Exponentielle par décomposition de Dunford

- On calcule $J^2 = -I_2$. Donc $J^{2k} = (-1)^k I_2$ et $J^{2k+1} = (-1)^k J$. En séparant les termes pairs et impairs de la série, on obtient $e^{tJ} = \cos t I_2 + \sin t J$. Ainsi,
$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$
 la rotation d'angle t .

2. On écrit $A = 2I_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or N^2 a pour seul coefficient non nul un 1 en position $(1, 3)$, et $N^3 = 0$. Comme $2I_3$ commute avec N ,

$$e^{tA} = e^{2t} \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La solution demandée est la troisième colonne : $X(t) = e^{2t} \left(\frac{t^2}{2}, t, 1 \right)$.

3. Le polynôme caractéristique vaut $(3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = (\lambda - 2)^2$. Posons $N_B = B - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie $N_B^2 = 0$. Ainsi, $B = 2I_2 + N_B$ est la décomposition de Dunford. Donc $e^{tB} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + t & t \\ -t & 1 - t \end{pmatrix}$. Enfin, $\det e^{tB} = e^{4t} ((1+t)(1-t) + t^2) = e^{4t}$, et $\text{tr } B = 4$. L'égalité est vérifiée.

4. On a $P^2 = Q^2 = 0$, donc $e^P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $e^Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $S = P + Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $S^2 = I_2$. Donc $e^S = \cosh 1 I_2 + \sinh 1 S$. Or $e^P e^Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, tandis que le coefficient $(1, 1)$ de e^{P+Q} vaut $\cosh 1 \approx 1,543$. Ainsi, $e^{P+Q} \neq e^P e^Q$: l'hypothèse de commutation est indispensable, et ici $PQ \neq QP$.

Corrigé de l'exercice 14 : Système à coefficients constants avec second membre

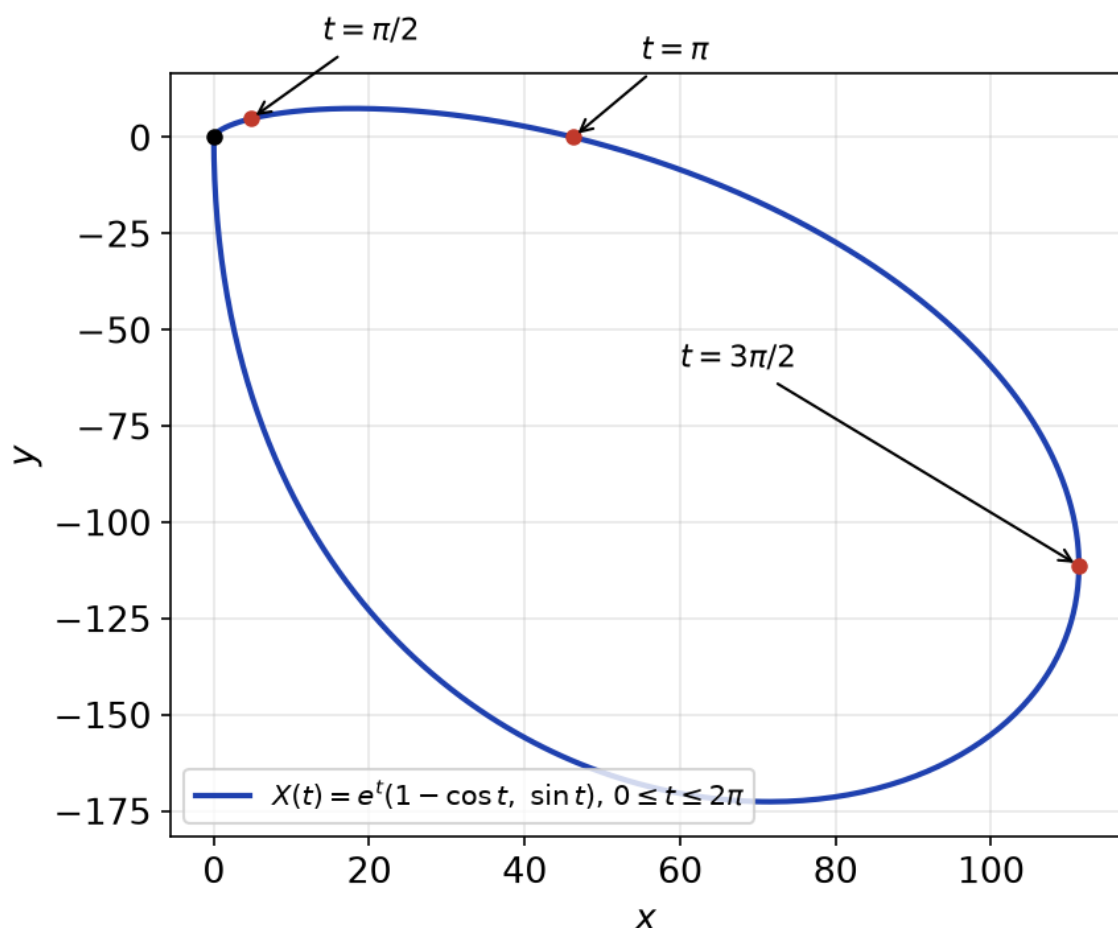
1. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = (0, e^t)$. De plus, $A = I_2 + K$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K^2 = -I_2$. Comme I_2 et K commutent, $e^{tA} = e^t e^{tK} = e^t (\cos t I_2 + \sin t K)$. Donc $e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

2. Comme $X(0) = 0$, la formule donne $X(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} B(s) ds$. Or $e^{(t-s)A} B(s) = e^{t-s} e^s (\sin(t-s), \cos(t-s)) = e^t (\sin(t-s), \cos(t-s))$. En intégrant en s sur $[0, t]$, on obtient $\int_0^t \sin(t-s) ds = 1 - \cos t$ et

$$\int_0^t \cos(t-s) ds = \sin t. \text{ Donc } x(t) = e^t (1 - \cos t) \text{ et } y(t) = e^t \sin t.$$

3. On a $x' = e^t (1 - \cos t + \sin t)$ et $x + y = e^t (1 - \cos t + \sin t)$. Ensuite, $y' = e^t (\sin t + \cos t)$, et $-x + y + e^t = e^t (-1 + \cos t + \sin t + 1)$. Les deux équations sont vérifiées, ainsi que $x(0) = y(0) = 0$.
4. La norme vaut $|X(t)| = e^t \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = e^t \sqrt{2 - 2\cos t} = 2e^t |\sin(t/2)|$. La trajectoire part de l'origine, passe par $e^{\pi/2}(1, 1)$, atteint $(2e^\pi, 0)$, puis $e^{3\pi/2}(1, -1)$. Enfin, **elle revient à l'origine en** $t = 2\pi$, en décrivant une grande boucle dans le demi-plan $x \geq 0$.

La figure ci-dessous représente cette boucle, avec les points de paramètres $\pi/2$, π et $3\pi/2$. Le facteur e^t explique sa forte dissymétrie.



Corrigé de l'exercice 15 : Stabilité d'un système linéaire selon un paramètre

1. Le polynôme caractéristique vaut $(a - \lambda)^2 + 1$. Donc **les valeurs propres sont** $a + i$ **et** $a - i$.
2. Pour $X = (x, y)$, on a

$$\frac{d}{dt} |X|^2 = 2 \langle X, A_a X \rangle = 2(x(ax + y) + y(-x + ay)) = 2a(x^2 + y^2)$$
. Ainsi, $|X|^2$ vérifie une équation linéaire scalaire. Donc $|X(t)| = e^{at} |X(0)|$.
3. Si $a < 0$, toutes les solutions tendent vers 0 et $|X(t)| \leq |X(0)|$: **l'origine est asymptotiquement stable**. Si $a = 0$, la norme est conservée : l'origine est **stable, mais pas asymptotiquement stable** (on prend $\delta = \varepsilon$). Si $a > 0$, toute solution non nulle part à l'infini : **l'origine est instable**.
4. On écrit $A_a = a I_2 + K$, avec K comme dans l'exercice 14. Donc

$$e^{tA_a} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$
. La matrice de droite est la rotation d'angle $-t$. Ainsi, les trajectoires tournent dans le sens horaire. **Ce sont des spirales qui convergent vers 0 si** $a < 0$, **des cercles si** $a = 0$, **des spirales qui s'éloignent si** $a > 0$.

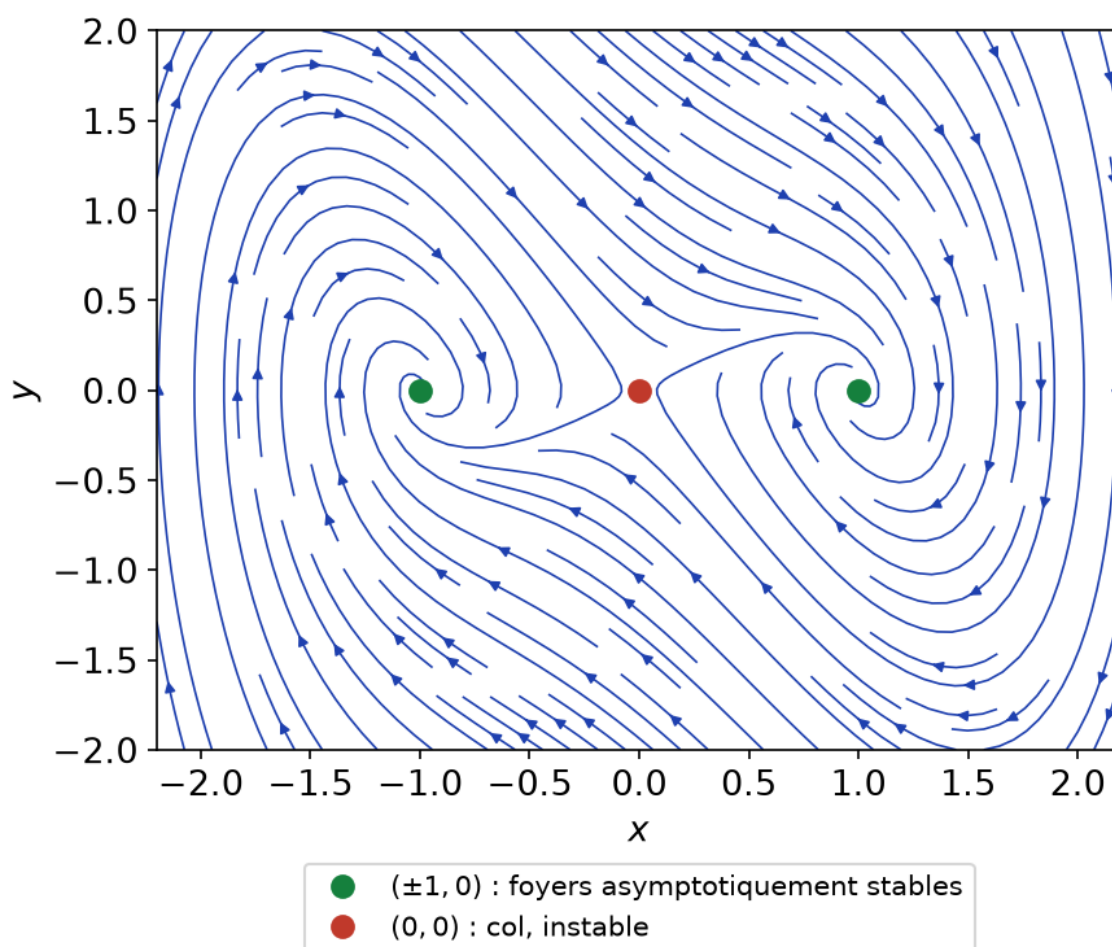
Corrigé de l'exercice 16 : Linéarisation autour des équilibres

1. Les équilibres vérifient $y = 0$ et $x - x^3 = x(1 - x)(1 + x) = 0$. Donc **les équilibres sont** $(0, 0)$, $(1, 0)$ **et** $(-1, 0)$.
2. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$. En $(0, 0)$, elle vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de déterminant $-1 < 0$. Les valeurs propres sont réelles de signes opposés : $(0, 0)$ **est un col, donc instable**. En $(\pm 1, 0)$, elle vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, de trace -1 et de déterminant 2 . Les valeurs propres sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$, de partie réelle $-1/2$. Par le théorème de linéarisation, $(1, 0)$ **et** $(-1, 0)$ **sont des foyers asymptotiquement stables**.
3. On a $\frac{\partial E}{\partial x} = x^3 - x$ et $\frac{\partial E}{\partial y} = y$. Le long d'une solution,

$$\frac{d}{dt} E(x, y) = (x^3 - x)y + y(x - x^3 - y). \text{ Donc } \frac{d}{dt} E = -y^2 \leq 0.$$

4. Pour $t \geq 0$, on a donc $E(X(t)) \leq E(X(0)) = E_0$. Or $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{(x^2 - 1)^2 - 1}{4} \geq -\frac{1}{4}$. Par conséquent, $\frac{y^2}{2} \leq E_0 + \frac{1}{4}$, et $\frac{(x^2 - 1)^2}{4} \leq E_0 + \frac{1}{4}$. Les deux coordonnées restent bornées sur $[0, \omega[$. Par le théorème des bouts, $\omega = +\infty$.

Le portrait de phase ci-dessous résume l'étude. Les trajectoires s'enroulent autour des deux foyers, tandis que le col à l'origine sépare leurs bassins d'attraction.



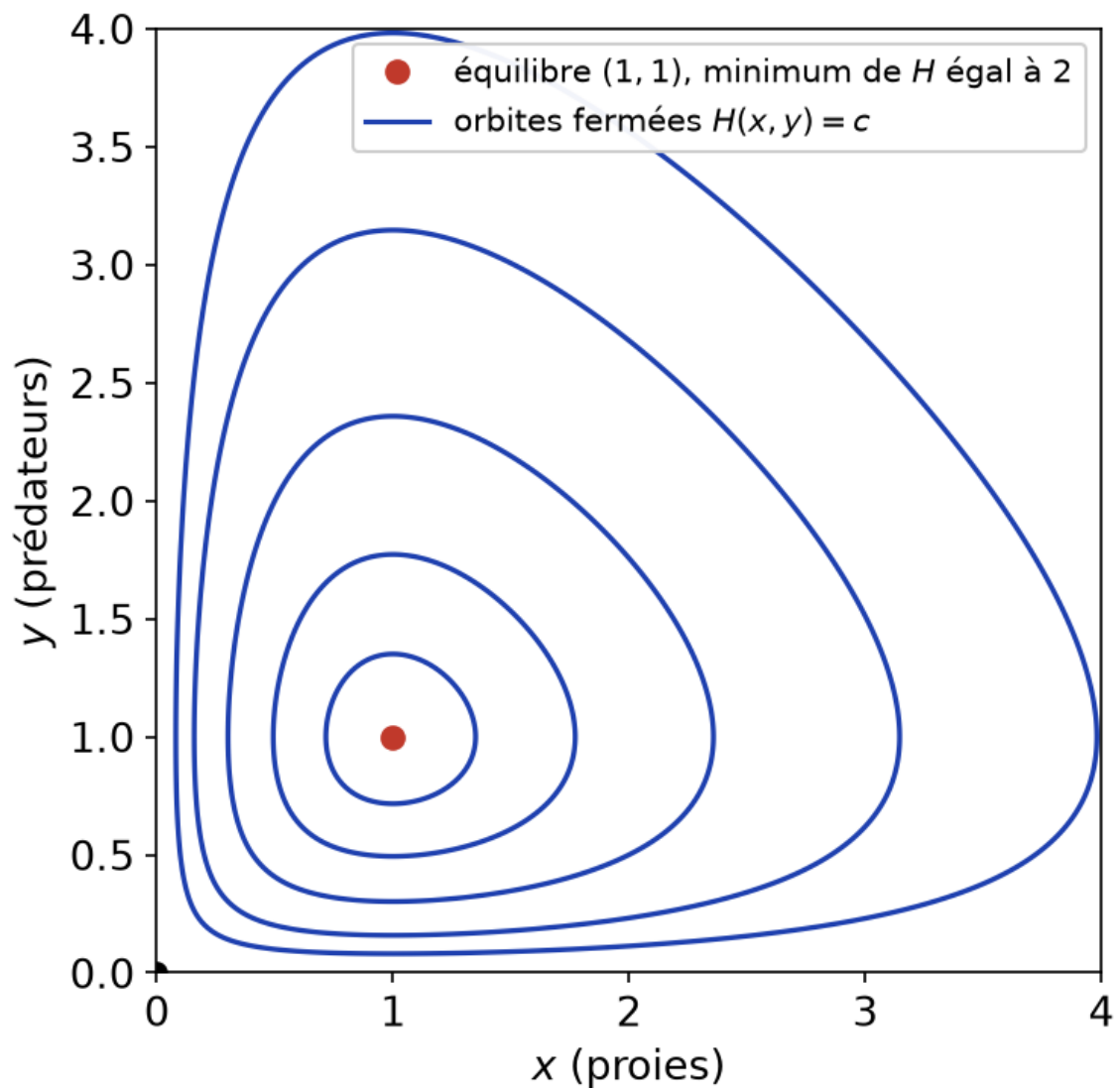
Corrigé de l'exercice 17 : Modèle proies-prédateurs

1. Le champ $F(x, y) = (x(1 - y), y(x - 1))$ est polynomial, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz donne **l'existence et l'unicité des solutions maximales**. Les équilibres vérifient $x(1 - y) = 0$ et $y(x - 1) = 0$. Si $x = 0$, la seconde équation donne $y = 0$. Sinon, $y = 1$, puis $x = 1$. Donc **les équilibres sont $(0, 0)$ et $(1, 1)$** .
2. Si $x(0) = 0$, la fonction $(0, y_0 e^{-t})$ est solution, avec la bonne condition initiale. Par unicité, **c'est la solution**. De même, si $y(0) = 0$, **la solution est $(x_0 e^t, 0)$** . Les deux axes sont donc formés de trajectoires. Soit maintenant une solution avec $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$. Si $x(t_1) = 0$ pour un t_1 , l'unicité en t_1 imposerait $x = 0$ partout, ce qui contredit $x(0) > 0$. Par continuité, **x et y restent strictement positives**.
3. Sur $]0, +\infty[^2$, on a $\nabla H = (1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y})$. Le long d'une solution,

$$\frac{d}{dt} H = \frac{x-1}{x} \cdot x(1-y) + \frac{y-1}{y} \cdot y(x-1) = (x-1)(1-y) + (y-1)(x-1) = 0.$$
 Donc **H est une intégrale première**.
4. Posons $h(u) = u - \ln u$ sur $]0, +\infty[$. Cette fonction admet un minimum 1 en $u = 1$ et tend vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$. Soit $c = H(x_0, y_0)$. Pour tout t , on a $h(x(t)) \leq c - 1$ et $h(y(t)) \leq c - 1$. L'ensemble $\{h \leq c - 1\}$ est un segment $[u_1, u_2] \subset]0, +\infty[$. La solution reste donc dans le compact $[u_1, u_2]^2$. Par le théorème des bouts appliqué sur $\mathbb{R}^2$, **la solution est définie sur $\mathbb{R}$** .
5. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{x} & -y \\ \frac{1}{y} & x - 1 \end{pmatrix}$. En $(0, 0)$, c'est $\text{diag}(1, -1)$: **un col, donc un équilibre instable**. En $(1, 1)$, c'est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\pm i$. **La linéarisation ne permet pas de conclure**.

Utilisons H , qui admet en $(1, 1)$ un minimum strict égal à 2. Soit $\varepsilon > 0$, avec $\overline{B}((1, 1), \varepsilon) \subset]0, +\infty[^2$. Le minimum m de H sur le cercle $|X - (1, 1)| = \varepsilon$ vérifie $m > 2$, par compacité. Ensuite, par continuité de H , il existe $\delta \in]0, \varepsilon[$ tel que $H(X_0) < m$ si $|X_0 - (1, 1)| < \delta$. Comme H est constante sur la trajectoire, celle-ci ne peut pas atteindre le cercle. Par connexité, elle reste dans la boule. Donc **$(1, 1)$ est stable**. Il n'est pas asymptotiquement stable, car une solution non constante reste sur une ligne de niveau $H = c > 2$.

La figure ci-dessous montre ces lignes de niveau : ce sont des courbes fermées autour de $(1, 1)$, parcourues périodiquement par les solutions.



Corrigé de l'exercice 18 : Méthode d'Euler pour l'exponentielle

1. Le schéma s'écrit $y_{k+1} = y_k + h y_k = (1 + h) y_k$, avec $y_0 = 1$. C'est une suite géométrique, donc $y_k = (1 + h)^k$.
2. Avec $h = 0,25$: $y_1 = 1,25$, $y_2 = 1,5625$, $y_3 = 1,953125$ et $y_4 = 2,44140625$. Donc $e - y_4 \approx 0,2769$.
3. On a $y_N = \exp\left(N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right)$. Le développement limité

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$ donne $N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)$. Par conséquent, $y_N = e \left(1 - \frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)$. Ainsi, $y_N \rightarrow e$ et $e - y_N \sim \frac{e}{2N}$.

4. Ici, $L = 1$, $T = 1$ et $M = \sup_{[0,1]} |y''| = e$. La majoration vaut $\frac{e}{2} h(e-1) = \frac{e(e-1)}{2N} \approx \frac{2,34}{N}$. L'erreur réelle est équivalente à $\frac{1,36}{N}$. **La majoration est donc du bon ordre** $1/N$, à un facteur $e-1$ près.

Corrigé de l'exercice 19 : Convergence de la méthode d'Euler

1. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h y'(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) y''(s) ds. \text{ Or}$$

$$y'(t_k) = f(t_k, y(t_k)). \text{ Le reste } r_k \text{ vérifie } |r_k| \leq M \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) ds. \text{ Donc}$$

$$|r_k| \leq \frac{M h^2}{2}.$$

2. En soustrayant $y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k)$, on obtient $y(t_{k+1}) - y_{k+1} = y(t_k) - y_k + h (f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)) + r_k$. L'inégalité triangulaire et le caractère lipschitzien donnent $e_{k+1} \leq (1 + hL) e_k + \frac{M h^2}{2}$.

3. La formule est vraie pour $k = 0$. Si elle l'est au rang k , alors

$$e_{k+1} \leq q c \frac{q^k - 1}{q - 1} + c = c \frac{q^{k+1} - q + q - 1}{q - 1}. \text{ Donc } e_k \leq c \frac{q^k - 1}{q - 1} \text{ pour tout } k.$$

4. On applique la question 3 avec $q = 1 + hL$ et $c = M h^2 / 2$. Alors

$$e_k \leq \frac{M h^2}{2} \cdot \frac{(1 + hL)^k - 1}{hL}. \text{ Or } 1 + hL \leq e^{hL}, \text{ donc } (1 + hL)^k \leq e^{khL} \leq e^{LT}$$

pour $k \leq N$. Finalement, $\max_k e_k \leq \frac{M h}{2L} (e^{LT} - 1)$.

5. On a $y' = 1 - 2e^{-t}$, et $-y + t = -t + 1 - 2e^{-t} + t = 1 - 2e^{-t}$. De plus, $y(0) = -1 + 2 = 1$. Donc $y(t) = t - 1 + 2e^{-t}$. Ensuite, $f(t, y) = t - y$ est 1-lipschitzienne en y , et $|y''| = 2e^{-t} \leq 2$. La majoration vaut $\frac{2h}{2}(e-1) = h(e-1)$. Elle est inférieure à 10^{-3} dès que $h \leq \frac{10^{-3}}{e-1} \approx 5,82 \cdot 10^{-4}$. Par exemple, $h = 1/1719$ ou $h = 1/2000$ convient.

Corrigé de l'exercice 20 : Cauchy-Lipschitz par une norme à poids

1. Pour $t \in K$, on a $e^{-2L(d-c)} \leq e^{-2L|t-t_0|} \leq 1$. Donc $e^{-2L(d-c)} |y|_\infty \leq N(y) \leq |y|_\infty$. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire se vérifient point par point, et $N(y) = 0$ impose $y = 0$. Ainsi, **N est une norme équivalente à la norme uniforme**. Or $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. Une suite de Cauchy pour N l'est aussi pour $\|\cdot\|_\infty$, et converge pour les deux normes. Donc **(E, N) est complet**.

2. La fonction $s \rightarrow f(s, y(s))$ est continue, donc $\Phi(y)$ est de classe C^1 , et en particulier $\Phi(y) \in E$. Soit $t \geq t_0$. Pour tout s , $|y(s) - z(s)| \leq e^{2L|s-t_0|} N(y-z)$. Par conséquent,

$$|\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)| \leq \int_{t_0}^t L e^{2L(s-t_0)} N(y-z) \, ds = \frac{e^{2L(t-t_0)} - 1}{2} N(y-z).$$

On multiplie par $e^{-2L(t-t_0)}$: le résultat est au plus $\frac{1}{2} N(y-z)$. Le cas $t \leq t_0$ est identique. Donc **$N(\Phi(y) - \Phi(z)) \leq \frac{1}{2} N(y-z)$** .

3. L'application Φ est contractante sur l'espace complet (E, N) . Par le théorème du point fixe de Banach, elle admet un unique point fixe. Or les points fixes de Φ sont exactement les solutions du problème sur K , par la forme intégrale. Donc **le problème admet une unique solution sur K** .
4. Pour la norme uniforme, le même calcul donne seulement $|\Phi(y) - \Phi(z)|_\infty \leq L(d-c) |y-z|_\infty$. Cette constante dépasse 1 dès que le segment est long. **Φ est contractante pour $\|\cdot\|_\infty$ lorsque $L(d-c) < 1$** , mais pas en général. Le poids exponentiel compense la croissance possible des écarts : c'est tout l'intérêt de N .
5. Pour tout entier $m \geq |t_0|$, la question 3 donne une unique solution y_m sur $[-m, m]$. Par unicité, y_{m+1} coïncide avec y_m sur $[-m, m]$. On définit donc $y(t) = y_m(t)$ pour $|t| \leq m$. C'est une solution sur $\mathbb{R}$. Si z en est une autre, sa restriction à $[-m, m]$ vaut y_m . Donc **la solution sur $\mathbb{R}$ existe et est unique**.

Corrigé de l'exercice 21 : Formule de Liouville

1. Le déterminant est une forme n -linéaire des colonnes. La dérivée d'une application multilinéaire de fonctions dérivables s'obtient en dérivant une colonne à la fois. Or $\varphi'_j = A(t) \varphi_j$. Donc $(\det \Phi)' = \sum_j \det(\varphi_1, \dots, A \varphi_j, \dots, \varphi_n)$.
2. Notons $\Delta(v_1, \dots, v_n)$ cette somme. Chaque terme est linéaire en chaque v_i , donc Δ est n -linéaire. Supposons $v_p = v_q$ avec $p < q$. Les termes $j \notin \{p, q\}$ contiennent deux colonnes égales, donc sont nuls. Les termes $j = p$ et $j = q$ se déduisent l'un de l'autre par échange des colonnes p et q : ils sont opposés. Ainsi, Δ est alternée, donc proportionnelle au déterminant. Enfin, sur la base canonique, $\det(e_1, \dots, M e_j, \dots, e_n) = m_{jj}$. Donc $\Delta = \text{tr}(M) \det$.
3. Avec $M = A(t)$, on obtient $W' = \text{tr}(A(t)) W$. C'est une équation linéaire scalaire. Donc $W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds$. Pour $A = M$ constante, $\Phi(t) = e^{tM}$ est fondamentale, avec $\Phi(0) = I_n$. Donc $\det e^{tM} = e^{t \text{tr} M}$.
4. Pour $y_1 = e^t$, on a $t e^t - (t+1) e^t + e^t = 0$. Sous forme normalisée, $y'' = \frac{t+1}{t} y' - \frac{1}{t} y$, et la trace de la matrice associée vaut $1 + \frac{1}{t}$. Par Liouville, le wronskien de y_1 et d'une autre solution y vaut $W = C t e^t$. Or $W = y_1 y' - y'_1 y = e^t (y' - y)$. Donc $y' - y = C t$. Cette équation du premier ordre a pour solutions $y = -C(t+1) + D e^t$. Par conséquent, **les solutions sont** $y = \lambda e^t + \mu(t+1)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On vérifie que $t+1$ est bien solution : $0 - (t+1) + (t+1) = 0$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : le pendule simple et le pendule amorti

Partie A : pendule simple.

1. On pose $x = \theta$ et $y = \theta'$. Le système s'écrit $x' = y$, $y' = -\sin x$, soit

$X' = F(X)$ avec $F(x, y) = (y, -\sin x)$. Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $|y - y'| \leq \|X - X'\|_\infty$ et $|\sin x - \sin x'| \leq |x - x'|$, par l'inégalité des accroissements finis. Donc F est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$. La version globale du théorème de Cauchy-Lipschitz montre que **toutes les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$** .

2. Le long d'une solution, $\frac{d}{dt} E = y y' + \sin x \cdot x' = -y \sin x + y \sin x = 0$. Donc E **est une intégrale première** : c'est la conservation de l'énergie mécanique.

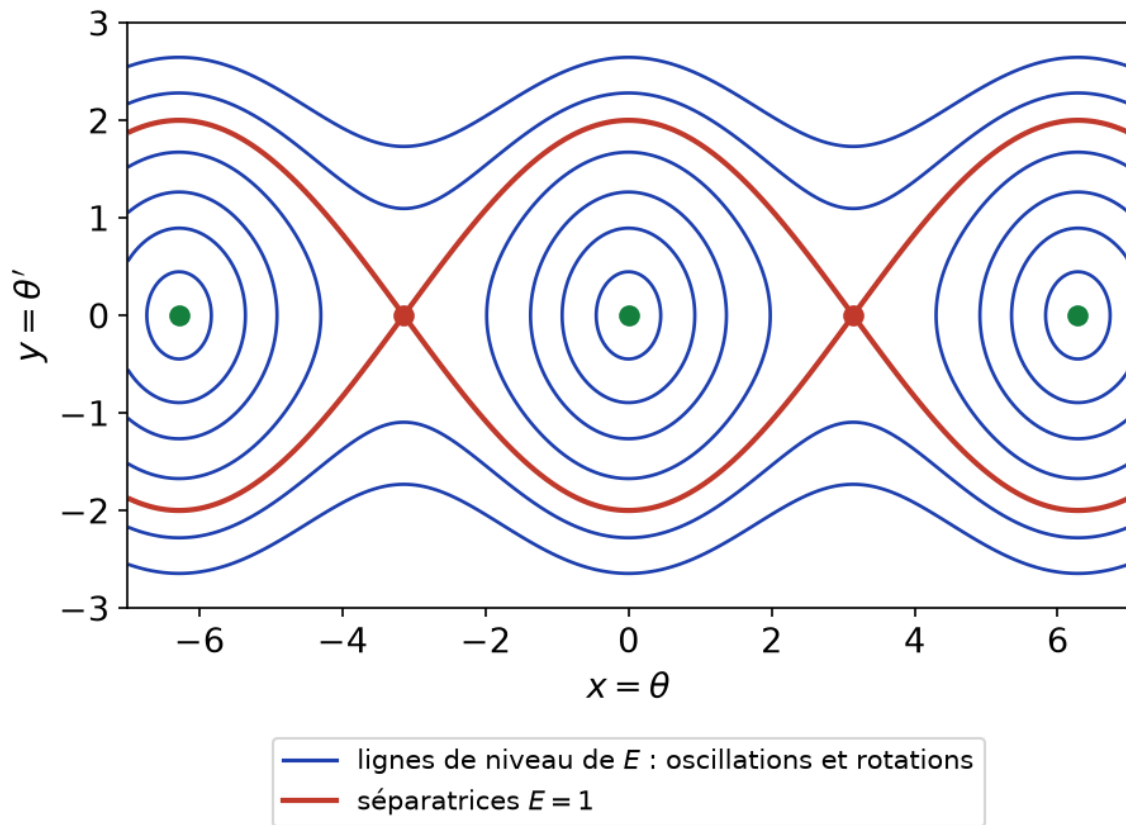
3. Les équilibres vérifient $y = 0$ et $\sin x = 0$: **ce sont les points** $(k\pi, 0)$. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$. En $(0, 0)$, elle a pour valeurs propres $\pm i$, de partie réelle nulle : **la linéarisation ne conclut pas**. En $(\pi, 0)$, elle vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres ± 1 . Par le théorème de linéarisation, $(\pi, 0)$ **est instable**.

4. On a $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$. Pour $|x| \leq \pi$, on a $|x/2| \leq \pi/2$, et la concavité de $\sin$ sur $[0, \pi/2]$ donne $|\sin(x/2)| \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{|x|}{2}$. Donc $1 - \cos x \geq \frac{2x^2}{\pi^2}$.

Posons $V = E + 1 = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x \geq 0$, constante le long des solutions. Pour $|x| \leq \pi$, comme $\frac{1}{2} \geq \frac{2}{\pi^2}$, on a $V(x, y) \geq \frac{2}{\pi^2}(x^2 + y^2)$. De plus, $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, donc $V(x, y) \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ partout. Soit $\varepsilon \in]0, \pi[$, et $\delta = 2\varepsilon / \pi$. Si $|X_0| < \delta$, en norme euclidienne, alors $V(X(t)) = V(X_0) < \frac{\delta^2}{2} = \frac{2\varepsilon^2}{\pi^2}$. Supposons qu'il existe un premier instant $t_1 > 0$ tel que $|X(t_1)| = \varepsilon$. Sur $[0, t_1]$, on a $|x| \leq \varepsilon < \pi$, donc $V(X(t_1)) \geq \frac{2\varepsilon^2}{\pi^2}$: c'est absurde. Ainsi, $(0, 0)$ **est stable**.

En revanche, il n'est pas asymptotiquement stable. En effet, si $X_0 \neq 0$ est proche de 0 , alors $V(X_0) > 0$ et $V(X(t)) = V(X_0)$ pour tout t . Si $X(t)$ tendait vers 0 , la continuité de V donnerait $V(X_0) = 0$. **Les petites oscillations se poursuivent indéfiniment.**

La figure ci-dessous représente les lignes de niveau de E . Autour de $(0, 0)$, ce sont des courbes fermées : les oscillations. Au-dessus des séparatrices $E = 1$, le pendule fait des tours complets.



Partie B : pendule amorti.

1. Le système devient $x' = y$, $y' = -\gamma y - \sin x$. Le long d'une solution,
 $\frac{d}{dt} E = y(-\gamma y - \sin x) + y \sin x$. Donc $\frac{d}{dt} E = -\gamma y^2 \leq 0$: le frottement dissipe l'énergie, qui décroît strictement tant que la vitesse n'est pas nulle.

2. La jacobienne vaut $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\gamma \end{pmatrix}$. En $(0, 0)$, le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + \gamma \lambda + 1$. Si ses racines sont réelles, leur somme $-\gamma$ est négative et leur produit 1 positif : elles sont toutes deux négatives. Si elles sont complexes conjuguées, leur partie réelle vaut $-\gamma/2 < 0$. Dans les deux cas, $(0, 0)$ **est asymptotiquement stable**. En $(\pi, 0)$, le polynôme vaut $\lambda^2 + \gamma \lambda - 1$. Le produit des racines vaut -1 : elles sont réelles et de signes opposés. Donc $(\pi, 0)$ **est un col instable**.

Point de méthode : quand la linéarisation donne des valeurs propres imaginaires pures, on cherche une

quantité conservée ou dissipée, comme l'énergie.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L3

- Le cours : [équations différentielles, cours de maths en L3](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L3 sur équations différentielles](#)
- À maîtriser avant : [Complétude, espaces de Banach et point fixe, Réduction de Jordan et décomposition de Dunford](#)
- Chapitre précédent : [Inversion locale, fonctions implicites et extrema liés](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions holomorphes et formule de Cauchy](#)
- Le même thème en L1 : [équations différentielles, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L3 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L3](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)