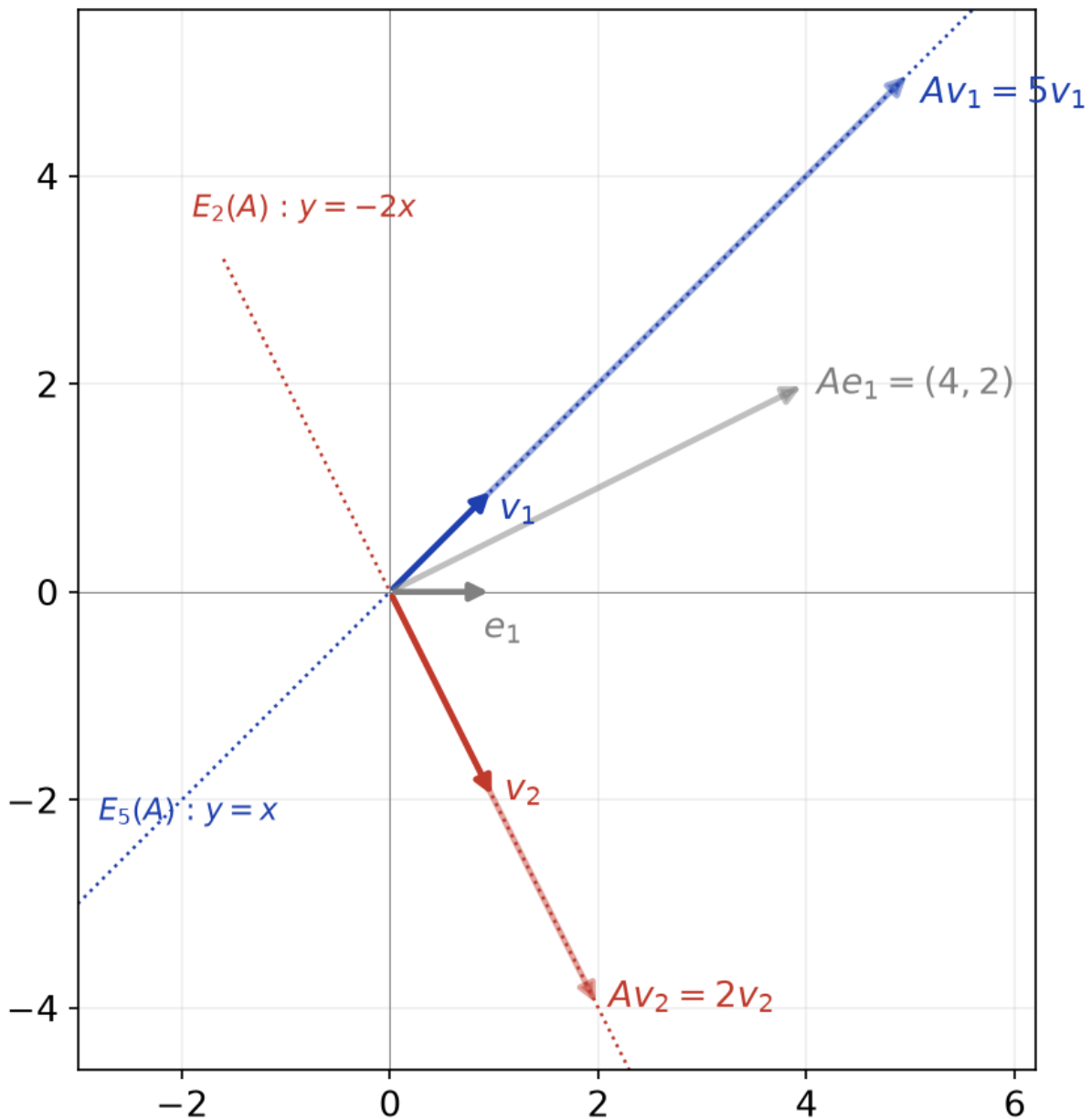


Éléments propres

Corrigé de l'exercice 1 : Éléments propres d'une matrice d'ordre 2

1. Pour une matrice d'ordre 2, $\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A$. Ici, $\text{tr}(A) = 7$ et $\det A = 12 - 2 = 10$. Donc $\chi_A = X^2 - 7X + 10 = (X - 2)(X - 5)$.
2. Les valeurs propres sont les racines de χ_A , d'où $\text{Sp}(A) = \{2, 5\}$. Ensuite,
 $A - 5I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, donc $(A - 5I_2)X = 0$ équivaut à $x = y$. De même, $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc le système équivaut à $y = -2x$. Ainsi, $E_5(A) = \text{Vect}((1, 1))$ et $E_2(A) = \text{Vect}((1, -2))$. On vérifie :
 $A(1, -2)^T = (2, -4)^T = 2(1, -2)^T$.
3. Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$ est non nul. Donc $((1, 1), (1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On pouvait aussi invoquer le cours : deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. La figure ci-dessous montre que seules ces deux directions sont conservées par A , contrairement à e_1 .



Corrigé de l'exercice 2 : Polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre 3

1. Dans $XI_3 - A$, on ajoute à la première colonne les deux autres : elle devient $(X - 2, X - 2, X - 2)^T$. On factorise par $X - 2$, puis on retranche la première ligne aux deux autres. On obtient une matrice triangulaire, et $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$. Ensuite, $A + I_3$ a trois lignes égales à $(1, 1, 1)$, donc $E_{-1}(A)$ est le plan $x + y + z = 0$, de base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$. Enfin, $A(1, 1, 1)^T = (2, 2, 2)^T$, donc $E_2(A) = \text{Vect}((1, 1, 1))$: c'est une droite, car 2 est valeur propre simple.

2. La troisième ligne de $XI_3 - B$ est $(0, 0, X - 2)$. En développant selon cette ligne :

$$\chi_B = (X - 2) \begin{vmatrix} X - 4 & 2 \\ -4 & X + 1 \end{vmatrix} = (X - 2)((X - 5)(X + 1) + 8) = (X - 2)(X^2 - 4X + 3).$$

Ainsi, $\chi_B = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$ et $\text{Sp}(B) = \{1, 2, 3\}$.

Questions 3 à 4

3. Pour $\lambda = 1$: $B - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $z = 0$ et $y = 2x$. Pour $\lambda = 2$: les équations $3x - 2y - z = 0$ et $4x - 3y - z = 0$ donnent, par différence, $x = y$, puis $z = x$. Pour $\lambda = 3$: la dernière ligne donne $z = 0$, puis $2x - 2y = 0$. Donc $E_1(B) = \text{Vect}((1, 2, 0))$, $E_2(B) = \text{Vect}((1, 1, 1))$, $E_3(B) = \text{Vect}((1, 1, 0))$.
4. D'une part, $\text{tr}(A) = 0 = 2 - 1 - 1$ et $\det A = 2 = 2 \times (-1)^2$. D'autre part, $\text{tr}(B) = 6 = 1 + 2 + 3$ et $\det B = 2 \times (-5 + 8) = 6 = 1 \times 2 \times 3$. **Les deux contrôles sont concluants.**

Point de méthode : avant de développer un déterminant d'ordre 3, cherchez une ligne presque nulle ou une combinaison de colonnes qui fait apparaître un facteur commun.

Corrigé de l'exercice 3 : Spectre à partir de la trace et du déterminant

1. La matrice $A - I_3$ n'est pas inversible, donc son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Il existe ainsi $X \neq 0$ tel que $AX = X$. Par conséquent, 1 est valeur propre de A .
2. Sur $\mathbb{C}$, χ_A est scindé, de racines $1, \lambda_2, \lambda_3$. D'après les relations entre coefficients et racines, $1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{tr}(A) = 6$ et $1 \cdot \lambda_2 \lambda_3 = \det A = 6$. Donc $\lambda_2 + \lambda_3 = 5$ et $\lambda_2 \lambda_3 = 6$. Ces nombres sont les racines de $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$. Ainsi, $\text{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}$.
3. On en déduit $\chi_A = (X - 1)(X - 2)(X - 3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. Le coefficient de

$$X \text{ vaut } 11 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3.$$

4. La matrice M est triangulaire, de diagonale $(1, 2, 3)$. Elle vérifie donc les hypothèses. Ses mineurs principaux d'ordre 2 valent $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$ et $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$. **Leur somme vaut bien 11.**

Corrigé de l'exercice 4 : Valeurs propres de l'inverse et d'un polynôme en A

- La matrice A est inversible si et seulement si $\ker A = \{0\}$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun $X \neq 0$ tel que $AX = 0 \cdot X$. **Donc A est inversible si et seulement si $0 \notin \text{Sp}(A)$.**
- Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, qui est non nul d'après la question 1, et $X \in E_\lambda(A)$. En multipliant $AX = \lambda X$ par $\lambda^{-1}A^{-1}$, on obtient $A^{-1}X = \lambda^{-1}X$. Donc $E_\lambda(A) \subset E_{1/\lambda}(A^{-1})$. En appliquant ce résultat à A^{-1} , dont l'inverse est A , on obtient l'inclusion réciproque. Par conséquent, $\text{Sp}(A^{-1}) = \{1/\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ et $E_{1/\lambda}(A^{-1}) = E_\lambda(A)$.
- Par récurrence, $A^k X = \lambda^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, $A^{k+1}X = A(\lambda^k X) = \lambda^{k+1}X$. Par linéarité, pour $P = \sum c_k X^k$, on a $P(A)X = \sum c_k \lambda^k X = P(\lambda)X$. Si $X \neq 0$, ceci montre que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(A)$. **Donc $\{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\} \subset \text{Sp}(P(A))$.**
- On a $\chi_R = X^2 + 1$, sans racine réelle, donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R) = \emptyset$. En revanche, $R^2 = -I_2$, donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(R^2) = \{-1\}$. **L'inclusion $\emptyset \subset \{-1\}$ est stricte.**
- Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\lambda^2 X = A^2 X = AX = \lambda X$. Donc $(\lambda^2 - \lambda)X = 0$, puis $\lambda^2 = \lambda$. **Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Calculs par blocs

1. Le produit par blocs donne $M^2 = \begin{pmatrix} I_2 & B+B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 2B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Ensuite, si $M^k = \begin{pmatrix} I_2 & kB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$, alors $M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} I_2 & B + kB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. L'initialisation $M^0 = I_4$ est vraie. **Donc** $M^k = \begin{pmatrix} I_2 & kB \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Posons $M' = \begin{pmatrix} I_2 & -B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$. Le même calcul donne $MM' = M'M = I_4$. **Donc** M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & -B \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$.

3. On note N' la matrice proposée et on calcule par blocs :

$$NN' = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}CD^{-1} + CD^{-1} \\ 0 & DDD^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Une matrice carrée qui possède un inverse à droite est inversible. **Donc** N est inversible et $N^{-1} = N'$.

4. La matrice M est triangulaire supérieure, de diagonale $(1, 1, 1, 1)$. Donc $\chi_M = (X - 1)^4$. Ensuite, $M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $X = (Y, Z)$ avec $Y, Z \in \mathbb{R}^2$, on a $(M - I_4)X = (BZ, 0)$. Or $\det B = -2 \neq 0$, donc $BZ = 0$ équivaut à $Z = 0$. Ainsi, $E_1(M) = \text{Vect}(e_1, e_2)$, de dimension 2, alors que la multiplicité vaut 4.

Corrigé de l'exercice 6 : Déterminant triangulaire par blocs

1. La matrice est triangulaire supérieure par blocs, avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. D'après le théorème du cours, $\det M = \det M_1 \det M_2 = (4 - 6)(4 - 1)$. **Donc** $\det M = -6$.

2. La matrice $XI_4 - M$ est encore triangulaire par blocs. Donc $\chi_M = \chi_{M_1} \chi_{M_2}$, avec $\chi_{M_1} = X^2 - 5X - 2$ et $\chi_{M_2} = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$. Le discriminant de $X^2 - 5X - 2$ vaut $25 + 8 = 33$. Ainsi, $\chi_M = (X - 1)(X - 3)(X^2 - 5X - 2)$ et $\text{Sp}(M) = \left\{1, 3, \frac{5 - \sqrt{33}}{2}, \frac{5 + \sqrt{33}}{2}\right\}$. On contrôle : la somme vaut $1 + 3 + 5 = 9 = \text{tr}(M)$.

3. Le bloc nul en bas à gauche signifie que $u(e_1)$ et $u(e_2)$ appartiennent à $\text{Vect}(e_1, e_2)$. **Le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est donc stable par u** , et M_1 est la matrice de l'endomorphisme induit. En particulier, χ_{M_1} divise χ_M .

Corrigé de l'exercice 7 : Projection sur un plan parallèlement à une droite

1. Le vecteur w vérifie $1 + 2 + 0 = 3 \neq 0$, donc $w \notin F$ et $F \cap G = \{0\}$. De plus, $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3$. **Donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.**
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $s = x_1 + x_2 + x_3$. On cherche t tel que $x - tw \in F$, c'est-à-dire $s - 3t = 0$. Donc $t = s/3$, et $p(x) = x - \frac{s}{3}w$. En écrivant les images des vecteurs de base, on obtient

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $p(x) = (x_1 - \frac{s}{3}, x_2 - \frac{2s}{3}, x_3)$.

3. Pour $x = (3, 0, 0)$, on a $s = 3$, donc $p(3, 0, 0) = (3, 0, 0) - (1, 2, 0) = (2, -2, 0)$, qui appartient bien à F . Ensuite, $p(x) \in F$, donc la composante de $p(x)$ sur G est nulle et $p(p(x)) = p(x)$. Le calcul matriciel le confirme : $P^2 = P$.
4. Pour $x \in F$, $p(x) = x$; pour $x \in G$, $p(x) = 0$. Comme $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, on obtient $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$, $E_1(p) = F$ et $E_0(p) = G$. Ensuite, $s = 2p - \text{id}$ vaut id sur F et $-\text{id}$ sur G . **Donc $\text{Sp}(s) = \{-1, 1\}$, $E_1(s) = F$ et $E_{-1}(s) = G$.**

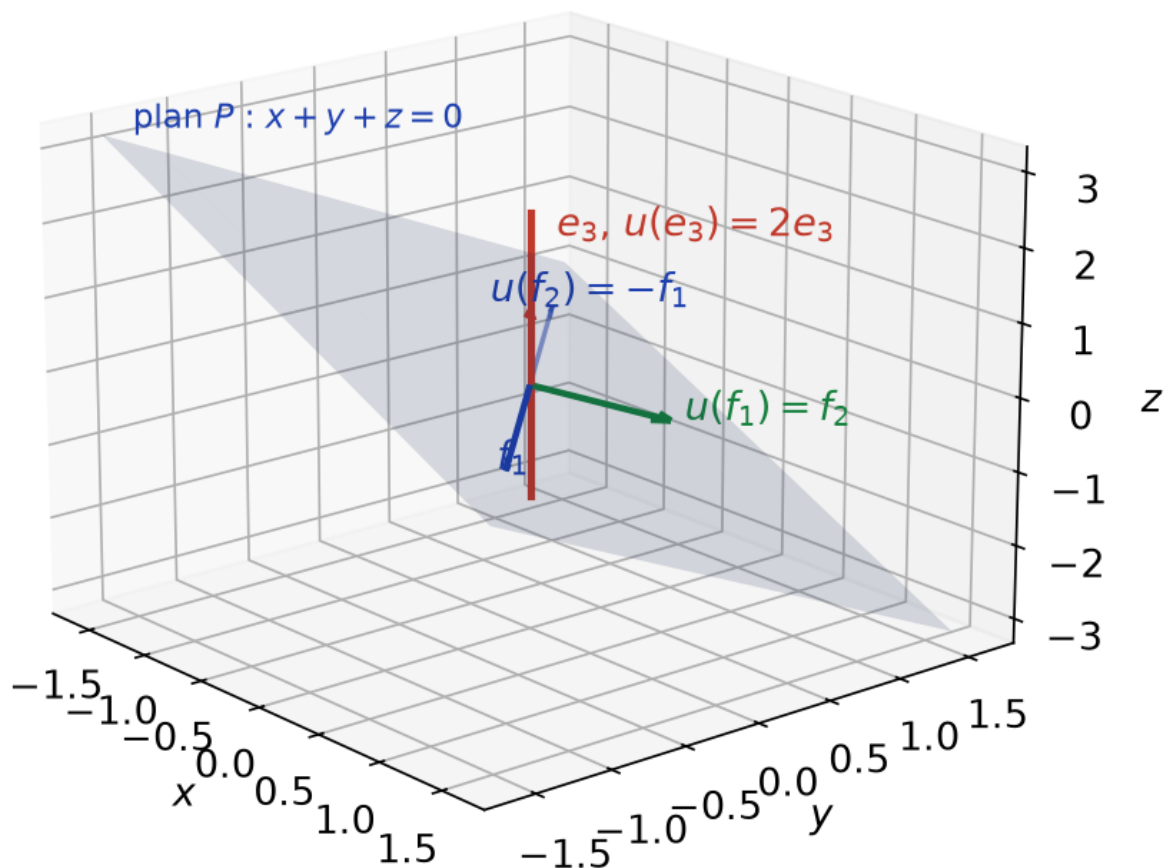
Corrigé de l'exercice 8 : Somme directe de trois droites et projecteurs associés

- On calcule $\det(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) - 0 + 1 \cdot (1 - 0) = 2$. Ce déterminant est non nul, donc (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$. Or la concaténation des bases des F_i est une base. **Donc** $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
- On cherche $x = \alpha a + \beta b + \gamma c$, soit $\alpha + \gamma = x_1$, $\alpha + \beta = x_2$ et $\beta + \gamma = x_3$. En sommant, $\alpha + \beta + \gamma = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$. Par différence, on obtient $\alpha = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}$, $\beta = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2}$, $\gamma = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2}$.
Ainsi, $p_1(x) = \alpha a$, $p_2(x) = \beta b$ et $p_3(x) = \gamma c$.
- Par construction, $p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) = x$, donc $p_1 + p_2 + p_3 = \text{id}$. Ensuite, $p_2(x) = \beta b$ et $p_1(b) = \frac{0+1-1}{2}a = 0$. Donc $p_1 \circ p_2 = 0$, conformément au cours.
- Deux droites distinctes du plan se coupent en $\{0\}$, donc $D_i \cap D_j = \{0\}$ pour $i \neq j$. Cependant, $e_1 + e_2 - (e_1 + e_2) = 0$ est une décomposition de 0 avec des composantes non nulles dans D_1 , D_2 et D_3 . **La somme n'est donc pas directe**; on le voit aussi avec les dimensions : $1 + 1 + 1 = 3 > 2$.

Corrigé de l'exercice 9 : Plan stable et endomorphisme induit

- Par lecture des colonnes de A , on trouve $u(f_1) = u(e_1) - u(e_2) = (-1, 2, 1) - (-1, 1, 2) = (0, 1, -1) = f_2$. De même, $u(f_2) = u(e_2) - u(e_3) = (-1, 1, 2) - (0, 0, 2) = (-1, 1, 0) = -f_1$, et $u(e_3) = (0, 0, 2) = 2e_3$. Le plan P est engendré par f_1 et f_2 , qui vérifient son équation. Leurs images sont dans P . **Donc P est stable, et $\text{Vect}(e_3)$ aussi, car e_3 est vecteur propre.**
- D'après la question précédente, $\text{Mat}_{(f_1, f_2)}(u_P) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, $e_3 \notin P$, donc (f_1, f_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, **la matrice de u est** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, diagonale par blocs.
- Par le déterminant par blocs, $\chi_u = (X^2 + 1)(X - 2)$. Le facteur $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. **Donc $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) = \{2\}$, avec $E_2(u) = \text{Vect}(e_3)$.**

4. Une droite stable contenue dans P serait dirigée par un vecteur propre de u_P . Or $\chi_{u_P} = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. **Aucune droite de P n'est donc stable par u .** Comme le montre la figure, u agit sur P comme un « quart de tour » dans la base (f_1, f_2) , et dilate la droite $\text{Vect}(e_3)$.



Corrigé de l'exercice 10 : Dérivation sur les polynômes

1. Si $P' = \lambda P$ avec $P \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, alors $\deg P' = \deg P$, ce qui est impossible puisque P' est de degré strictement inférieur ou nul. Donc seule $\lambda = 0$ peut convenir, et $D(P) = 0$ équivaut à P constant. Par ailleurs, la matrice de D dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte. **Donc** $\text{Sp}(D) = \{0\}$, $E_0(D) = \mathbb{R}_0[X]$ **et** $\chi_D = X^{n+1}$

2. On a $\varphi(X^k) = X \cdot kX^{k-1} = kX^k$. La matrice de φ est donc $\text{diag}(0, 1, \dots, n)$. Par conséquent, $\chi_\varphi = \prod_{k=0}^n (X - k)$ et $\text{Sp}(\varphi) = \{0, 1, \dots, n\}$. Chaque valeur propre est simple, donc chaque sous-espace propre est une droite : $E_k(\varphi) = \text{Vect}(X^k)$.
3. On calcule $\psi((X-1)^k) = (X-1) \cdot k(X-1)^{k-1} = k(X-1)^k$. Ces polynômes sont non nuls, donc ce sont des vecteurs propres pour les valeurs propres $0, 1, \dots, n$. Or $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, et un endomorphisme a au plus $n+1$ valeurs propres. **Ainsi**, $\text{Sp}(\psi) = \{0, 1, \dots, n\}$, avec $E_k(\psi) = \text{Vect}((X-1)^k)$.

Corrigé de l'exercice 11 : Familles de fonctions propres libres

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'équation $f' = \lambda f$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Ses solutions sont les $x \rightarrow Ce^{\lambda x}$, qui sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. **Donc** $\text{Sp}(D) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(D) = \text{Vect}(x \rightarrow e^{\lambda x})$.
2. Les fonctions $x \rightarrow e^{a_k x}$ sont des vecteurs propres de D associés aux valeurs propres $a_1, \dots, a_p$, deux à deux distinctes. D'après le théorème de somme directe des sous-espaces propres, **la famille est libre**.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $D^2(\cos(k \cdot)) = -k^2 \cos(k \cdot)$, et $\cos(k \cdot)$ n'est pas la fonction nulle. Ce sont donc des vecteurs propres de D^2 . Les valeurs propres $0, -1, -4, \dots, -p^2$ sont deux à deux distinctes. **La famille $(\cos(k \cdot))_{0 \leq k \leq p}$ est donc libre**.
4. Si $\alpha \cos + \beta \sin = 0$, l'évaluation en 0 donne $\alpha = 0$, puis l'évaluation en $\pi/2$ donne $\beta = 0$. **La famille est donc libre**. Cependant, le théorème du cours ne s'applique pas, car la valeur propre -1 est commune. Il fournit une condition suffisante de liberté, mais pas nécessaire : $E_{-1}(D^2)$ est ici un plan.

Corrigé de l'exercice 12 : Transposition dans les matrices carrées

1. Pour toute matrice M , $(M^T)^T = M$, donc $T \circ T = \text{id}$. Soit λ une valeur propre et $M \neq 0$ tel que $T(M) = \lambda M$. Alors $M = T(T(M)) = \lambda^2 M$, d'où $\lambda^2 = 1$.
Ainsi, $\text{Sp}(T) \subset \{-1, 1\}$.
2. D'abord, $T(M) = M$ équivaut à M symétrique. Ensuite, $T(M) = -M$ équivaut à M antisymétrique. Donc $E_1(T) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, **de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$** , et $E_{-1}(T) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, **de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$** . Ces espaces sont non nuls pour $n \geq 2$, donc $\text{Sp}(T) = \{-1, 1\}$.
3. La somme de deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. De plus, toute matrice s'écrit $M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$. **Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_1(T) \oplus E_{-1}(T)$.** Dans une base adaptée, la matrice de T est $\text{diag}(I_r, -I_s)$ avec $r = \frac{n(n+1)}{2}$ et $s = \frac{n(n-1)}{2}$. Par conséquent, $\chi_T = (X - 1)^{n(n+1)/2} (X + 1)^{n(n-1)/2}$.
4. On lit sur χ_T : $\text{tr}(T) = r - s = n$ et $\det T = (-1)^s$. **Donc $\text{tr}(T) = n$ et $\det T = (-1)^{n(n-1)/2}$.**

Corrigé de l'exercice 13 : Matrices de rang 1

1. Notons $V = (v_1, \dots, v_n)^T$. La j -ème colonne de A est $v_j U$. Toutes les colonnes sont colinéaires à U , et l'une d'elles est non nulle car $V \neq 0$. **Donc $\text{rg } A = 1$.** Ensuite, $V^T U$ est un scalaire, et $A^2 = U(V^T U)V^T = (V^T U)A$. Or $\text{tr}(UV^T) = \sum_i u_i v_i = V^T U$. **Ainsi, $A^2 = \text{tr}(A) A$.**
2. Comme $U \neq 0$, $AX = U(V^T X) = 0$ équivaut à $V^T X = 0$. **Donc $\ker A$ est l'hyperplan d'équation $v_1 x_1 + \dots + v_n x_n = 0$, de dimension $n - 1$.** D'après l'inégalité $\dim E_0(A) \leq m_0$, la multiplicité de 0 est au moins $n - 1$.
3. Par conséquent, X^{n-1} divise χ_A , qui est unitaire de degré n . Donc $\chi_A = X^{n-1}(X - \mu)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$. Le coefficient de X^{n-1} vaut $-\mu = -\text{tr}(A)$. **Ainsi, $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))$.**
4. On a $AU = U(V^T U) = \text{tr}(A)U$ et $U \neq 0$. **Donc U est vecteur propre associé à $\text{tr}(A)$.** Comme $\text{tr}(A)$ est alors valeur propre simple, $E_{\text{tr}(A)}(A) = \text{Vect}(U)$.

5. On a $J_n = UU^T$ avec $U = (1, \dots, 1)^T$, et $\text{tr}(J_n) = n$. Donc
 $\chi_{J_n} = X^{n-1}(X - n)$, $E_0(J_n)$ est l'hyperplan $x_1 + \dots + x_n = 0$ et
 $E_n(J_n) = \text{Vect}((1, \dots, 1))$.

Corrigé de l'exercice 14 : Endomorphisme $M \mapsto M + \text{tr}(M) I_n$

- La trace est linéaire, donc
 $\varphi(\alpha M + N) = \alpha M + N + (\alpha \text{tr}(M) + \text{tr}(N))I_n = \alpha \varphi(M) + \varphi(N)$. Ensuite,
 $\varphi(I_n) = I_n + nI_n = (n+1)I_n$.
- Si $\text{tr}(M) = 0$, alors $\varphi(M) = M$.
- Notons $\mathcal{T} = \ker(\text{tr})$, hyperplan de dimension $n^2 - 1$. D'après la question 2, $\mathcal{T} \subset E_1(\varphi)$.
D'après la question 1, $I_n \in E_{n+1}(\varphi)$. Ces sous-espaces propres sont en somme directe, et
 $\dim E_1(\varphi) + \dim E_{n+1}(\varphi) \geq (n^2 - 1) + 1 = n^2$. Les inégalités sont donc des égalités.
Ainsi, $\text{Sp}(\varphi) = \{1, n+1\}$, $E_1(\varphi) = \mathcal{T}$, $E_{n+1}(\varphi) = \text{Vect}(I_n)$ et
 $\chi_\varphi = (X - 1)^{n^2 - 1}(X - (n+1))$. Il n'y a pas d'autre valeur propre, car la somme des
dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser n^2 .
- On en déduit $\text{tr}(\varphi) = n^2 - 1 + n + 1 = n^2 + n$ et $\det \varphi = n + 1$, non nul, donc φ
est inversible. Pour trouver l'inverse, posons $N = M - \frac{\text{tr}(M)}{n+1}I_n$ et notons $t = \text{tr}(M)$.
Alors $\text{tr}(N) = t - \frac{nt}{n+1} = \frac{t}{n+1}$, donc $\varphi(N) = N - \frac{t}{n+1}I_n + \frac{t}{n+1}I_n = N$.
Ainsi, $\varphi^{-1}(M) = M - \frac{\text{tr}(M)}{n+1}I_n$.

Corrigé de l'exercice 15 : Multiplicité et dimension d'un sous-espace propre

- La matrice est triangulaire supérieure, donc $\chi_{A_a} = (X - 1)^2(X - 2)$: 1 est valeur propre
double et 2 est valeur propre simple.
- On a $A_a - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $a \neq 0$, les deux premières lignes sont indépendantes, donc

le rang vaut 2. Si $a = 0$, les trois lignes valent $(0, 0, 1)$, donc le rang vaut 1. Par le théorème du rang, $\dim E_1(A_a) = 1$ si $a \neq 0$, et $\dim E_1(A_0) = 2$. On retrouve bien $1 \leq \dim E_1 \leq 2 = m_1$.

- On résout $(A_a - 2I_3)X = 0$: $-x + ay + z = 0$ et $-y + z = 0$. Donc $y = z$ et $x = (a + 1)z$. Ainsi, $E_2(A_a) = \text{Vect}((a + 1, 1, 1))$.
- Si $A_1 = P^{-1}A_0P$, alors $A_1 - I_3 = P^{-1}(A_0 - I_3)P$, et ces matrices ont le même rang. Or $\text{rg}(A_0 - I_3) = 1$ et $\text{rg}(A_1 - I_3) = 2$. Donc A_0 et A_1 ne sont pas semblables, bien qu'elles aient le même polynôme caractéristique.

Corrigé de l'exercice 16 : Commutant d'une matrice

- La matrice nulle commute avec A . De plus, si $AM = MA$ et $AN = NA$, alors $A(\alpha M + N) = \alpha MA + NA = (\alpha M + N)A$. Donc $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel.
- Les n valeurs propres λ_i sont distinctes. Chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1, et la somme des dimensions est au plus n . Donc $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$. Or v commute avec $u - \lambda_i \text{id}$, donc $\ker(u - \lambda_i \text{id})$ est stable par v . Ainsi, $v(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$, et e_i est vecteur propre de v .
- Les valeurs propres de Δ sont 1, 2, 3, distinctes, et la base canonique est formée de vecteurs propres. D'après la question 2, toute matrice qui commute avec Δ est diagonale. Réciproquement, deux matrices diagonales commutent. Donc $\mathcal{C}(\Delta)$ est l'espace des matrices diagonales, de dimension 3.
- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On calcule $NM = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix}$ et $MN = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$. L'égalité impose $z = 0$ et $t = x$. Donc $\mathcal{C}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}(I_2, N)$, de dimension 2.

Corrigé de l'exercice 17 : Matrice compagnon

1. On développe $\det(XI_3 - C) = \begin{vmatrix} X & 0 & c \\ -1 & X & \\ 0 & -1 & X+a \end{vmatrix}$ selon la première ligne :

$$\chi_C = X(X(X+a) + b) + c((-1)(-1) - 0) = X^3 + aX^2 + bX + c.$$

Le polynôme caractéristique de C est donc $X^3 + aX^2 + bX + c$.

2. On a $C^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix}$, donc $C^T(1, \lambda, \lambda^2)^T = (\lambda, \lambda^2, -c - b\lambda - a\lambda^2)^T$. Or $\lambda^3 = -a\lambda^2 - b\lambda - c$, car $\chi_C(\lambda) = 0$. **Donc** $C^T(1, \lambda, \lambda^2)^T = \lambda(1, \lambda, \lambda^2)^T$, et ce vecteur est non nul.

3. Pour tout λ , la matrice $C - \lambda I_3$ admet le mineur extrait des lignes 2, 3 et des colonnes 1, 2, égal à $\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Son rang est donc au moins 2. Par le théorème du rang, $\dim \ker(C - \lambda I_3) \leq 1$. **Chaque sous-espace propre de C est donc une droite.**

Question 4

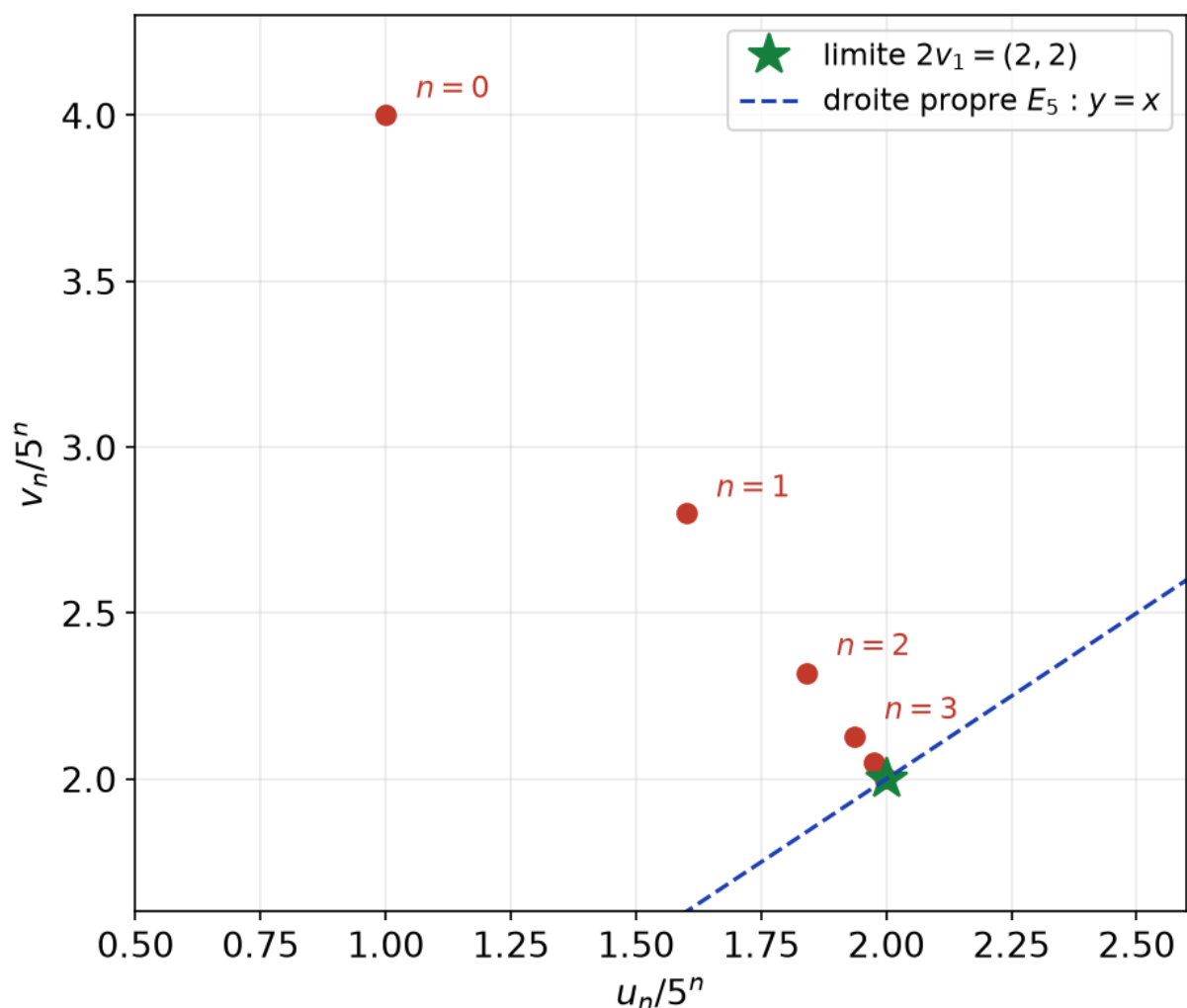
4. On a $(X-1)(X-2)(X-3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$, donc $a = -6$, $b = 11$ et $c = -6$. **La matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ convient.** Sa transposée a pour valeurs propres 1, 2, 3, avec $E_1 = \text{Vect}((1, 1, 1))$, $E_2 = \text{Vect}((1, 2, 4))$ et $E_3 = \text{Vect}((1, 3, 9))$, qui sont des droites d'après la question 3 appliquée à C^T , de même polynôme caractéristique.

Corrigé de l'exercice 18 : Suites récurrentes et vecteurs propres

1. Avec $X_n = (u_n, v_n)^T$, on a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, la

matrice de l'exercice 1. Par récurrence, $X_n = A^n X_0$.

2. D'après l'exercice 1, $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -2)$ vérifient $Av_1 = 5v_1$ et $Av_2 = 2v_2$. On cherche $X_0 = \alpha v_1 + \beta v_2$: $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha - 2\beta = 4$, d'où $\beta = -1$ et $\alpha = 2$. Ensuite, $A^n v_1 = 5^n v_1$ et $A^n v_2 = 2^n v_2$. Donc $X_n = 2 \cdot 5^n v_1 - 2^n v_2$, soit $u_n = 2 \cdot 5^n - 2^n$ et $v_n = 2 \cdot 5^n + 2^{n+1}$. On contrôle : $u_1 = 8 = 4 + 4$ et $v_1 = 14 = 2 + 12$.
3. On a $\frac{X_n}{5^n} = 2v_1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n v_2$, et $(2/5)^n \rightarrow 0$. **Donc** $X_n / 5^n \rightarrow (2, 2)$. Autrement dit, la direction de X_n tend vers la droite propre de la plus grande valeur propre. La figure le montre : les points normalisés rejoignent $(2, 2)$ le long de la direction v_2 .



Corrigé de l'exercice 19 : Sous-espaces stables de quelques endomorphismes

1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(u)(e_i) = P(i)e_i$. Avec $P_1 = \frac{1}{2}(X-2)(X-3)$, on obtient $P_1(1) = 1$, $P_1(2) = 0$ et $P_1(3) = 0$. Donc $p_1(e_1) = e_1$, $p_1(e_2) = 0$ et $p_1(e_3) = 0$: p_1 est le projecteur sur $E_1 = \text{Vect}(e_1)$ associé à la décomposition en droites propres. De même, $p_2 = -(u - \text{id})(u - 3 \text{id})$ et $p_3 = \frac{1}{2}(u - \text{id})(u - 2 \text{id})$ sont les deux autres projecteurs.
2. Comme F est stable par u , il est stable par tout polynôme en u , donc par chaque p_i . Ainsi, pour $x \in F$, $p_i(x) \in F \cap E_i$. Or $x = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$. Donc $F \subset \sum (F \cap E_i)$, l'inclusion réciproque étant claire, et la somme est directe car les E_i le sont. Chaque $F \cap E_i$ vaut $\{0\}$ ou E_i , puisque E_i est une droite. Réciproquement, toute somme de droites propres est stable. **Les sous-espaces stables sont les sommes de parties de $\{E_1, E_2, E_3\}$: il y en a $2^3 = 8$.**

Question 3

3. D'abord, $D(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_{d-1}[X] \subset \mathbb{R}_d[X]$, donc chaque $\mathbb{R}_d[X]$ est stable. Réciproquement, soit $F \neq \{0\}$ stable et d le degré maximal des éléments de F . Prenons $P \in F$ de degré d . Alors $P, P', \dots, P^{(d)}$ appartiennent à F et sont de degrés $d, d-1, \dots, 0$. Cette famille échelonnée est libre, et elle compte $d+1$ éléments de $\mathbb{R}_d[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$, d'où $\mathbb{R}_d[X] \subset F$. Enfin, $F \subset \mathbb{R}_d[X]$ par définition de d . **Donc les sous-espaces stables par D sont $\{0\}$ et les $\mathbb{R}_d[X]$.**

Point de méthode : les projecteurs sur des sous-espaces propres s'écrivent comme polynômes en u (polynômes d'interpolation de Lagrange) ; ils préservent donc tout sous-espace stable.

Corrigé de l'exercice 20 : Polynômes caractéristiques de AB et

BA

1. Par produit par blocs, en respectant l'ordre des facteurs :

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ 0 & x, xI_p \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} xI_n, AB & 0 \\ xB & xI_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & x, xI_p \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} xI_n & A \\ 0 & x, xI_p - BA \end{pmatrix}.$$

En effet, dans le premier produit, le bloc en haut à droite vaut $A - A = 0$. Dans le second, le bloc en bas à gauche vaut $-xB + xB = 0$. **Les deux produits sont triangulaires par blocs.**

2. Les deux matrices de gauche sont triangulaires par blocs, de déterminant x^p . Le déterminant étant multiplicatif, on obtient $x^p \det M = x^p \det(xI_n - AB)$ et $x^p \det M = x^n \det(xI_p - BA)$. **Donc** $x^p \det(xI_n - AB) = x^n \det(xI_p - BA)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$. Les polynômes $X^p \chi_{AB}$ et $X^n \chi_{BA}$ coïncident en une infinité de points, donc $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$.
3. Si $n = p$, on simplifie par X^n , ce qui est licite car $\mathbb{K}[X]$ est intègre. **Donc** $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Le spectre, la trace et le déterminant se lisent sur le polynôme caractéristique (racines, coefficient de X^{n-1} et coefficient constant). **Ils sont donc égaux pour AB et BA .**

Question 4

4. On calcule $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle, puisque $P^{-1}0P = 0$. **Donc AB et BA ne sont pas semblables**, bien que $\chi_{AB} = \chi_{BA} = X^2$.

Point de méthode : multiplier une matrice par blocs par une matrice triangulaire par blocs bien choisie revient à faire un pivot de Gauss par blocs.

Corrigé de l'exercice 21 : Hyperplans stables et transposée

- Comme $\ell \neq 0$, il existe x_0 tel que $\ell(x_0) = 1$. Tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - \ell(x)x_0) + \ell(x)x_0$, avec $x - \ell(x)x_0 \in H$. Posons $\lambda = \psi(x_0)$. Puisque ψ est nulle sur H , on obtient $\psi(x) = \ell(x)\psi(x_0)$. **Donc** $\psi = \lambda\ell$.
- Si $\ell \circ u = \lambda\ell$, alors, pour $x \in H$, $\ell(u(x)) = \lambda\ell(x) = 0$, donc $u(x) \in H$. Réciproquement, si H est stable, la forme linéaire $\psi = \ell \circ u$ est nulle sur H . D'après la question 1, $\psi = \lambda\ell$. **Donc** H est stable si et seulement si $\ell \circ u = \lambda\ell$ pour un certain λ .
- On a $\ell(x) = L^\top x$, donc $\ell \circ u(x) = L^\top Ax$. La condition $\ell \circ u = \lambda\ell$ s'écrit $L^\top A = \lambda L^\top$, soit $A^\top L = \lambda L$ par transposition. Comme $L \neq 0$, H est stable si et seulement si L est vecteur propre de $A^\top$.
- On a $\chi_{A^\top} = \chi_A = (X - 2)(X^2 + 1)$, d'après l'exercice 9. La seule valeur propre réelle de $A^\top$ est donc 2. On résout $(A^\top - 2I_3)L = 0$: $-3l_1 + 2l_2 + l_3 = 0$ et $-l_1 - l_2 + 2l_3 = 0$. La seconde équation donne $l_1 = 2l_3 - l_2$, puis la première devient $5l_2 - 5l_3 = 0$. Donc $L \in \text{Vect}((1, 1, 1))$. **Le seul plan stable est le plan** $x + y + z = 0$. Les droites stables sont dirigées par des vecteurs propres de A . Or $E_2(A) = \text{Vect}(e_3)$. **La seule droite stable est donc** $\text{Vect}(e_3)$.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème, matrice de permutation circulaire

- La i -ème ligne de C n'a qu'un coefficient non nul, en colonne $i + 1$ pour $i < n$ et en colonne 1 pour $i = n$. Donc $Cx = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)^\top$: C décale cycliquement les coordonnées. En appliquant n fois ce décalage, on revient au vecteur de départ. **Donc** $C^n = I_n$.
- La j -ème coordonnée de v_k est $\omega^{(j-1)k}$. Pour $i < n$, la i -ème coordonnée de Cv_k vaut $\omega^{ik} = \omega^k \cdot \omega^{(i-1)k}$. Pour $i = n$, elle vaut $1 = \omega^{nk} = \omega^k \cdot \omega^{(n-1)k}$, car $\omega^n = 1$. **Donc** $Cv_k = \omega^k v_k$, avec $v_k \neq 0$ puisque sa première coordonnée vaut 1.
- Les nombres ω^k , $0 \leq k \leq n - 1$, sont deux à deux distincts. Les v_k sont donc des

vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes : la famille est libre. Elle compte n vecteurs, donc $(v_0, \dots, v_{n-1})$ **est une base de** $\mathbb{C}^n$. Ensuite, χ_C est unitaire de degré n et admet les n racines distinctes ω^k . Donc $\chi_C = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k)$, soit $\chi_C = X^n - 1$. Enfin, chaque valeur propre est simple, donc **chaque sous-espace propre est une droite** : $E_{\omega^k}(C) = \text{Vect}(v_k)$.

Questions 4 à 5

4. D'après l'exercice 4, $Cv_k = \omega^k v_k$ entraîne $Q(C)v_k = Q(\omega^k)v_k$. **Donc** $Mv_k = Q(\omega^k)v_k$. Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_k) . Alors $P^{-1}MP = \text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$. Deux matrices semblables ont le même déterminant. **Ainsi**, $\det M = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)$.

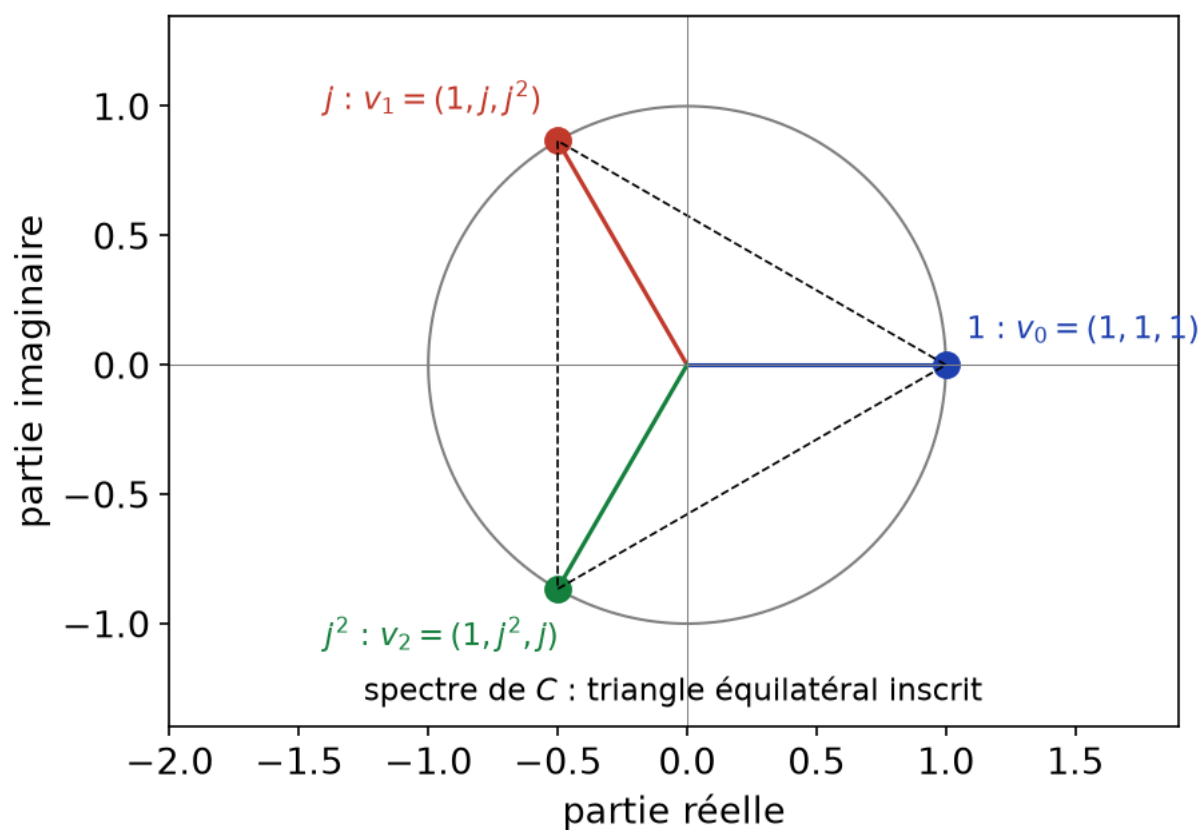
5. Pour $n = 3$, on a $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}. \text{ D'une part, la règle de Sarrus donne}$$

$$\det M = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

D'autre part, avec $Q = a + bX + cX^2$ et $\omega = j$, la question 4 donne

$\det M = Q(1)Q(j)Q(j^2)$. Or $j^4 = j$, donc $Q(j^2) = a + bj^2 + cj$. **Par conséquent**, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$. La figure place les trois valeurs propres $1, j, j^2$ de C , sommets d'un triangle équilatéral.



[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [éléments propres, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur éléments propres](#)
- Chapitre précédent : [Anneaux, idéaux, \$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\$ et algèbres](#)
- Chapitre suivant : [Diagonalisation, trigonalisation et nilpotence](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)