

Équations différentielles

Corrigé de l'exercice 1 : Équations homogènes du premier ordre

Pour une équation $y' + a(x)y = 0$ avec a continue sur un intervalle I , les solutions sont les fonctions Ce^{-A} , où A est une primitive de a sur I .

1. Ici $a(x) = 3$, donc $A(x) = 3x$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Ici $a(x) = -2x$, donc $A(x) = -x^2$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Sur $]0, +\infty[$, x ne s'annule pas. On normalise donc : $y' + \frac{1}{x}y = 0$. Une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln x$, d'où $e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

4. Sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $\tan$ est continue et $\cos x > 0$. Une primitive de $\tan$ est $A(x) = -\ln(\cos x)$. Par conséquent, $e^{-A(x)} = e^{\ln(\cos x)} = \cos x$. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow C \cos x$, $C \in \mathbb{R}$. Vérification :
 $(C \cos x)' + \tan x \cdot C \cos x = -C \sin x + C \sin x = 0$.

Point de méthode : vérifiez toujours que le coefficient de y' ne s'annule pas sur l'intervalle, puis choisissez la primitive la plus simple.

Corrigé de l'exercice 2 : Seconds membres simples au premier

ordre

1. L'équation homogène $y' + 2y = 0$ a pour solutions Ce^{-2x} . Pour $y = \lambda e^x$, on obtient $y' + 2y = 3\lambda e^x$. Donc $\lambda = \frac{1}{3}$ convient. Par la structure affine, **les solutions sont** $x \rightarrow Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Les solutions homogènes sont Ce^x . Posons $y = ax^2 + bx + c$. Alors

$$y' - y = -ax^2 + (2a - b)x + (b - c).$$

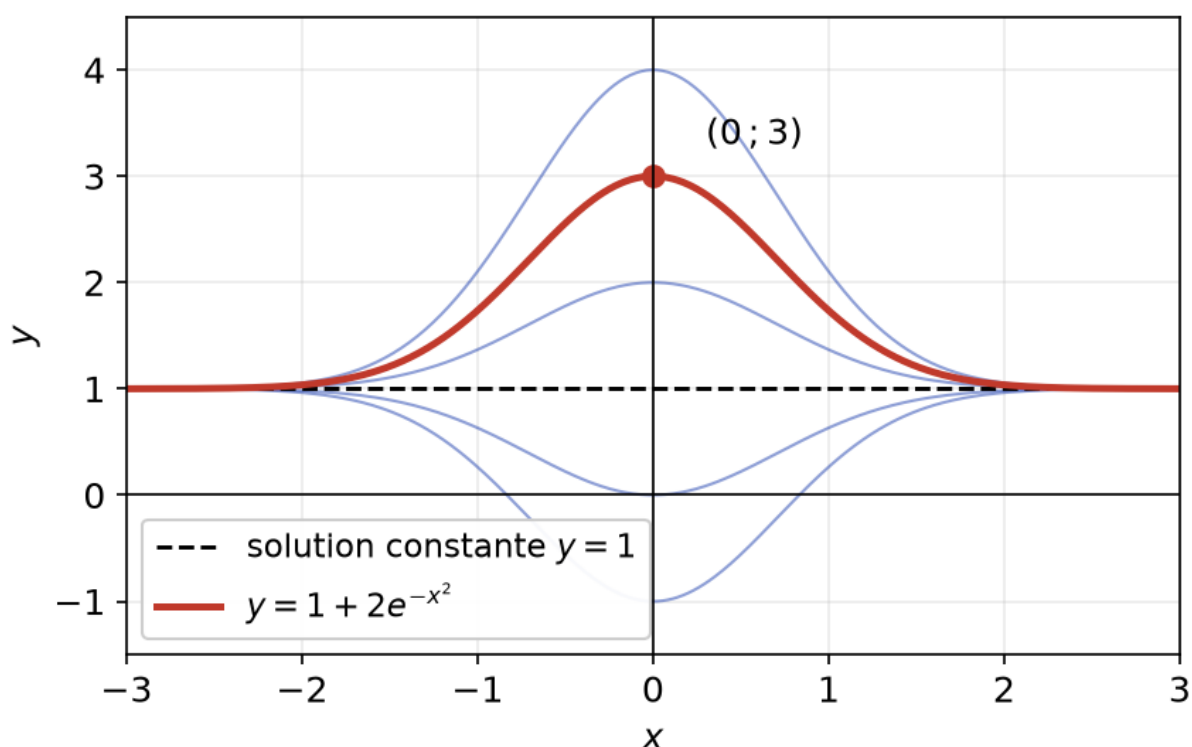
Par identification avec x^2 , on obtient $-a = 1$, $2a - b = 0$ et $b - c = 0$. Ainsi $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$. **Les solutions sont** $x \rightarrow Ce^x - x^2 - 2x - 2$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions homogènes sont Ce^{-x} . Ici, e^{-x} est elle-même solution homogène : chercher λe^{-x} ne peut pas marcher. Pour $y = \lambda x e^{-x}$, on a $y' = \lambda(1 - x)e^{-x}$, donc $y' + y = \lambda e^{-x}$. Ainsi $\lambda = 1$. **Les solutions sont** $x \rightarrow (x + C)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 3 : Un problème de Cauchy au premier ordre

1. Une constante $y = k$ vérifie (E) si et seulement si $2xk = 2x$ pour tout x , soit $k = 1$. **La fonction constante égale à 1 est solution.**
2. L'équation homogène $y' + 2xy = 0$ a pour solutions Ce^{-x^2} , car x^2 est une primitive de $2x$. D'après la structure affine, **les solutions de (E) sont** $x \rightarrow 1 + Ce^{-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.
3. La condition $f(0) = 3$ donne $1 + C = 3$, donc $C = 2$. Le théorème de Cauchy garantit l'unicité. **On obtient** $f(x) = 1 + 2e^{-x^2}$.
4. On a $f'(x) = -4xe^{-x^2}$, du signe de $-x$. Ainsi f est croissante sur $] -\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, avec un maximum $f(0) = 3$. De plus, $e^{-x^2} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$. **Donc** $f(x) \rightarrow 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

La figure ci-dessous représente f en rouge, parmi d'autres solutions. Toutes sont asymptotes à la droite $y = 1$, qui est la solution constante.



Corrigé de l'exercice 4 : Variation de la constante

- Sur $]0, +\infty[$, on normalise : $y' - \frac{1}{x}y = xe^x$. Une primitive de $-\frac{1}{x}$ est $-\ln x$, donc les solutions homogènes sont $Ce^{\ln x} = Cx$. On pose ensuite $y = C(x)x$, avec C dérivable. Alors $y' - \frac{y}{x} = C'(x)x$. L'équation devient $C'(x)x = xe^x$, soit $C'(x) = e^x$. Ainsi $C(x) = e^x + K$. **Les solutions sont** $x \rightarrow xe^x + Kx$, $K \in \mathbb{R}$. Vérification : pour $y = xe^x$, on a $xy' - y = x(1+x)e^x - xe^x = x^2e^x$.
- Les solutions homogènes sont Ce^{-x} . On pose $y = C(x)e^{-x}$. Alors $y' + y = C'(x)e^{-x}$. L'équation donne $C'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u = 1+e^x > 0$. Donc $C(x) = \ln(1+e^x) + K$. **Les solutions sont** $x \rightarrow e^{-x}(\ln(1+e^x) + K)$, $K \in \mathbb{R}$.

Point de méthode : après la substitution $y = C(x)e^{-A(x)}$, les termes en $C(x)$ doivent disparaître.

S'ils restent, c'est qu'une erreur s'est glissée dans le calcul.

Corrigé de l'exercice 5 : Structure affine et solution évidente

1. Soient y_1 et y_2 deux solutions, et $h = y_1 - y_2$. Par linéarité de la dérivation,

$$h' + ah = (y_1' + ay_1) - (y_2' + ay_2) = b - b = 0.$$

Donc h est solution de l'équation homogène.

2. La fonction constante $y = 1$ vérifie $0 + \cos x = \cos x$: c'est une solution évidente.
L'équation homogène $y' + (\cos x)y = 0$ a pour solutions $Ce^{-\sin x}$, car $\sin$ est une primitive de $\cos$. D'après la question 1, **les solutions de (E) sont $x \mapsto 1 + Ce^{-\sin x}$, $C \in \mathbb{R}$.**
3. La fonction $\sin$ est 2π -périodique, donc $e^{-\sin x}$ l'est aussi. **Par conséquent, toute solution $1 + Ce^{-\sin x}$ est 2π -périodique.**
4. En $x = 0$, on a $\sin 0 = 0$, donc $y(0) = 1 + C = 3$ donne $C = 2$. **La solution cherchée est $x \mapsto 1 + 2e^{-\sin x}$.**
5. Soient f_1 et f_2 deux solutions telles que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ pour un certain x_0 . Ce sont deux solutions du même problème de Cauchy en x_0 . Par le théorème de Cauchy, elles sont égales. **Donc deux solutions distinctes ne se croisent jamais.** En particulier, une solution qui vaut 1 en un point coïncide avec la solution constante : **c'est la fonction constante égale à 1.** Cela confirme le champ de directions de l'énoncé, où la droite $y = 1$ sépare les courbes.

Corrigé de l'exercice 6 : Principe de superposition au premier ordre

1. Pour $y = \lambda x e^x$, on a $y' = \lambda(1+x)e^x$, donc $y' - y = \lambda e^x$. **Ainsi $\lambda = 1$: $y_1(x) = x e^x$ convient.**

2. Pour $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$, on obtient

$$y' - y = (\beta - \alpha) \cos x - (\alpha + \beta) \sin x.$$

On veut $\beta - \alpha = 1$ et $\alpha + \beta = 0$, d'où $\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$. **Donc** $y_2(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ **convient.**

3. Par le principe de superposition, $y_1 + y_2$ est solution de (E) . Les solutions homogènes sont Ce^x . **La solution générale est** $x \rightarrow Ce^x + xe^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$, $C \in \mathbb{R}$.

4. En 0, on obtient $C + 0 + \frac{1}{2}(0 - 1) = 0$, donc $C = \frac{1}{2}$. **La solution est** $x \rightarrow \frac{1}{2}e^x + xe^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

Corrigé de l'exercice 7 : Variation de la constante avec une racine carrée

1. Comme $1 + x^2 > 0$ pour tout réel x , on peut diviser sur $\mathbb{R}$:

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Les coefficients sont continus sur $\mathbb{R}$. Une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$ est $A(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, donc $e^{-A(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **Les solutions homogènes sont** $x \rightarrow \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. Donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, et g est bien définie. Elle est dérivable par composition. De plus,

$$g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Donc $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. On pose $y = \frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}$. La méthode donne $\frac{C'(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$, soit $C'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D'après la question 2, $C(x) = g(x) + K$. **Les solutions sont** $x \rightarrow \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + K}{\sqrt{1+x^2}}$, $K \in \mathbb{R}$.

4. On a $g(0) = \ln 1 = 0$, donc $y(0) = K = 1$. **La solution cherchée est**

$x \rightarrow \frac{1 + \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$. Pour la limite, soit $x \geq 1$. Alors $\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2} x \leq 2x$, donc $0 \leq g(x) \leq \ln(3x)$. De plus, $\sqrt{1+x^2} \geq x$. Ainsi

$$|y(x)| \leq \frac{\ln(3x) + |K|}{x}.$$

Or $\frac{\ln(3x)}{x} \rightarrow 0$ par croissances comparées. **Donc toute solution tend vers 0 en $+\infty$.**

Corrigé de l'exercice 8 : Loi de refroidissement de Newton

1. Posons $\theta = T - 20$. Alors $\theta' = T' = -k\theta$, donc $\theta(t) = \theta(0)e^{-kt}$. Comme $\theta(0) = 70$, on obtient $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$.

2. La condition $T(10) = 55$ donne $70e^{-10k} = 35$, soit $e^{-10k} = \frac{1}{2}$. **Donc**
 $k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0,069$ **par minute.**

3. On remarque que $e^{-kt} = 2^{-t/10}$. Ainsi $T(30) = 20 + 70 \times 2^{-3} = 20 + 8,75$. **Donc**
 $T(30) = 28,75$ **°C.**

4. On résout $20 + 70e^{-kt} = 25$, soit $e^{-kt} = \frac{1}{14}$. Ainsi $t = \frac{\ln 14}{k} = \frac{10 \ln 14}{\ln 2}$. Numériquement, $\ln 14 \approx 2,639$ et $\ln 2 \approx 0,693$. **Le thé atteint 25 °C au bout de $\frac{10 \ln 14}{\ln 2} \approx 38$ minutes.**

Point de méthode : le changement d'inconnue $\theta = T - 20$ ramène l'équation à une équation homogène. On aurait aussi pu remarquer que la constante 20 est une solution particulière.

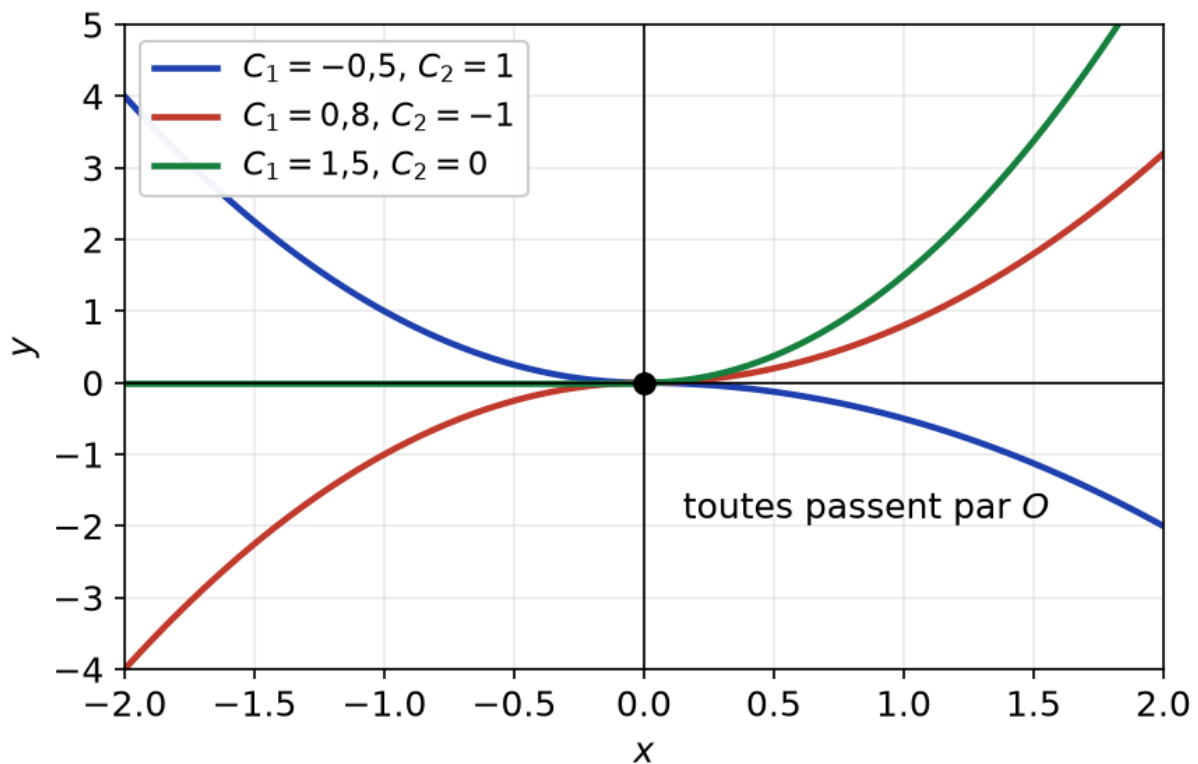
Corrigé de l'exercice 9 : Recollement de solutions en un point singulier

1. Sur $]0, +\infty[$, on normalise : $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Une primitive de $-\frac{2}{x}$ est $-2 \ln x$, donc les

solutions sont $Ce^{2\ln x} = Cx^2$. Sur $] -\infty, 0[$, une primitive de $-\frac{2}{x}$ est $-2\ln|x|$, et l'on trouve $Ce^{2\ln|x|} = Cx^2$. **Sur chacun des deux intervalles, les solutions sont les fonctions $x \rightarrow Cx^2$.**

2. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution sur cet intervalle, donc $f(x) = C_1x^2$ pour $x > 0$. De même, $f(x) = C_2x^2$ pour $x < 0$. Enfin, f est dérivable, donc continue en 0. Par conséquent, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} C_1x^2 = 0$. **Ainsi $f(0) = 0$.**
3. Réciproquement, soit f définie par C_1x^2 sur $]0, +\infty[$, C_2x^2 sur $] -\infty, 0[$ et $f(0) = 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation sur $\mathbb{R}^*$. En 0, le taux d'accroissement vaut $\frac{f(x)}{x} = C_1x$ ou C_2x : il tend vers 0. Donc f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, et $0 \cdot f'(0) - 2f(0) = 0$. L'application $f \rightarrow (C_1, C_2)$ est un isomorphisme. **L'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension 2.**
4. Toute solution vérifie $f(0) = 0$. Donc, pour la condition $y(0) = 0$, **tous les couples (C_1, C_2) conviennent : il y a une infinité de solutions.** En revanche, **aucune solution ne vérifie $y(0) = 1$.** Il n'y a pas de contradiction : le théorème de Cauchy s'applique à une équation normalisée $y' + a(x)y = b(x)$ avec a continue sur un intervalle. Or on ne peut pas diviser par x sur un intervalle contenant 0.

La figure ci-dessous montre trois solutions sur $\mathbb{R}$. Elles passent toutes par l'origine, où elles se raccordent avec une tangente horizontale. En particulier, plusieurs courbes intégrales se croisent en O .



Corrigé de l'exercice 10 : Solutions périodiques et unicité

1. La fonction g est dérivable, et $g'(x) = f'(x+T)$. Par périodicité de a et b ,

$$g'(x) + a(x)g(x) = f'(x+T) + a(x+T)f(x+T) = b(x+T) = b(x).$$

Donc g est solution de (E) .

2. Si f est T -périodique, alors évidemment $f(T) = f(0)$. Réciproquement, supposons $f(T) = f(0)$. Alors $g(0) = f(T) = f(0)$. Ainsi f et g sont deux solutions du même problème de Cauchy en 0. Par unicité, $g = f$, c'est-à-dire $f(x+T) = f(x)$ pour tout x .

Donc f est T -périodique si et seulement si $f(T) = f(0)$.

3. Les solutions homogènes sont Ce^{-x} . Cherchons $y = \alpha \cos x + \beta \sin x$: on obtient $y' + y = (\alpha + \beta) \cos x + (\beta - \alpha) \sin x$. Il faut $\alpha + \beta = 1$ et $\beta = \alpha$, soit $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Les solutions sont donc $f_C(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. Ensuite, $f_C(0) = C + \frac{1}{2}$ et $f_C(2\pi) = Ce^{-2\pi} + \frac{1}{2}$. D'après la question 2, f_C est 2π -périodique si et seulement si $C = Ce^{-2\pi}$, soit $C = 0$. **L'unique solution 2π -périodique est $x \mapsto \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.**

4. Pour toute solution, $y(x) - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) = Ce^{-x}$. Cette différence tend vers 0 en $+\infty$: toutes les solutions se rapprochent de la solution périodique.

Corrigé de l'exercice 11 : Équations homogènes du second ordre

1. L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ s'écrit $(r-1)(r-2) = 0$. Les solutions sont $x \rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
2. L'équation $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$ a une racine double -2 . Les solutions sont $x \rightarrow (C_1 x + C_2) e^{-2x}$.
3. Pour $r^2 + 2r + 5 = 0$, on a $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$. Les racines sont $-1 \pm 2i$. Les solutions réelles sont $x \rightarrow e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.
4. Les racines de $r^2 + 9 = 0$ sont $\pm 3i$. Les solutions sont $x \rightarrow C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.
5. Dans $\mathbb{C}$, les racines $-1+2i$ et $-1-2i$ sont distinctes. Les solutions complexes sont $x \rightarrow C_1 e^{(-1+2i)x} + C_2 e^{(-1-2i)x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Problème de Cauchy au second ordre

1. L'équation caractéristique $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2)$ donne $y = Ae^{3x} + Be^{-2x}$. Les conditions s'écrivent $A+B=1$ et $3A-2B=8$. En remplaçant $B=1-A$, on obtient $5A-2=8$, donc $A=2$ et $B=-1$. La solution est $x \rightarrow 2e^{3x} - e^{-2x}$.
2. On écrit $y = A \cos 3x + B \sin 3x$, d'où $y' = -3A \sin 3x + 3B \cos 3x$. En $\frac{\pi}{6}$, on a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. Donc $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = B = 2$ et $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3A = 3$. La solution est $x \rightarrow -\cos 3x + 2 \sin 3x$.
3. On écrit $y = (C_1 x + C_2) e^{-2x}$. Alors $y' = (C_1 - 2C_1 x - 2C_2) e^{-2x}$. Les conditions donnent $C_2 = 1$ et $C_1 - 2C_2 = 0$, donc $C_1 = 2$. La solution est $x \rightarrow (2x+1)e^{-2x}$. Pour $x \geq 0$, on a $2x+1 \geq 1 > 0$ et $e^{-2x} > 0$. Elle est donc strictement positive sur

$[0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 13 : Second membre polynomial

1. L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$ donne les solutions homogènes $C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Comme 0 n'est pas racine, on cherche $y = ax^2 + bx + c$. On calcule

$$y'' + y' - 2y = -2ax^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - 2c).$$

Par identification avec $2x^2 - 3$: $-2a = 2$, $2a - 2b = 0$ et $2a + b - 2c = -3$. Ainsi $a = -1$, $b = -1$, puis $-3 - 2c = -3$, donc $c = 0$. **Les solutions sont**
 $x \rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - x^2 - x$.

2. Ici $r^2 - r = r(r-1)$, et 0 est racine simple. Si y est de degré au plus 1, alors $y'' - y' = -y'$ est constant : il ne peut pas valoir $2x$. On cherche donc $y = x(ax + b) = ax^2 + bx$. On obtient $y'' - y' = 2a - 2ax - b$. Par identification, $-2a = 2$ et $2a - b = 0$, d'où $a = -1$ et $b = -2$. **Les solutions sont**
 $x \rightarrow C_1 + C_2 e^x - x^2 - 2x$.

Point de méthode : le degré de la solution particulière augmente d'une unité chaque fois que 0 est racine du polynôme caractéristique.

Corrigé de l'exercice 14 : Second membre exponentiel : les trois cas

Notons $P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$ pour les deux premières équations. Les solutions homogènes sont $C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

1. Le nombre 3 n'est pas racine de P . Pour $y = \lambda e^{3x}$, on obtient $y'' - 3y' + 2y = \lambda P(3)e^{3x} = 2\lambda e^{3x}$. Donc $\lambda = \frac{1}{2}$. **Les solutions sont**

$$x \rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

2. Le nombre 1 est racine simple. On cherche $y = \lambda x e^x$. Alors $y' = \lambda(x+1)e^x$ et $y'' = \lambda(x+2)e^x$. Par conséquent,

$$y'' - 3y' + 2y = \lambda e^x [(x+2) - 3(x+1) + 2x] = -\lambda e^x.$$

Donc $\lambda = -1$. **Les solutions sont** $x \rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x$.

3. Ici $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$, et 2 est racine double. Posons $y = z e^{2x}$. Alors $y' = (z' + 2z)e^{2x}$ et $y'' = (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}$. On en déduit $y'' - 4y' + 4y = z'' e^{2x}$. L'équation équivaut donc à $z'' = 1$, soit $z = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$. **Les solutions sont**
 $x \rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) e^{2x}.$

Corrigé de l'exercice 15 : Second membre polynôme-exponentielle

1. Posons $y = z e^x$. On a $y' = (z' + z)e^x$ et $y'' = (z'' + 2z' + z)e^x$. Donc $y'' - 2y' + y = z'' e^x$. L'équation équivaut à $z'' = x + 1$. En intégrant deux fois,
 $z = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$. **Les solutions sont** $x \rightarrow \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right) e^x$.
2. L'équation caractéristique $r^2 + r = r(r+1) = 0$ donne les solutions homogènes $C_1 + C_2 e^{-x}$. Posons $y = z e^{-x}$. Alors $y' = (z' - z)e^{-x}$ et $y'' = (z'' - 2z' + z)e^{-x}$. Ainsi $y'' + y' = (z'' - z')e^{-x}$. On cherche donc z telle que $z'' - z' = x$. La fonction $w = z'$ vérifie $w' - w = x$. La solution polynomiale est $w = -x - 1$: en effet, $-1 - (-x - 1) = x$. Donc $z = -\frac{x^2}{2} - x$ convient. **Les solutions sont** $x \rightarrow C_1 + C_2 e^{-x} - \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^{-x}$.

Corrigé de l'exercice 16 : Seconds membres trigonométriques et résonance

1. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$ a pour racines $-1 \pm i$. Les solutions homogènes

réelles sont $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. On résout ensuite $z'' + 2z' + 2z = e^{ix}$. Comme $P(i) = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \neq 0$, la fonction $z = \frac{e^{ix}}{1+2i}$ convient. Or $\frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}$. Donc

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{5} \operatorname{Re}((1-2i)(\cos x + i \sin x)) = \frac{\cos x + 2 \sin x}{5}.$$

Comme les coefficients sont réels, $\operatorname{Re}(z)$ est solution de l'équation réelle. **Les solutions sont** $x \rightarrow e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{5}(\cos x + 2 \sin x)$.

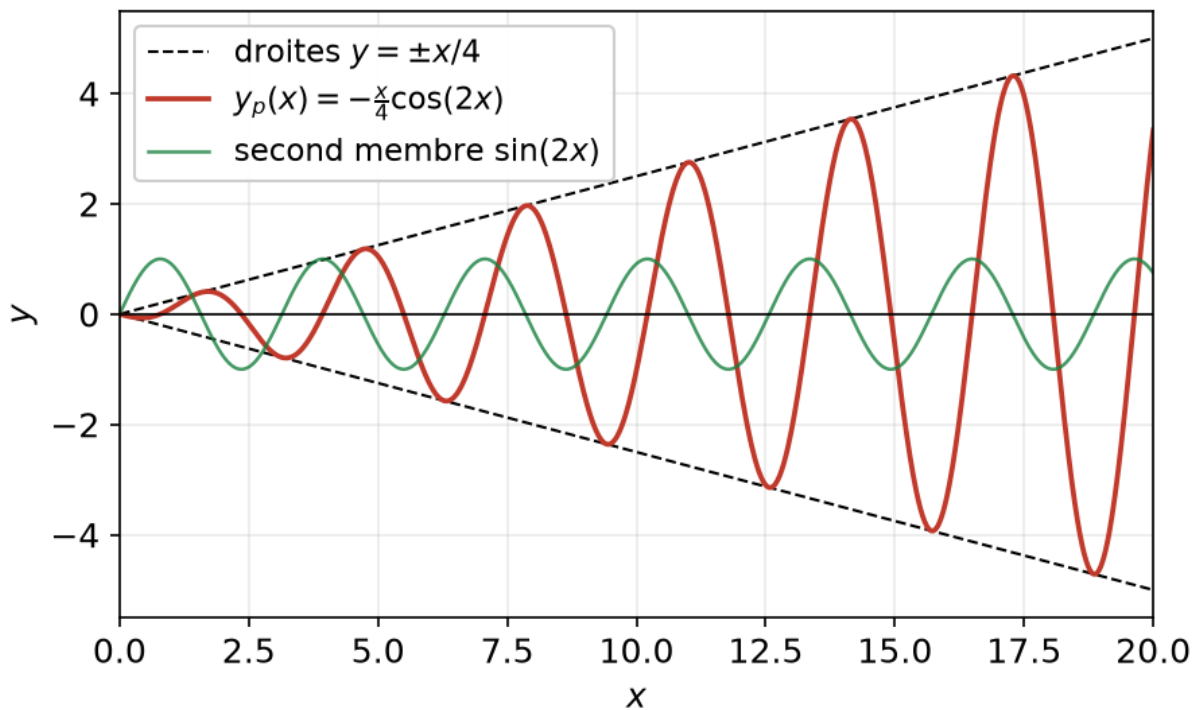
2. Les solutions homogènes sont $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. On résout $z'' + 4z = e^{2ix}$. Or $2i$ est racine simple de $P(r) = r^2 + 4$, avec $P'(2i) = 4i$. On cherche donc $z = \lambda x e^{2ix}$, et le cours donne $\lambda = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$. Ensuite,

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{i}{4}x(\cos 2x + i \sin 2x)\right) = -\frac{x}{4} \cos 2x.$$

Vérification : pour $y_p = -\frac{x}{4} \cos 2x$, on a $y_p'' = \sin 2x + x \cos 2x$, donc $y_p'' + 4y_p = \sin 2x$. **Les solutions sont** $x \rightarrow C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$.

3. Dans la question 1, pour $x \geq 0$, on a $|e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)| \leq |C_1| + |C_2|$ et $\frac{1}{5}|\cos x + 2 \sin x| \leq \frac{3}{5}$. **Toutes les solutions sont donc bornées sur $[0, +\infty[$.** Dans la question 2, prenons $x_k = k\pi$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $y(x_k) = C_1 - \frac{k\pi}{4}$, qui tend vers $-\infty$. **Aucune solution n'est bornée : c'est le phénomène de résonance.**

Comme le montre la figure ci-dessous, la solution particulière y_p oscille entre les droites $y = \pm \frac{x}{4}$. Son amplitude grandit donc sans limite, alors que le second membre reste borné.



Corrigé de l'exercice 17 : Superposition et conditions initiales

1. L'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour racines ± 1 . **Les solutions homogènes sont** $x \rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.
2. Le nombre 1 est racine simple. On cherche donc $y = \lambda x e^x$. On a $y'' = \lambda(x+2)e^x$, d'où $y'' - y = 2\lambda e^x$. Ainsi $\lambda = 1$ et $y_1(x) = x e^x$. Ensuite, une constante k vérifie $-k = -2$, donc $y_2 = 2$. **On obtient** $y_1(x) = x e^x$ **et** $y_2(x) = 2$.
3. Par superposition, $y_1 + y_2$ est solution de (E) . **La solution générale est** $x \rightarrow C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x + 2$.
4. On a $y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + (x+1)e^x$. Les conditions donnent $C_1 + C_2 + 2 = 0$ et $C_1 - C_2 + 1 = 0$. En additionnant, $2C_1 = -3$, donc $C_1 = -\frac{3}{2}$. Puis $C_2 = -\frac{1}{2}$. **La solution est** $x \rightarrow -\frac{3}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + x e^x + 2$. Vérification : $y(0) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 0$.

Point de méthode : les constantes se déterminent toujours sur la solution générale complète, jamais sur la seule partie homogène.

Corrigé de l'exercice 18 : Démonstration de la structure au second ordre

1. La fonction z est dérivable et $z' = y'' - r_2 y'$. Donc

$$z' - r_1 z = y'' - r_2 y' - r_1 y' + r_1 r_2 y = y'' - (r_1 + r_2) y' + r_1 r_2 y.$$

Ainsi y est solution de (H) si et seulement si $z' = r_1 z$.

2. D'après le premier ordre, $z' = r_1 z$ équivaut à $z = C e^{r_1 x}$. Il reste à résoudre $y' - r_2 y = C e^{r_1 x}$. Posons $y = u e^{r_2 x}$: on obtient $u' = C e^{(r_1 - r_2)x}$. Si $r_1 \neq r_2$, alors $u = \frac{C}{r_1 - r_2} e^{(r_1 - r_2)x} + C_2$. En notant $C_1 = \frac{C}{r_1 - r_2}$, on obtient $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$. Si $r_1 = r_2$, alors $u' = C$, donc $u = Cx + C_2$. On obtient $y = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$. Réciproquement, ces fonctions sont solutions, car toutes les étapes sont des équivalences.

3. Si $r_1 \neq r_2$, l'ensemble des solutions est $\text{Vect}(e^{r_1 x}, e^{r_2 x})$. Ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles, car leur quotient $e^{(r_1 - r_2)x}$ n'est pas constant. Elles forment donc une famille libre. Si $r_1 = r_2$, l'ensemble est $\text{Vect}(x e^{r_1 x}, e^{r_1 x})$, et le quotient x n'est pas constant.

Dans les deux cas, l'espace des solutions est de dimension 2.

4. On cherche (C_1, C_2) tel que $C_1 e^{r_1 x_0} + C_2 e^{r_2 x_0} = \alpha$ et $r_1 C_1 e^{r_1 x_0} + r_2 C_2 e^{r_2 x_0} = \beta$. Le déterminant de ce système vaut

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x_0} & e^{r_2 x_0} \\ r_1 e^{r_1 x_0} & r_2 e^{r_2 x_0} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x_0}.$$

Il est non nul, car $r_1 \neq r_2$ et une exponentielle ne s'annule pas. **Le système a une unique solution : le problème de Cauchy admet une unique solution.**

Corrigé de l'exercice 19 : Équation d'Euler par changement de variable

1. Par dérivation d'une composée, $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$.

2. Posons $x = e^t$. D'après la question 1, $xy'(x) = z'(t)$ et $x^2y''(x) = z''(t) - z'(t)$. Ainsi

$$x^2y'' - 2xy' + 2y - x^3 = z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) - e^{3t}.$$

Comme $t \rightarrow e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, l'égalité à 0 pour tout $x > 0$ équivaut à l'égalité à 0 pour tout $t \in \mathbb{R}$. **Donc y est solution de (E) si et seulement si**

$$z'' - 3z' + 2z = e^{3t}.$$

3. C'est l'équation de l'exercice 14, question 1. Ses solutions sont $z(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$.

On revient à $y(x) = z(\ln x)$. **Les solutions de (E) sont $x \rightarrow C_1x + C_2x^2 + \frac{x^3}{2}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.**

4. Pour $y = \frac{x^3}{2}$, on a $y' = \frac{3x^2}{2}$ et $y'' = 3x$. Alors

$$x^2 \cdot 3x - 2x \cdot \frac{3x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^3}{2} = 3x^3 - 3x^3 + x^3 = x^3. \text{ La fonction } x \rightarrow \frac{x^3}{2} \text{ est bien solution.}$$

Corrigé de l'exercice 20 : Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

1. L'équation caractéristique $r^2 = 5r - 6$ s'écrit $(r-2)(r-3) = 0$. Donc $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$.

Les conditions donnent $\lambda + \mu = 1$ et $2\lambda + 3\mu = 4$. Ainsi $\mu = 2$ et $\lambda = -1$. **On obtient**

$$u_n = 2 \cdot 3^n - 2^n. \text{ Vérification : } u_2 = 5 \cdot 4 - 6 = 14 = 18 - 4.$$

2. L'équation $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$ a une racine double 2. Donc $v_n = (\lambda + \mu n)2^n$. On a $v_0 = \lambda = 1$ et $v_1 = 2(\lambda + \mu) = 4$, d'où $\mu = 1$. **On obtient $v_n = (n+1)2^n$.**

3. L'équation $r^2 - r + 1 = 0$ a pour racines $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$, de module 1. Donc

$$w_n = \lambda \cos \frac{n\pi}{3} + \mu \sin \frac{n\pi}{3}. \text{ On a } w_0 = \lambda = 0, \text{ puis } w_1 = \mu \frac{\sqrt{3}}{2} = 1. \text{ On obtient}$$

$w_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$. Cette suite est 6-périodique, car $\sin$ est 2π -périodique. Ses premiers termes sont 0, 1, 1, 0, -1, -1. **La période est exactement 6.**

4. L'équation $y'' - 5y' + 6y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$, la même que la suite (u_n) . Ses solutions sont $C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **Les fonctions e^{rx} jouent le rôle des suites r^n .**

Corrigé de l'exercice 21 : Méthode d'Euler et suite géométrique

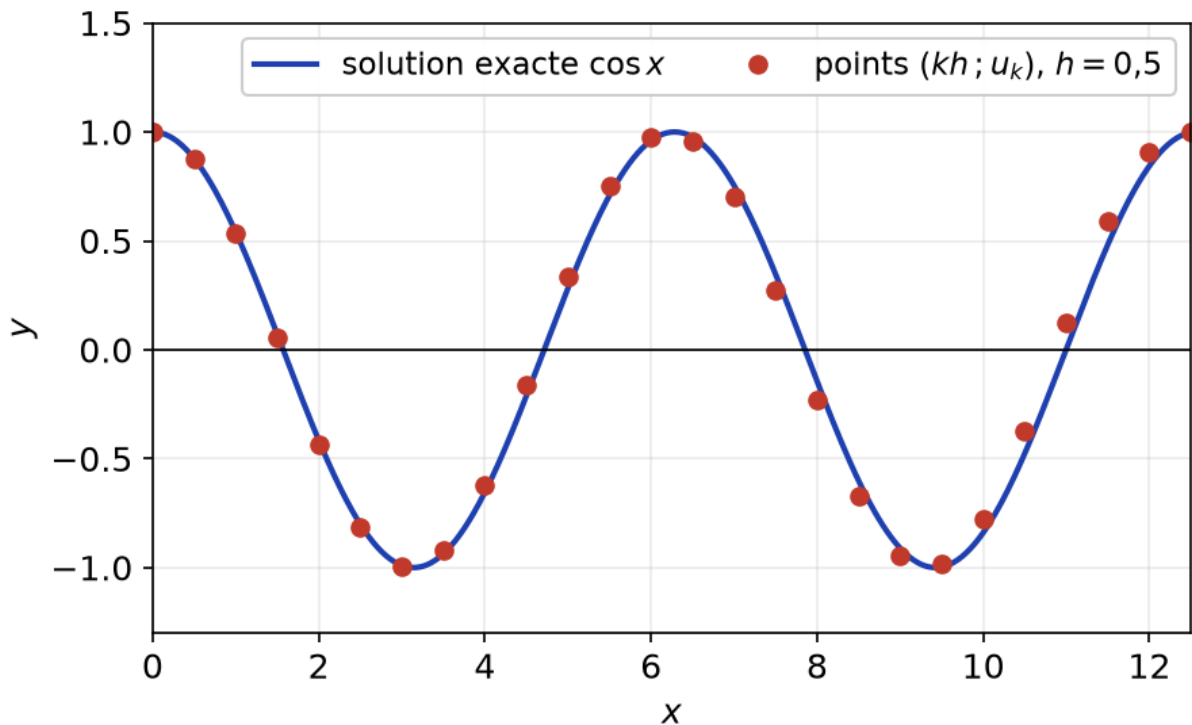
1. Les solutions de $y' = -y$ sont Ce^{-x} , et $y(0) = 1$ impose $C = 1$. **La solution exacte est** $x \rightarrow e^{-x}$.
2. On a $u_{k+1} = (1-h)u_k$. **La suite est géométrique de raison** $1-\frac{1}{n}$, **et** $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
3. Comme $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n} \in]0, 1[$. Donc $u_n = \exp(n \ln(1-\frac{1}{n})) \leq \exp(n \cdot (-\frac{1}{n}))$, par croissance de l'exponentielle. **Ainsi** $u_n \leq e^{-1}$. La méthode sous-estime donc la valeur exacte, comme sur la figure de l'énoncé.
4. On sait que $\ln(1-t) \sim -t$ quand $t \rightarrow 0$. Donc $n \ln(1-\frac{1}{n}) \rightarrow -1$. Par continuité de l'exponentielle, $u_n \rightarrow e^{-1}$. Par exemple, pour $n = 10$, $u_{10} = 0,9^{10} \approx 0,349$, alors que $e^{-1} \approx 0,368$.

Corrigé de l'exercice 22 : Discrétisation de l'oscillateur harmonique

1. La relation s'écrit $u_{k+1} = (2-h^2)u_k - u_{k-1}$. Son équation caractéristique est $r^2 - (2-h^2)r + 1 = 0$. Son discriminant vaut $(2-h^2)^2 - 4 = h^2(h^2-4)$, strictement négatif car $0 < h < 2$. Les deux racines sont donc complexes conjuguées. Leur produit vaut 1, donc leur module commun vaut 1. On les écrit $e^{\pm i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Leur somme $2\cos\theta$ vaut $2-h^2$. **Ainsi** $\cos\theta = 1-\frac{h^2}{2}$.
2. D'après le cours, $u_k = \lambda \cos(k\theta) + \mu \sin(k\theta)$. On a $u_0 = \lambda = 1$, puis $u_1 = \cos\theta + \mu \sin\theta = 1-\frac{h^2}{2} = \cos\theta$. Comme $\sin\theta \neq 0$, on obtient $\mu = 0$. **Donc** $u_k = \cos(k\theta)$ **pour tout** k .
3. On a $\theta = \arccos(1-\frac{h^2}{2})$. Par continuité de $\arccos$ en 1, $\theta \rightarrow \arccos 1 = 0$. Ensuite, $1-\cos\theta = \frac{h^2}{2}$, et $1-\cos\theta \sim \frac{\theta^2}{2}$ quand $\theta \rightarrow 0$. Donc $\frac{\theta^2}{h^2} \rightarrow 1$. Comme θ et h sont positifs, $\frac{\theta}{h} \rightarrow 1$.

4. Pour $n > \frac{x}{2}$, on a $h = \frac{x}{n} \in]0, 2[$. De plus, $n\theta_n = x \cdot \frac{\theta_n}{h}$, qui tend vers x d'après la question 3. Par continuité du cosinus, $u_n = \cos(n\theta_n) \rightarrow \cos x$.

La figure ci-dessous compare les points $(kh; u_k)$ pour $h = 0,5$ à la courbe du cosinus. Même avec ce pas assez grand, le schéma suit bien la solution exacte, avec un léger décalage de phase.



Corrigé de l'exercice 23 : Équations fonctionnelles

1. Soit f continue vérifiant la relation. La fonction $t \rightarrow tf(t)$ est continue. Par le théorème fondamental de l'analyse, $x \rightarrow \int_0^x tf(t) dt$ est de classe C^1 , de dérivée $xf(x)$. Donc f est dérivable et $f'(x) = 2xf(x)$. De plus, $f(0) = 1$. Par le théorème de Cauchy, $f(x) = e^{x^2}$. Réciproquement,

$$1 + 2 \int_0^x t e^{t^2} dt = 1 + [e^{t^2}]_0^x = e^{x^2}.$$

L'unique solution est $x \rightarrow e^{x^2}$.

2. Soit f dérivable avec $f'(x) = f(-x)$. La fonction $x \rightarrow f(-x)$ est dérivable, donc f' l'est aussi : f est deux fois dérivable. De plus, $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$. Ainsi $f'' + f = 0$, d'où $f = A \cos x + B \sin x$. Réinjectons : $f'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $f(-x) = A \cos x - B \sin x$. L'égalité pour tout x impose $B = A$, par exemple en $x = 0$ puis en $x = \frac{\pi}{2}$. Réciproquement, $A(\cos x + \sin x)$ convient. **Les solutions sont les fonctions** $x \rightarrow A(\cos x + \sin x)$, $A \in \mathbb{R}$.

Point de méthode : on dérive pour obtenir une équation différentielle, puis on vérifie la réciproque, car dériver fait perdre de l'information.

Corrigé de l'exercice 24 : Problème : oscillateur amorti et régime forcé

L'équation caractéristique de (H_α) est $r^2 + 2\alpha r + 1 = 0$, de discriminant réduit $\alpha^2 - 1$.

Partie A.

1. Pour $0 < \alpha < 1$, les racines sont $-\alpha \pm i\beta$. Donc $y = e^{-\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$. On a $y(0) = C_1 = 1$. Ensuite, $y'(0) = -\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$, d'où $C_2 = \frac{\alpha}{\beta}$. **On obtient** $y_\alpha(t) = e^{-\alpha t}(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t)$.

2. Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ avec $\alpha, \beta > 0$, il existe $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos \varphi = \alpha$ et $\sin \varphi = \beta$. Alors

$$\sin(\beta t + \varphi) = \alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t = \beta \left(\cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right).$$

Donc $y_\alpha(t) = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$. Ainsi $y_\alpha(t) = 0$ si et seulement si $\beta t + \varphi = k\pi$, soit $t_k = \frac{k\pi - \varphi}{\beta}$. Pour tout $k \geq 1$, $t_k > 0$. **Il y a une infinité de zéros, espacés de $\frac{\pi}{\beta}$.**

Partie B.

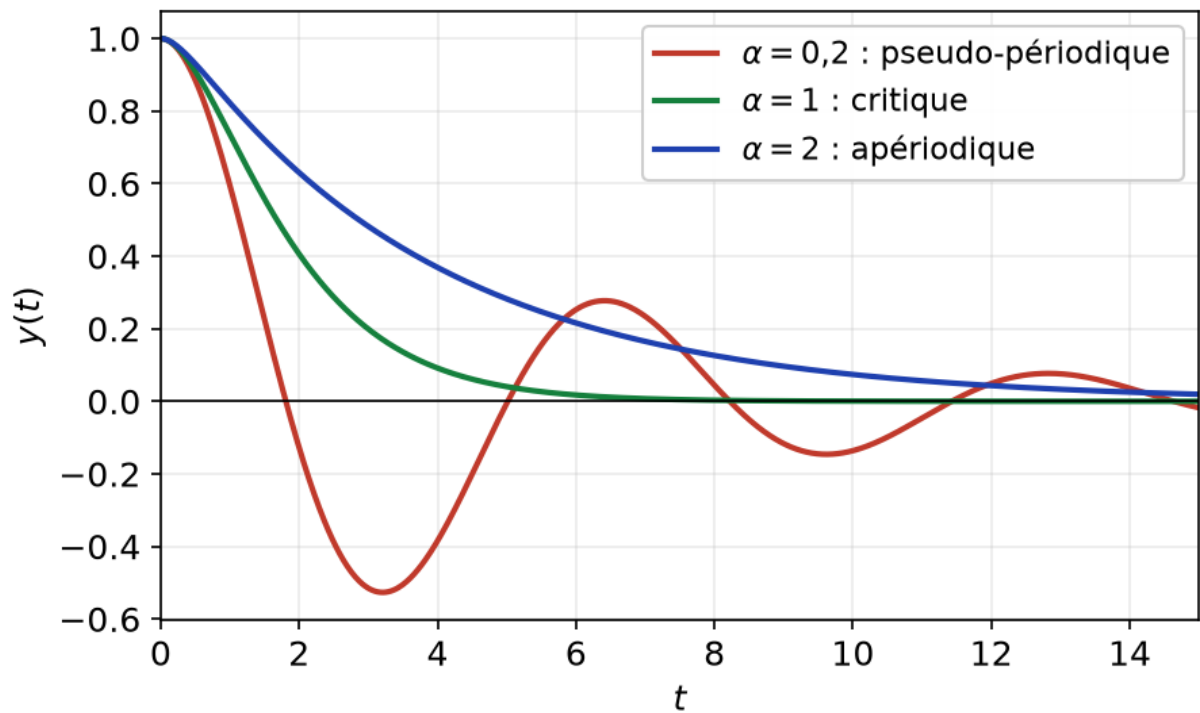
- Pour $\alpha = 1$, la racine double est -1 , et $y = (C_1 t + C_2) e^{-t}$. Les conditions donnent $C_2 = 1$ et $C_1 - C_2 = 0$. **Donc** $y_1(t) = (1+t)e^{-t}$.
- Pour $\alpha > 1$, posons $s = \sqrt{\alpha^2 - 1} > 0$. Les racines sont $r_\pm = -\alpha \pm s$, toutes deux strictement négatives car $s < \alpha$. On écrit $y = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t}$, avec $A + B = 1$ et $A r_+ + B r_- = 0$. On trouve

$$A = \frac{\alpha + s}{2s} > 0, \quad B = \frac{s - \alpha}{2s} < 0.$$

Pour $t \geq 0$, on a $y_\alpha(t) = e^{r_- t} (A e^{2st} + B)$, car $r_+ - r_- = 2s$. Or $e^{2st} \geq 1$ et $A > 0$, donc $A e^{2st} + B \geq A + B = 1$. **Ainsi $y_\alpha(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$: il n'y a aucune oscillation.**

- Si $0 < \alpha < 1$, alors $|y_\alpha(t)| \leq \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \rightarrow 0$. Si $\alpha = 1$, $(1+t)e^{-t} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Si $\alpha > 1$, les deux exponentielles tendent vers 0 car $r_\pm < 0$. **Dans tous les cas, $y_\alpha(t) \rightarrow 0$.** En revanche, pour $\alpha = 0$, on trouve $y_0 = \cos$, **qui ne tend pas vers 0 : sans amortissement, l'oscillation est permanente.**

La figure ci-dessous montre les trois comportements. Le régime pseudo-périodique oscille, alors que les deux autres restent positifs.



Partie C.

1. Pour $y = \lambda \cos t + \mu \sin t$, on calcule

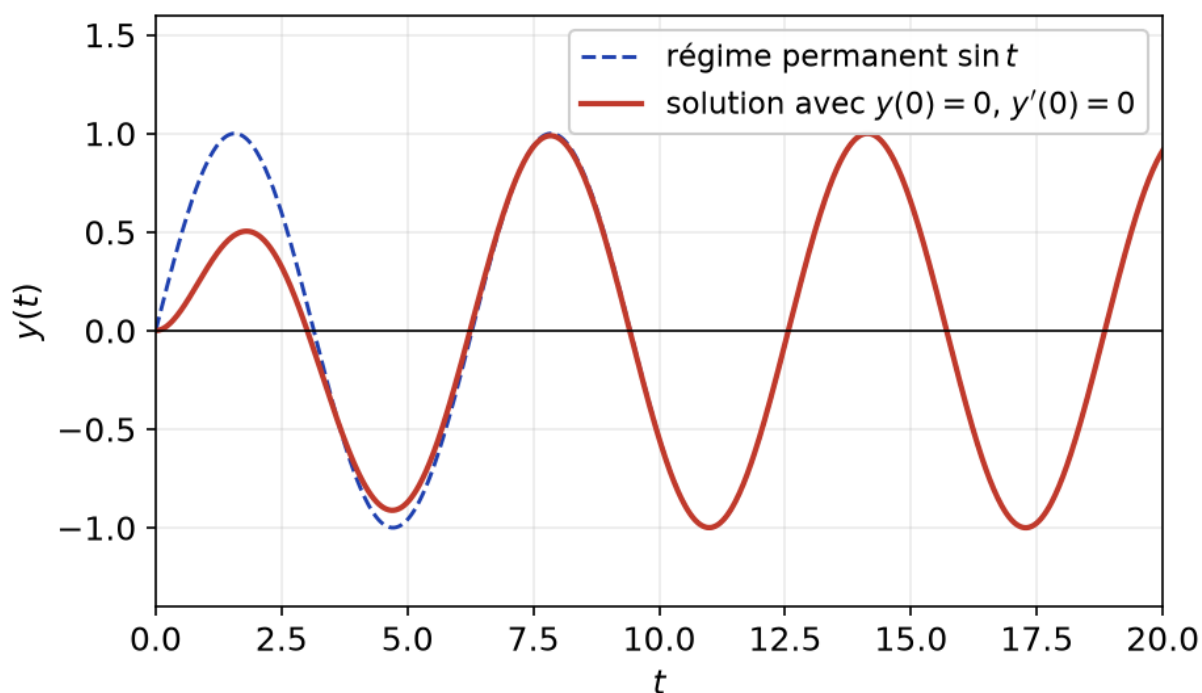
$$y'' + y' + y = \mu \cos t - \lambda \sin t.$$

En effet, $y'' + y = 0$ ici. Il faut donc $\mu = 1$ et $\lambda = 0$. **La fonction $y_p = \sin$ est solution.**

2. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Les solutions sont** $t \rightarrow e^{-t/2} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \sin t$.
La condition $y(0) = 0$ donne $C_1 = 0$. Ensuite, $y'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 + 1 = 0$, donc $C_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. **La solution est** $t \rightarrow \sin t - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$.

3. Pour toute solution, $|y(t) - \sin t| \leq (|C_1| + |C_2|) e^{-t/2}$. **Donc $y(t) - \sin t \rightarrow 0$: toutes les solutions rejoignent le régime permanent.**

La figure ci-dessous illustre ce résultat. La solution partie du repos rejoint la courbe $\sin t$ après environ deux oscillations.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [équations différentielles, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur équations différentielles](#)
- À maîtriser avant : [Intégrale de Riemann et calcul de primitives](#), [Nombres complexes et trigonométrie](#)
- Chapitre précédent : [Intégrale de Riemann et calcul de primitives](#)
- Chapitre suivant : [Formules de Taylor et développements limités](#)
- Le même thème en maths sup : [équations différentielles linéaires, exercices de maths sup](#)
- Le même thème en L3 : [équations différentielles, exercices de maths en L3](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)