

Éléments propres

I. Somme directe d'une famille finie de sous-espaces

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Sauf mention contraire, E est de dimension finie $n \geq 1$. La réduction consiste à découper E en morceaux simples sur lesquels un endomorphisme agit de façon lisible. Il faut donc d'abord savoir découper un espace en plus de deux morceaux.

1. Définition et caractérisations

Définition :

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces de E . Leur somme est $F_1 + \dots + F_p = \{x_1 + \dots + x_p, x_i \in F_i\}$. On dit que cette somme est **directe** si tout vecteur de la somme s'écrit de manière unique $x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in F_i$. On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$, ou encore $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

L'unicité se teste sur le vecteur nul. En effet, deux décompositions d'un même vecteur donnent, par différence, une décomposition de 0 .

Proposition :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe ;
- si $x_1 + \dots + x_p = 0$ avec $x_i \in F_i$, alors tous les x_i sont nuls ;
- en dimension finie, $\dim(F_1 + \dots + F_p) = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$;
- la concaténation de bases des F_i est une famille libre.

Attention :

Pour $p \geq 3$, il ne suffit pas que les intersections deux à deux soient nulles. Par exemple, trois droites distinctes du plan $\mathbb{R}^2$ se coupent deux à deux en $\{0\}$. Cependant, leur somme n'est pas directe, car la somme des dimensions vaut $3 > 2$.

Enfin, on dit que E est somme directe des F_i lorsque $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Dans ce cas, une **base adaptée** s'obtient en recollant une base de chaque F_i .

2. Projecteurs associés à une décomposition

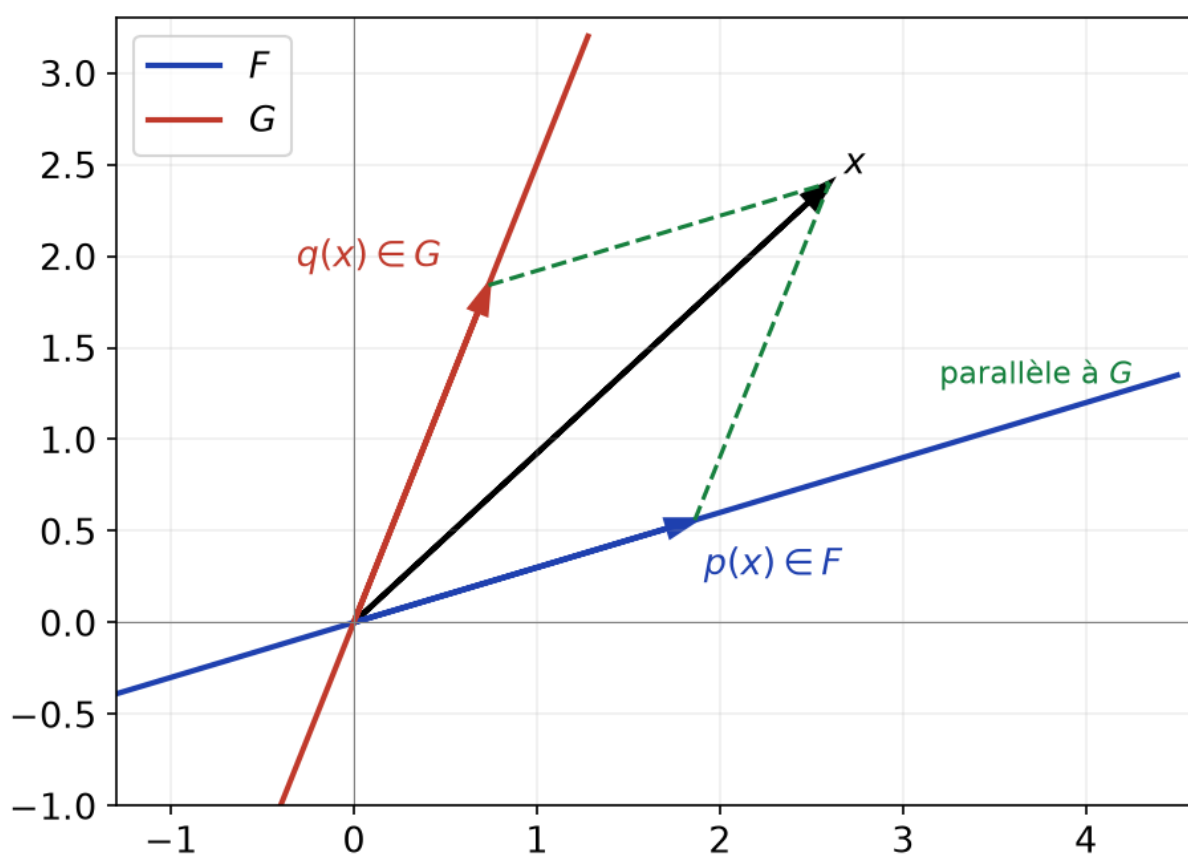
Définition :

Supposons $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$. Tout $x \in E$ s'écrit de façon unique $x = x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in F_i$. L'application $p_i : x \rightarrow x_i$ est le **projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$** .

Propriété :

Les p_i sont linéaires et vérifient $p_1 + \dots + p_p = \text{id}_E$, $p_i \circ p_i = p_i$ et $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$. De plus, $\text{Im } p_i = F_i$ et $\ker p_i = \bigoplus_{j \neq i} F_j$.

Pour deux sous-espaces supplémentaires F et G , on retrouve le projecteur p sur F parallèlement à G , et $q = \text{id}_E - p$. Comme le montre la figure ci-dessous, on obtient $p(x)$ en traçant par x la parallèle à G jusqu'à F .



Exemple :

Dans $\mathbb{R}^3$, les droites dirigées par e_1 , $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_2 + e_3$ sont en somme directe et engendrent $\mathbb{R}^3$. En effet, ces trois vecteurs forment une base. Ainsi, $(x, y, z) = (x - y)e_1 + (y - z)(e_1 + e_2) + z(e_1 + e_2 + e_3)$, donc $p_1(x, y, z) = (x - y, 0, 0)$.

II. Matrices définies par blocs

Une décomposition de E en somme directe se lit sur les matrices grâce au découpage en blocs. On écrit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sous la forme d'un tableau de matrices plus petites, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}).$$

1. Opérations par blocs

Proposition :

Si les découpages sont compatibles, le produit se calcule comme pour des matrices 2×2 , en respectant l'ordre des facteurs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

La somme, le produit par un scalaire et la transposition se font aussi bloc par bloc (la transposée échange de plus les blocs B et C).

Attention :

Les blocs ne commutent pas en général. Ainsi, on écrit BC' et non $C'B$. Par ailleurs, les tailles doivent correspondre : le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de A' .

Exemple :

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec des blocs carrés de même taille. Alors
 $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc N est nilpotente. Par conséquent,
 $(I + N)^k = I + kN$ pour tout entier k , d'après la formule du binôme (I et N commutent).

2. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Théorème :

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \times \det C.$$

Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, à blocs diagonaux carrés $A_1, \dots, A_r$, vaut $\det A_1 \times \dots \times \det A_r$.

Démonstration :

D'abord, un calcul par blocs donne la factorisation

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on développe $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ selon sa première colonne, p fois de suite : son déterminant vaut $\det C$. De même, on développe $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ selon sa dernière ligne, q fois de suite : on obtient $\det A$. Enfin, le déterminant est multiplicatif, ce qui conclut. Le cas général s'en déduit par récurrence sur le nombre de blocs.

Attention :

Pour une matrice pleine $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, la formule $\det A \det D - \det B \det C$ est fausse en général. Seule la forme triangulaire par blocs autorise un calcul direct.

III. Sous-espaces stables et endomorphisme induit

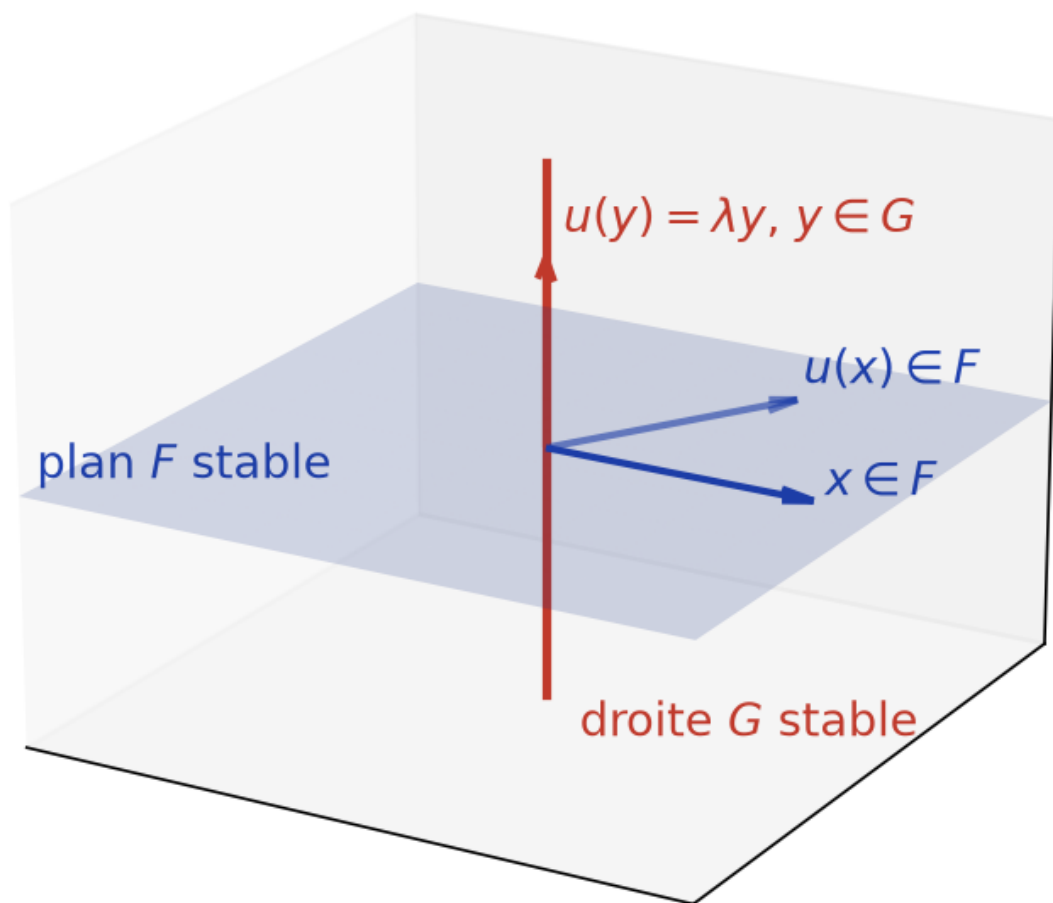
1. Définition

Définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace F est **stable par** u si $u(F) \subset F$. L'application $u_F: F \rightarrow F$, $x \mapsto u(x)$, est alors un endomorphisme de F , appelé **endomorphisme induit** par u sur F .

Il suffit de vérifier la stabilité sur une famille génératrice : si $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k)$, alors F est stable dès que chaque $u(f_j)$ appartient à F . Par exemple, $\{0\}$, E , $\ker u$ et $\text{Im } u$ sont toujours stables par u .

La figure suivante représente la situation typique dans $\mathbb{R}^3$: un plan F et une droite G , tous deux stables. L'endomorphisme agit alors séparément sur chaque morceau.



2. Traduction matricielle

Proposition :

Soit F un sous-espace de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dont les p premiers vecteurs forment une base $\mathcal{B}_F$ de F . Alors F est stable par u si et seulement si

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Dans ce cas, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$. De même, si $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ avec chaque F_i stable, la matrice dans une base adaptée est **diagonale par blocs**, et le i -ème bloc représente l'endomorphisme induit sur F_i .

Démonstration :

La j -ème colonne contient les coordonnées de $u(e_j)$. Pour $j \leq p$, le bloc sous A est nul si et seulement si $u(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$. Or F est stable si et seulement si $u(e_j) \in F$ pour tout $j \leq p$. Le cas d'une somme directe s'obtient en appliquant ce raisonnement à chaque F_i .

Méthode :

Pour exploiter un sous-espace stable F , on complète une base de F en une base de E . Ensuite, on écrit la matrice triangulaire par blocs obtenue. Enfin, on utilise le théorème du déterminant par blocs : le calcul de $\det u$, ou du polynôme caractéristique, se ramène à deux calculs de taille plus petite.

3. Endomorphismes qui commutent

Théorème :

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u . Plus généralement, $\ker P(v)$ et $\text{Im } P(v)$ sont stables par u pour tout polynôme P .

Démonstration :

Soit $x \in \ker v$. Alors $v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \ker v$. Ensuite, soit $y = v(z) \in \operatorname{Im} v$. On a $u(y) = u(v(z)) = v(u(z))$, qui appartient à $\operatorname{Im} v$. Enfin, u commute avec $P(v)$, ce qui donne le cas général.

Méthode :

Pour trouver des sous-espaces stables par u , on cherche un endomorphisme v qui commute avec u et dont on connaît les noyaux. Par exemple, $v = u - \lambda \operatorname{id}_E$ commute avec u . Ainsi, chaque sous-espace propre d'un endomorphisme v qui commute avec u est stable par u .

IV. Éléments propres d'un endomorphisme

1. Valeurs propres, vecteurs propres, spectre

Définition :

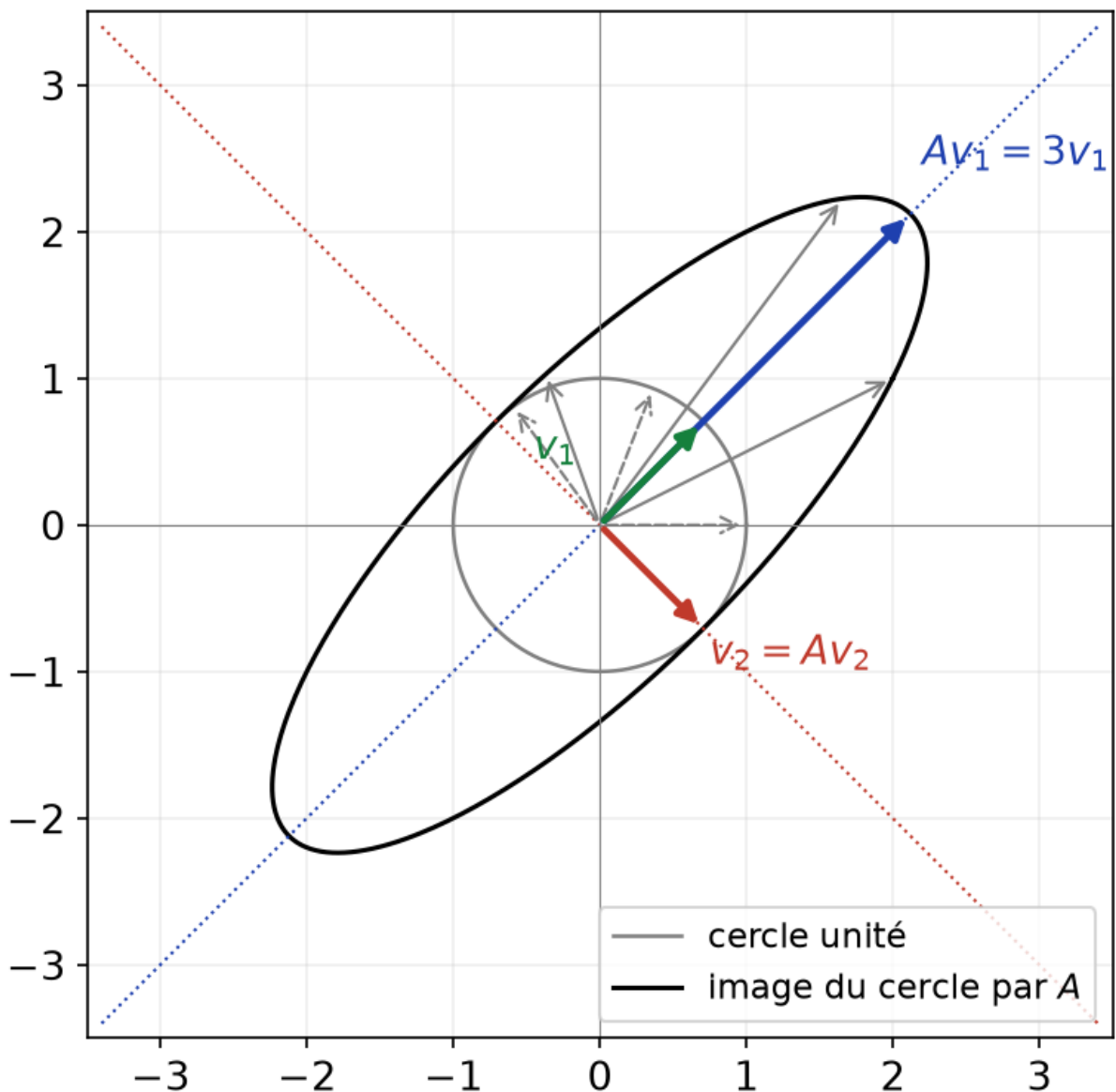
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension quelconque. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel x est un **vecteur propre** associé à λ . Le **sous-espace propre** associé est $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$. L'ensemble des valeurs propres est le **spectre** de u , noté $\operatorname{Sp}(u)$.

Remarque :

Un vecteur propre est non nul par définition. En revanche, $E_\lambda(u)$ contient 0 . Autrement dit, $E_\lambda(u)$ est formé des vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul. Par ailleurs, $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ si et seulement si $u - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas injectif. En dimension finie, cela équivaut à

$$\det(u - \lambda \text{id}_E) = 0.$$

Géométriquement, un vecteur propre est un vecteur dont la direction est conservée. Considérons par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme le montre la figure ci-dessous, l'image du cercle unité est une ellipse. Seules les directions de $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$ sont conservées : $Av_1 = 3v_1$ et $Av_2 = v_2$.



Exemple :

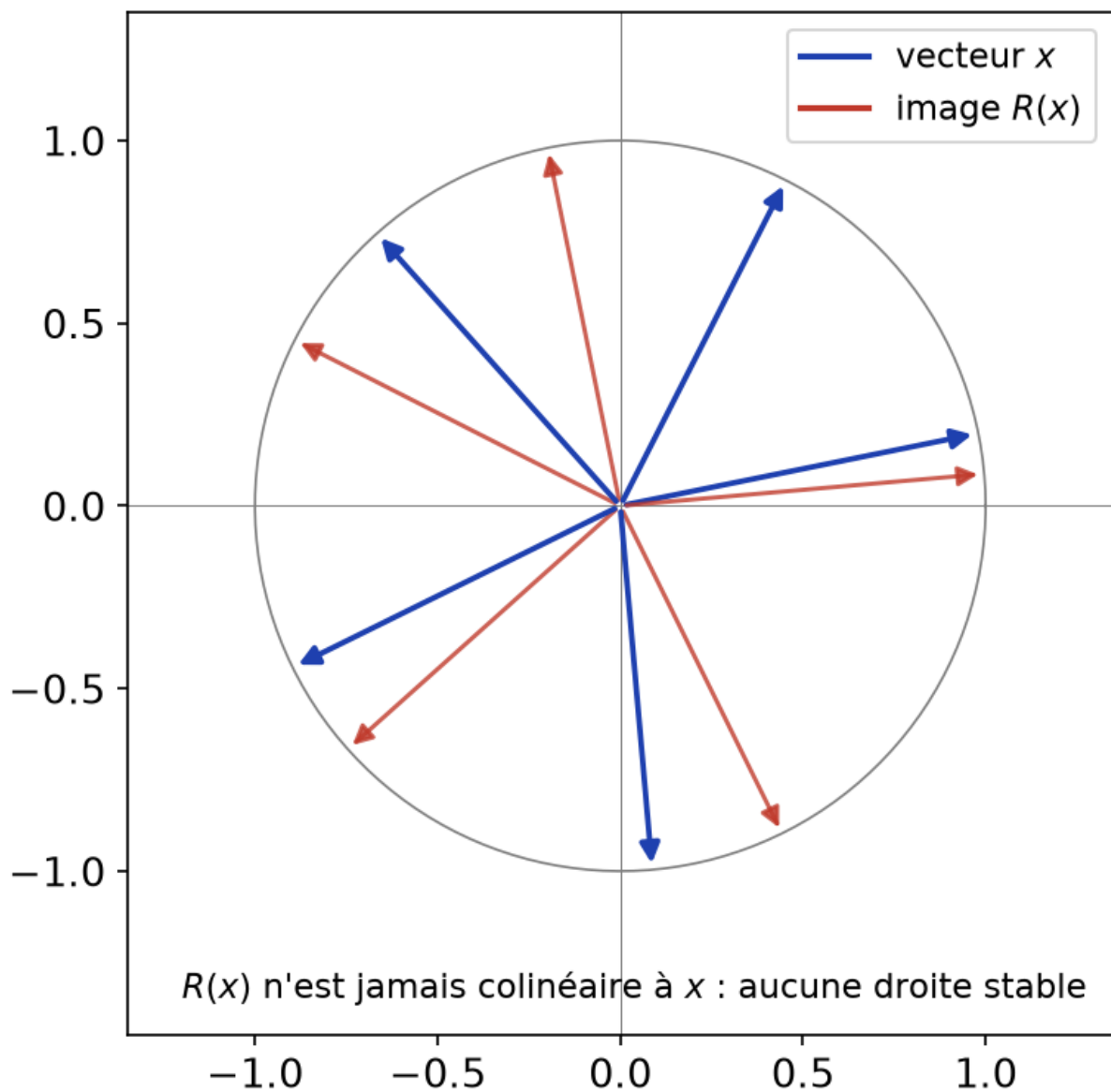
Soit $D : f \rightarrow f'$ sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f' = \lambda f$ a pour solutions les fonctions $x \rightarrow c e^{\lambda x}$. Donc tout réel est valeur propre de D , et $E_\lambda(D) = \text{Vect}(x \rightarrow e^{\lambda x})$. Ainsi, en dimension infinie, le spectre peut être infini.

2. Droites stables et vecteurs propres

Propriété :

Une droite $D = \text{Vect}(x)$ est stable par u si et seulement si x est un vecteur propre de u . Plus généralement, tout sous-espace propre de u est stable par u , et u y induit l'homothétie de rapport λ .

Ainsi, chercher des vecteurs propres revient à chercher des droites stables. Or il peut ne pas en exister sur $\mathbb{R}$. La rotation R d'angle $\pi/2$ du plan euclidien envoie tout vecteur x sur un vecteur orthogonal. Par conséquent, $R(x)$ n'est jamais colinéaire à $x \neq 0$, comme on le voit sur la figure suivante.



3. Somme directe des sous-espaces propres

Théorème :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $\mathcal{U}$. Alors la somme $E_{\lambda_1}(\mathcal{U}) + \dots + E_{\lambda_p}(\mathcal{U})$ est directe. En particulier, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur p . Le cas $p = 1$ est clair. Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$, et soit $x_1 + \dots + x_p = 0$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$. D'une part, on applique u : $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$. D'autre part, on multiplie la relation initiale par λ_p . Par différence, on obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \dots + (\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0.$$

Chaque $(\lambda_i - \lambda_p)x_i$ appartient à $E_{\lambda_i}(u)$. Donc, par hypothèse de récurrence, $(\lambda_i - \lambda_p)x_i = 0$ pour $i \leq p - 1$. Or $\lambda_i \neq \lambda_p$, donc $x_i = 0$. Enfin, la relation initiale donne $x_p = 0$.

Corollaire :

En dimension n , un endomorphisme a au plus n valeurs propres distinctes, et

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) \leq n.$$

Méthode :

Pour montrer qu'une famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, on cherche un endomorphisme dont les f_k sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes. Par exemple, les fonctions $x \rightarrow e^{a_k x}$, avec des réels a_k distincts, sont vecteurs propres de la dérivation pour les valeurs propres a_k . Elles forment donc une famille libre, sans aucun calcul de déterminant.

4. Éléments propres d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments propres de A sont ceux de l'endomorphisme $X \rightarrow AX$ de

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Si A représente u dans une base $\mathcal{B}$, alors $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$, et les vecteurs propres de A sont les colonnes de coordonnées de ceux de u . Par conséquent, deux matrices semblables ont le même spectre.

Remarque :

Une matrice réelle peut être vue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{R}$. Par exemple, la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ a un spectre réel vide, mais son spectre complexe vaut $\{i, -i\}$.

V. Le polynôme caractéristique

1. Définition

Définition :

Le **polynôme caractéristique** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\chi_A = \det(XI_n - A)$. C'est un polynôme unitaire de degré n . Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. On définit donc χ_u comme le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice de u .

En effet, si $B = P^{-1}AP$, alors $XI_n - B = P^{-1}(XI_n - A)P$, et les déterminants coïncident. Par ailleurs, $\chi_{A^T} = \chi_A$, car une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Théorème :

Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$:
 $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$.

Méthode :

Pour déterminer les éléments propres d'une matrice A :

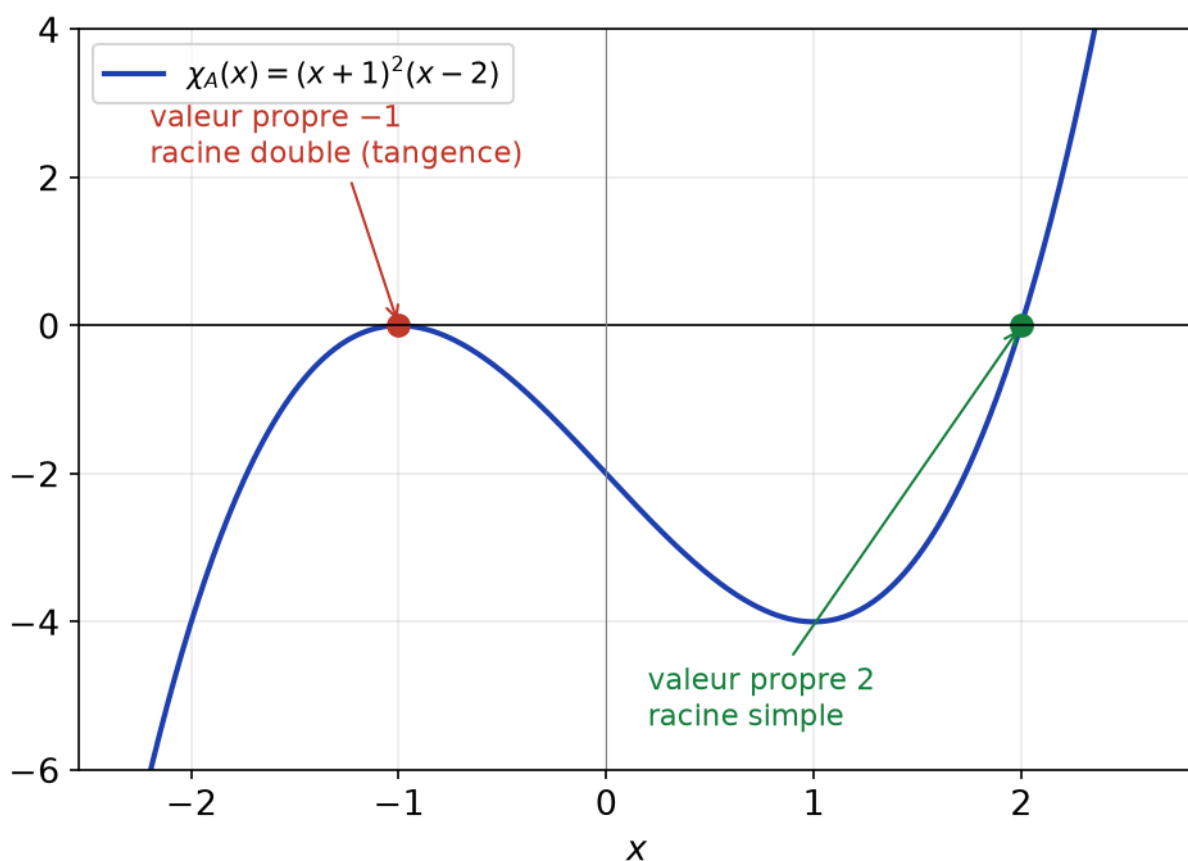
1. on calcule $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ en faisant apparaître des zéros par opérations sur les lignes ou les colonnes, avant de développer ;
2. on factorise χ_A pour lire le spectre et les multiplicités ;
3. pour chaque valeur propre λ , on résout le système $(A - \lambda I_n)X = 0$;
4. on contrôle le résultat avec la trace, qui doit égaler la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On ajoute à la première colonne de $XI_3 - A$ les deux autres, puis on factorise par $X - 2$. Ensuite, on retranche la première ligne aux deux autres. Il vient

$$\chi_A = (X - 2) \begin{vmatrix} 1 & X-1 & X-1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X - 2)(X + 1)^2.$$

Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{2, -1\}$. De plus, $E_2(A) = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $E_{-1}(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$. La figure montre le graphe de χ_A : la courbe est tangente à l'axe en la racine double -1 et le traverse en la racine simple 2 .



2. Coefficients remarquables

Proposition :

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

En particulier, pour $n = 2$, $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A) X + \det A$.

Démonstration :

D'abord, le coefficient constant vaut $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. Ensuite, on développe $\det(XI_n - A)$ par la formule des permutations. Un terme associé à une permutation $\sigma \neq \text{id}$ contient au plus $n - 2$ coefficients diagonaux, donc il est de degré au plus $n - 2$. Par conséquent, les termes en X^n et X^{n-1} proviennent du seul produit $\prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$, qui vaut $X^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})X^{n-1} + \dots$.

Corollaire :

Si χ_A est scindé, de racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité, alors $\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$. C'est toujours le cas sur $\mathbb{C}$.

3. Matrices triangulaires et endomorphisme induit

Propriété :

Si T est triangulaire de diagonale $(t_1, \dots, t_n)$, alors $\chi_T = \prod_{i=1}^n (X - t_i)$. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A et C carrées, alors $\chi_M = \chi_A \chi_C$.

En effet, $XI - M$ est encore triangulaire par blocs, de blocs diagonaux $XI - A$ et $XI - C$. On applique alors le théorème du paragraphe II.

Corollaire :

Si F est un sous-espace stable par u , alors χ_{u_F} divise χ_u . En particulier, toute valeur propre de l'endomorphisme induit u_F est une valeur propre de u .

VI. Multiplicité et dimension des sous-espaces propres

Définition :

La **multiplicité** d'une valeur propre λ de u , notée m_λ , est sa multiplicité comme racine de χ_u . On parle de valeur propre simple si $m_\lambda = 1$, double si $m_\lambda = 2$, et ainsi de suite.

Théorème :

Pour toute valeur propre λ de u , on a $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$. En particulier, si λ est simple, alors $E_\lambda(u)$ est une droite.

Démonstration :

Posons $d = \dim E_\lambda(u)$. Comme λ est valeur propre, $d \geq 1$. Ensuite, $E_\lambda(u)$ est stable par u , et u y induit $\lambda \text{ id}$. Dans une base adaptée, la matrice de u s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ donc } \chi_u = (X - \lambda)^d \chi_C.$$

Par conséquent, $(X - \lambda)^d$ divise χ_u , c'est-à-dire $d \leq m_\lambda$.

Exemple :

La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X - 1)^2$. Donc 1 est

valeur propre double. Cependant, $N - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, si bien que $\dim E_1(N) = 1 < 2$. En revanche, pour I_2 , la valeur propre 1 est double et $\dim E_1(I_2) = 2$. Ainsi, N et I_2 ont le même polynôme caractéristique sans être semblables.

Remarque :

Le polynôme caractéristique ne détermine donc pas la classe de similitude. Pour comparer deux matrices de même X , on compare les dimensions des sous-espaces propres, c'est-à-dire les rangs des $A - \lambda I_n$. Le chapitre suivant exploitera l'égalité $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour caractériser les endomorphismes diagonalisables.

Ce qu'il faut retenir

- Une somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si et seulement si une décomposition de 0 est triviale ; en dimension finie, cela revient à $\dim \sum F_i = \sum \dim F_i$.
- Une décomposition $E = \bigoplus F_i$ fournit des projecteurs p_i tels que $\sum p_i = \text{id}_E$ et $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$.
- Le produit par blocs se calcule comme un produit de matrices 2×2 , sans commuter les blocs ; le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.
- F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans une base adaptée est triangulaire supérieure par blocs.
- Si u et v commutent, les noyaux, les images et les sous-espaces propres de v sont stables par u .
- λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif, c'est-à-dire $\chi_u(\lambda) = 0$ en dimension finie.
- Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe ; des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.

- $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$; deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, mais la réciproque est fausse.
- Pour toute valeur propre, $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.

Questions fréquentes sur éléments propres

Comment trouver rapidement les valeurs propres d'une matrice ?

On calcule $\chi_A = \det(XI_n - A)$ en faisant apparaître des zéros avant de développer, puis on cherche ses racines. Pour une matrice d'ordre 2, $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A$ suffit. Pensez aussi aux matrices triangulaires ou triangulaires par blocs, dont le polynôme caractéristique se lit presque directement.

Pourquoi des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont-ils libres ?

Parce que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. La preuve se fait par récurrence : on applique l'endomorphisme à une relation de dépendance, puis on retranche la relation multipliée par une valeur propre. Ce résultat sert souvent à prouver la liberté de familles de fonctions, comme les exponentielles $x \rightarrow e^{a_k x}$.

Deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique sont-elles semblables ?

Non. Par exemple, I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont toutes deux pour polynôme caractéristique $(X - 1)^2$. Pourtant, la seule matrice semblable à I_2 est I_2 elle-même. Pour les distinguer, on compare les dimensions des sous-espaces propres, c'est-à-dire les rangs des $A - \lambda I_n$.

Quel lien entre multiplicité et dimension du sous-espace propre ?

Pour toute valeur propre λ , on a $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$, où m_λ est la multiplicité de λ comme racine de χ_u . En particulier, une valeur propre simple a toujours une droite pour sous-espace propre. L'égalité pour toutes les valeurs propres caractérisera la diagonalisabilité au chapitre suivant.

Pour aller plus loin en maths spé

- Les énoncés : [exercices de maths spé sur éléments propres](#)
- Chapitre précédent : [Anneaux, idéaux, \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$ et algèbres](#)
- Chapitre suivant : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)