

Éléments propres

Exercice 1 : Éléments propres d'une matrice d'ordre 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A à l'aide de la trace et du déterminant.
2. Déterminer le spectre de A et une base de chaque sous-espace propre.
3. Vérifier que les vecteurs propres obtenus forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre 3

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A et en déduire les éléments propres de A .
2. Calculer χ_B en développant selon une ligne bien choisie.
3. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de B .
4. Contrôler les résultats avec la trace et le déterminant de chaque matrice.

Exercice 3 : Spectre à partir de la trace et du déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) = 6$, $\det A = 6$ et $A - I_3$ non inversible.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. On note λ_2 et λ_3 les deux autres racines complexes de X_A . Déterminer $\lambda_2 + \lambda_3$ et $\lambda_2 \lambda_3$, puis le spectre de A .
3. En déduire X_A sous forme développée, ainsi que le coefficient de X .
4. Vérifier sur la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ que ce coefficient est la somme des trois mineurs principaux d'ordre 2.

Exercice 4 : Valeurs propres de l'inverse et d'un polynôme en A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(A)$.
2. On suppose A inversible. Montrer que $\text{Sp}(A^{-1}) = \{1/\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et que $E_{1/\lambda}(A^{-1}) = E_\lambda(A)$.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $AX = \lambda X$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$. En déduire l'inclusion $\{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\} \subset \text{Sp}(P(A))$.
4. Avec $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = X^2$, montrer que cette inclusion peut être stricte sur $\mathbb{R}$.
5. On suppose $A^2 = A$. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$.

Exercice 5 : Calculs par blocs

Soient $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Calculer M^2 , puis montrer par récurrence que $M^k = \begin{pmatrix} I_2 & kB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que M est inversible et donner M^{-1} .
3. Plus généralement, soient A, D inversibles de taille p et q , et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Montrer que $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -ACD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$.
4. Quel est le polynôme caractéristique de M ? Quelle est la dimension de $E_1(M)$ lorsque $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?

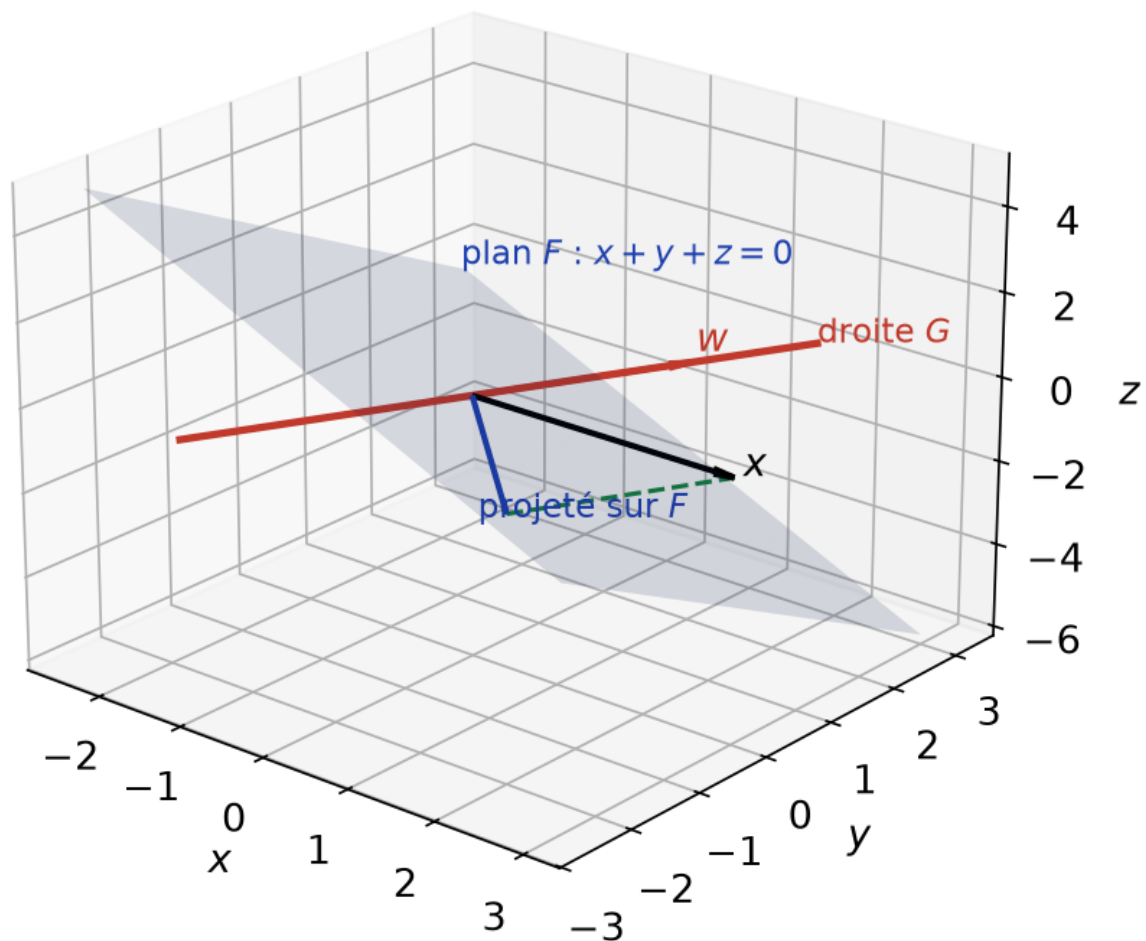
Exercice 6 : Déterminant triangulaire par blocs

On considère $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det M$ sans développement complet.
2. Calculer χ_M et en déduire le spectre réel de M .
3. Interpréter le résultat en termes de sous-espace stable par l'endomorphisme canoniquement associé à M .

Exercice 7 : Projection sur un plan parallèlement à une droite

Dans $\mathbb{R}^3$, on note F le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $G = \text{Vect}(w)$ avec $w = (1, 2, 0)$. La figure ci-dessous représente la situation pour le vecteur $x = (3, 0, 0)$.



1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G , puis sa matrice P dans la base canonique.
3. Calculer $p(3, 0, 0)$ et vérifier que $P^2 = P$.
4. Déterminer les éléments propres de p , puis ceux de la symétrie $s = 2p - \text{id}$.

Exercice 8 : Somme directe de trois droites et projecteurs associés

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $a = (1, 1, 0)$, $b = (0, 1, 1)$, $c = (1, 0, 1)$, puis $F_1 = \text{Vect}(a)$, $F_2 = \text{Vect}(b)$ et $F_3 = \text{Vect}(c)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
2. Décomposer $x = (x_1, x_2, x_3)$ sur cette somme directe et donner les projecteurs associés p_1, p_2, p_3 .
3. Vérifier que $p_1 + p_2 + p_3 = \text{id}$ et que $p_1 \circ p_2 = 0$.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les droites $D_1 = \text{Vect}(e_1)$, $D_2 = \text{Vect}(e_2)$ et $D_3 = \text{Vect}(e_1 + e_2)$. Montrer que leurs intersections deux à deux sont nulles, mais que leur somme n'est pas directe.

Exercice 9 : Plan stable et endomorphisme induit

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) . On note P le plan d'équation $x + y + z = 0$, $f_1 = (1, -1, 0)$ et $f_2 = (0, 1, -1)$.

1. Calculer $u(f_1)$, $u(f_2)$ et $u(e_3)$. En déduire que P et $\text{Vect}(e_3)$ sont stables par u .
2. Donner la matrice de l'endomorphisme induit u_P dans la base (f_1, f_2) , puis la matrice de u dans la base (f_1, f_2, e_3) .
3. En déduire χ_u et le spectre réel de u .
4. Montrer que P ne contient aucune droite stable par u .

Exercice 10 : Dérivation sur les polynômes

Soit $n \geq 1$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère $D: P \rightarrow P'$ et $\varphi: P \rightarrow XP'$.

1. Déterminer les éléments propres de D . Calculer χ_D .
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$. En déduire χ_φ , le spectre de φ et ses sous-espaces propres.
3. On considère $\psi: P \rightarrow (X-1)P'$. Montrer que les polynômes $(X-1)^k$, $0 \leq k \leq n$, sont des vecteurs propres de ψ , et en déduire le spectre de ψ .

Exercice 11 : Familles de fonctions propres libres

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D: f \rightarrow f'$.

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de D .
2. Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ des réels. Montrer que la famille $(x \rightarrow e^{a_k x})_{1 \leq k \leq p}$ est libre.
3. En considérant $D^2: f \rightarrow f''$, montrer que la famille $(x \rightarrow \cos(kx))_{0 \leq k \leq p}$ est libre.
4. La famille $(x \rightarrow \cos x, x \rightarrow \sin x)$ est formée de vecteurs propres de D^2 pour la même valeur propre. Est-elle libre ? Commenter.

Exercice 12 : Transposition dans les matrices carrées

Soit $n \geq 2$ et $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \rightarrow M^\top$.

1. Calculer $T \circ T$. En déduire que $\text{Sp}(T) \subset \{-1, 1\}$.
2. Déterminer les sous-espaces propres de T et leurs dimensions.
3. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_1(T) \oplus E_{-1}(T)$, puis en déduire χ_T .
4. En déduire la trace et le déterminant de T .

Exercice 13 : Matrices de rang 1

Soit $n \geq 2$, $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls et $A = UV^T$.

1. Montrer que A est de rang 1 et que $A^2 = \text{tr}(A) A$.
2. Déterminer $\ker A$ et sa dimension. En déduire que 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$.
3. Montrer que $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))$.
4. Si $\text{tr}(A) \neq 0$, donner un vecteur propre associé à $\text{tr}(A)$.
5. Application : déterminer les éléments propres de la matrice J_n dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 14 : Endomorphisme $M \mapsto M + \text{tr}(M) I_n$

Soit $n \geq 2$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M + \text{tr}(M) I_n$.

1. Montrer que φ est linéaire et calculer $\varphi(I_n)$.
2. Déterminer $\varphi(M)$ lorsque $\text{tr}(M) = 0$.

3. En déduire les éléments propres de φ et son polynôme caractéristique.
4. Calculer $\text{tr}(\varphi)$ et $\det \varphi$. Montrer que φ est inversible et déterminer φ^{-1} .

Exercice 15 : Multiplicité et dimension d'un sous-espace propre

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_{A_α} et donner la multiplicité de chaque valeur propre.
2. Déterminer $\dim E_1(A_\alpha)$ selon la valeur de α .
3. Déterminer $E_2(A_\alpha)$.
4. Les matrices A_0 et A_1 sont-elles semblables ?

Exercice 16 : Commutant d'une matrice

Le commutant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$, possédant n valeurs propres distinctes, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres. Montrer que si v commute avec u , alors chaque e_i est vecteur propre de v .
3. En déduire le commutant de $\Delta = \text{diag}(1, 2, 3)$ et sa dimension.
4. Déterminer le commutant de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par le calcul.

Exercice 17 : Matrice compagnon

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & & -b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\chi_C = X^3 + aX^2 + bX + c$.
2. Soit λ une racine de χ_C . Montrer que $(1, \lambda, \lambda^2)^T$ est vecteur propre de C^T .
3. Montrer que tout sous-espace propre de C est une droite.
4. Application : écrire une matrice dont le polynôme caractéristique est $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$ et donner les éléments propres de sa transposée.

Exercice 18 : Suites récurrentes et vecteurs propres

On définit deux suites par $u_0 = 1$, $v_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$.

1. Écrire la relation sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ et identifier la matrice A .
2. En utilisant les vecteurs propres de A , décomposer X_0 et en déduire X_n pour tout n .
3. Déterminer la limite de $X_n / 5^n$ et interpréter géométriquement.

Exercice 19 : Sous-espaces stables de quelques endomorphismes

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\text{diag}(1, 2, 3)$ dans la base canonique, et F un sous-espace stable par u . On pose $p_1 = \frac{1}{2}(u - 2 \text{id})(u - 3 \text{id})$. Calculer $p_1(e_1)$, $p_1(e_2)$, $p_1(e_3)$, puis écrire de même p_2 et p_3 .

2. En déduire que $F = (F \cap E_1) \oplus (F \cap E_2) \oplus (F \cap E_3)$, puis déterminer tous les sous-espaces stables par u . Combien y en a-t-il ?
3. Soit $D: P \rightarrow P'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les sous-espaces stables par D sont $\{0\}$ et les $\mathbb{R}_d[X]$, $0 \leq d \leq n$.

Exercice 20 : Polynômes caractéristiques de AB et BA

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On pose, pour $x \in \mathbb{K}$, $M = \begin{pmatrix} xI_n & A \\ B & xI_p \end{pmatrix}$.

1. Calculer par blocs les produits $\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & x, xI_p \end{pmatrix} M$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & x, xI_p \end{pmatrix} M$.
2. En déduire que $x^p \det(xI_n - AB) = x^n \det(xI_p - BA)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, puis que $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.
3. On suppose $n = p$. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. En déduire que AB et BA ont le même spectre, la même trace et le même déterminant.
4. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que AB et BA ne sont pas semblables.

Exercice 21 : Hyperplans stables et transposée

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n \geq 2$, et $H = \ker \ell$ un hyperplan, où ℓ est une forme linéaire non nulle.

1. Soit ψ une forme linéaire nulle sur H . Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda \ell$.
2. Montrer que H est stable par u si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\ell \circ u = \lambda \ell$.
3. Traduction matricielle : $E = \mathbb{R}^n$, u de matrice A et H d'équation

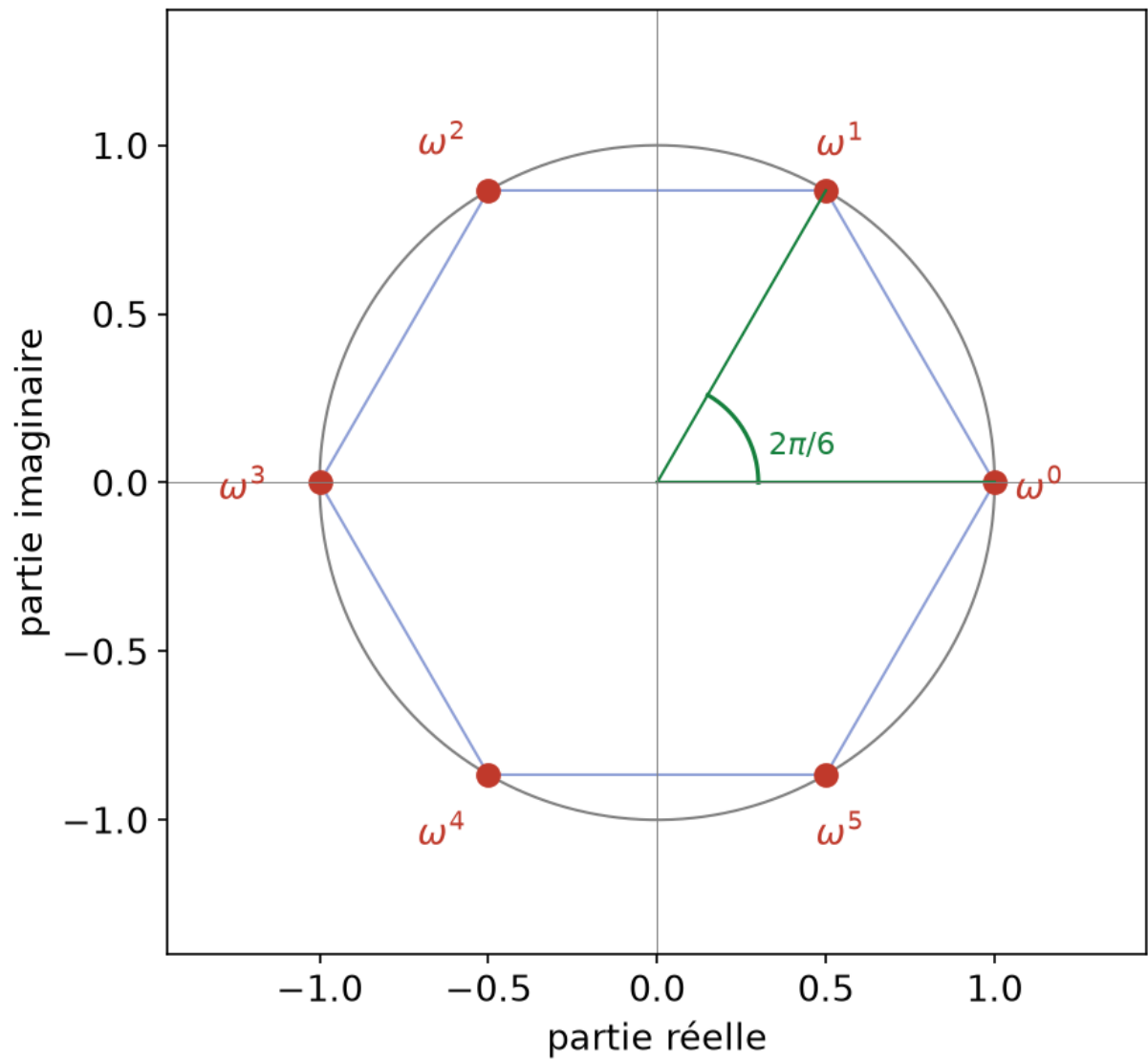
$l_1 x_1 + \dots + l_n x_n = 0$. Montrer que H est stable par u si et seulement si $L = (l_1, \dots, l_n)^T$ est vecteur propre de A^T .

4. Application : déterminer tous les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ puis toutes les droites stables.}$$

Exercice 22 : Problème, matrice de permutation circulaire

Soit $n \geq 2$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par $c_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $c_{n,1} = 1$, et tous les autres coefficients nuls. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. La figure ci-dessous place les racines sixièmes de l'unité, cas $n = 6$.



1. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$, calculer Cx . En déduire $C^n = I_n$.
2. Pour $0 \leq k \leq n-1$, on pose $v_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})^\top$. Montrer que $Cv_k = \omega^k v_k$.
3. En déduire que $(v_0, \dots, v_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$, que $\chi_C = X^n - 1$ et que chaque sous-espace propre de C est une droite.
4. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, $Q = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et $M = Q(C)$. Montrer que $Mv_k = Q(\omega^k)v_k$, puis que $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)$.
5. Application pour $n = 3$: écrire $M = aI_3 + bC + cC^2$, puis factoriser $\det M$ avec

$$j = e^{2i\pi/3} . \text{ En d\u00e9duire que } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) .$$

Le corrig\u00e9 des exercices

Chaque exercice est corrig\u00e9 en d\u00e9tail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sp\u00e9

- Le cours : [\u00e9l\u00e9ments propres, cours de maths sp\u00e9](#)
- Chapitre pr\u00e9c\u00e9dent : [Anneaux, id\u00e9aux, \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$ et alg\u00e8bres](#)
- Chapitre suivant : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sp\u00e9 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sp\u00e9](#) et les [chapitres de maths sup](#)