

Dimension finie

Exercice 1 : Base et dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + 2z = 0\}$.

1. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminez une base de F et sa dimension.
3. Vérifiez que $w = (3, 1, -1, -3)$ appartient à F et donnez ses coordonnées dans la base trouvée.

Exercice 2 : Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.

1. Montrez que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ en ne vérifiant qu'une seule propriété.
2. Déterminez les coordonnées d'un vecteur quelconque (x, y, z) dans cette base.
3. On remplace u_3 par $u'_3 = (0, 1, -1)$. La famille (u_1, u_2, u'_3) est-elle encore une base ? Quel est son rang ?

Exercice 3 : Rang d'une famille de quatre vecteurs

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère $v_1 = (1, 2, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, -1, -1, 1)$ et $v_4 = (3, 3, 1, 1)$.

1. Exprimez v_3 et v_4 en fonction de v_1 et v_2 .
2. Déduisez-en le rang de la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) et une base de $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.
3. Déterminez deux équations linéaires qui caractérisent V .

Exercice 4 : Compléter une famille libre de $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) , on pose $u_1 = (1, 2, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 0, 1, 1)$.

1. Montrez que (u_1, u_2) est libre.
2. La famille (u_1, u_2, e_3, e_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
3. Montrez que (u_1, u_2, e_1, e_3) est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Quel théorème du cours garantissait l'existence d'un tel complément ?

Exercice 5 : Égalité de deux sous-espaces par la dimension

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}((1, 2, 3), (2, 3, 4))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$.

1. Déterminez la dimension de F et celle de G .
2. Montrez que $F = G$ sans résoudre de système.

Exercice 6 : Bases de polynômes à degrés échelonnés

1. Montrez que $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminez les coordonnées de X^3 dans la base $\mathcal{B}$.
3. Plus généralement, justifiez que les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathcal{B}$ sont $\left(P(1), P'(1), \frac{P''(1)}{2}, \frac{P'''(1)}{6}\right)$.
4. Montrez que $\mathcal{C} = (1, X, X(X - 1), X(X - 1)(X - 2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, puis décomposez X^3 dans $\mathcal{C}$.

Exercice 7 : Dimension d'un produit d'espaces

On pose $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_2[X]$ et $H = \{((a, b), P) \in E : P(0) = a \text{ et } P(1) = b\}$.

1. Donnez la dimension de E et une base de E .
2. Montrez que H est un sous-espace vectoriel de E .
3. Déterminez une base de H et sa dimension.

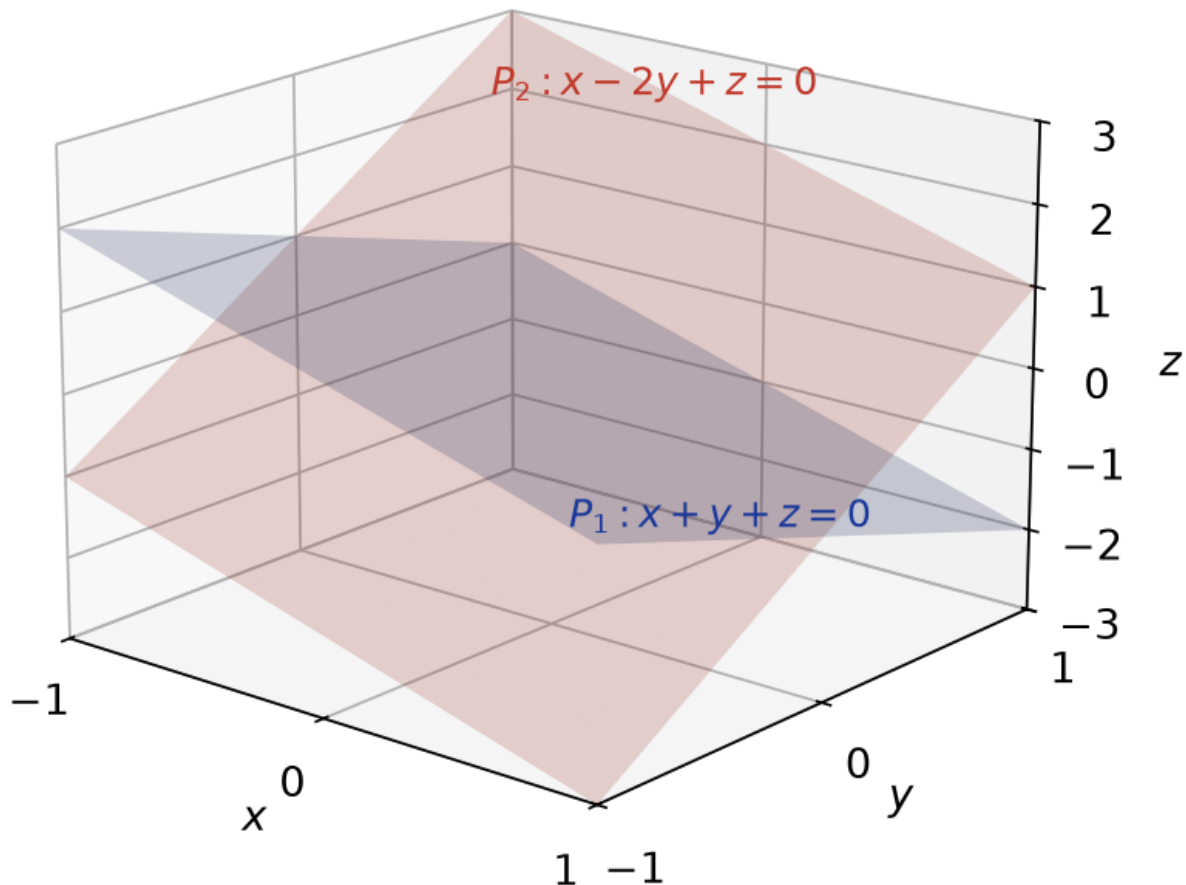
Exercice 8 : Rang d'une famille à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 1, m)$, $v = (1, m, 1)$ et $w = (m, 1, 1)$.

1. Écrivez le système traduisant $a u + b v + c w = 0$, et montrez que $(m-1)(b-c) = 0$ et $(m-1)(a-b) = 0$.
2. Déterminez, selon la valeur de m , le rang de la famille (u, v, w) .
3. Pour quelles valeurs de m la famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 9 : Deux plans de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les plans P_1 d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 d'équation $x - 2y + z = 0$, représentés ci-dessous.



1. Justifiez que P_1 et P_2 sont de dimension 2 et qu'ils sont distincts.
2. Sans calcul, déterminez $\dim(P_1 + P_2)$ puis $\dim(P_1 \cap P_2)$.
3. Déterminez une base de $P_1 \cap P_2$.
4. Dans $\mathbb{R}^4$, donnez un exemple de deux plans dont l'intersection est $\{0\}$. Pourquoi est-ce impossible dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 : Formule de Grassmann dans $\mathbb{R}^4$

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$, $g_1 = (0, 0, 1, 1)$ et $g_2 = (1, 0, 0, 1)$. On note $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ et $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$.

1. Donnez $\dim F$ et $\dim G$.
2. Montrez que $f_1 - f_2 + g_1 - g_2 = 0$, puis déterminez le rang de (f_1, f_2, g_1, g_2) .
3. Dédisez-en $\dim(F + G)$ et $\dim(F \cap G)$, puis une base de $F \cap G$.
4. Montrez que $F + G$ est l'hyperplan d'équation $x - y + z - t = 0$.

Exercice 11 : Matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires

Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{T}_n$ les sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formés respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures.

1. Déterminez une base et la dimension de $\mathcal{S}_n$, de $\mathcal{A}_n$ et de $\mathcal{T}_n$.
2. Montrez que $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$ et déduisez-en, par un argument de dimension, que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

3. Déterminez $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{T}_n$, puis montrez que $\mathcal{S}_n + \mathcal{T}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette somme est-elle directe ?

Exercice 12 : Un supplémentaire dans l'espace des polynômes de degré au plus 3

Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \{P \in E : P(1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}(X^2 + 1)$.

1. Montrez que F est un sous-espace de E et que $(X - 1, X(X - 1), X^2(X - 1))$ en est une base.
2. Montrez que $E = F \oplus G$.
3. Décomposez X^3 selon cette somme directe.
4. La droite $\text{Vect}(X - 1)$ est-elle un supplémentaire de F ? Et la droite $\text{Vect}(X)$?

Exercice 13 : Hyperplan et droite supplémentaires

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $H = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ et $a = (1, 1, 1)$.

1. Justifiez que H est un plan, puis montrez que $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}a$.
2. Décomposez un vecteur (x, y, z) quelconque selon cette somme directe. Appliquez au vecteur $v = (2, 1, 0)$.
3. Parmi les vecteurs $b = (1, -1, 0)$ et $c = (1, 0, 0)$, lesquels engendrent une droite supplémentaire de H ?

Exercice 14 : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $L_{-1} = \frac{X(X-1)}{2}$, $L_0 = 1 - X^2$ et $L_1 = \frac{X(X+1)}{2}$.

1. Calculez $L_i(j)$ pour $i, j \in \{-1, 0, 1\}$.
2. Montrez que (L_{-1}, L_0, L_1) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrez que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $P = P(-1)L_{-1} + P(0)L_0 + P(1)L_1$.
Vérifiez-le pour $P = X^2 + X + 1$.
4. Déterminez l'unique polynôme P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 2$, $P(0) = -1$ et $P(1) = 4$.

Exercice 15 : Base adaptée à une somme directe dans les matrices carrées d'ordre 2

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

puis $F_1 = \text{Vect}(I_2)$, $F_2 = \text{Vect}(D, S)$ et $F_3 = \text{Vect}(J)$.

1. Montrez que la famille (I_2, D, S, J) est libre.
2. Dédisez-en que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ et que (I_2, D, S, J) est une base adaptée à cette décomposition.
3. Décomposez $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ selon cette somme directe.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère trois droites distinctes D_1, D_2, D_3 . Montrez que $D_i \cap D_j = \{0\}$ pour $i \neq j$, mais que la somme $D_1 + D_2 + D_3$ n'est pas directe.

Exercice 16 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout

$n \in \mathbb{N}$.

1. Montrez que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2.
2. Montrez que les suites (2^n) et $((-1)^n)$ forment une base de $\mathcal{S}$.
3. Déterminez le terme général de la suite $u \in \mathcal{S}$ telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
4. Déterminez les suites de $\mathcal{S}$ qui sont bornées. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?

Exercice 17 : Équation différentielle linéaire d'ordre 2

On considère l'équation $(E): y'' + y' - 2y = 0$, d'inconnue y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions.

1. Rappelez la dimension de $\mathcal{S}$ et montrez que $(x \rightarrow e^x, x \rightarrow e^{-2x})$ est une base de $\mathcal{S}$.
2. Déterminez la solution y telle que $y(0) = 3$ et $y'(0) = 0$. Étudiez ses variations.
3. Montrez que les solutions nulles en 0 forment une droite vectorielle, dont vous donnerez une base.
4. Montrez que $(e^x + e^{-2x}, e^x - e^{-2x})$ est une autre base de $\mathcal{S}$.

Exercice 18 : Espaces qui ne sont pas de dimension finie

1. Montrez que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.
2. Montrez qu'un espace qui contient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une famille libre de n vecteurs n'est pas de dimension finie.
3. Dédisez-en que l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues n'est pas de dimension finie.
4. Montrez que l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles n'est pas de dimension finie.

Exercice 19 : Intersection d'hyperplans

Soit E un espace de dimension $n \geq 1$. On appelle ici hyperplan de E tout sous-espace de dimension $n - 1$.

1. Soit A un sous-espace de E et H un hyperplan. Montrez que $\dim(A \cap H) \geq \dim A - 1$.
2. Soit $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E . Montrez que $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq n - p$.
3. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on pose $H_a = \{P : P(a) = 0\}$. Montrez que H_a est un hyperplan, en exhibant une base.
4. Déterminez une base et la dimension de $H_0 \cap H_1 \cap H_2$. Comparez avec la minoration de la question 2.

Exercice 20 : Intersection de trois sous-espaces

Soit E un espace de dimension n , et F, G, K trois sous-espaces de E .

1. Montrez que $\dim(F \cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.
2. Montrez que $\dim(F \cap G \cap K) \geq \dim F + \dim G + \dim K - 2n$.
3. Dans $\mathbb{R}^5$, trois sous-espaces sont de dimension 4. Montrez que leur intersection contient un plan.
4. Donnez un exemple dans $\mathbb{R}^3$ de trois plans dont l'intersection est exactement une droite, puis un exemple où c'est un plan. L'inégalité de la question 2 est-elle optimale ?

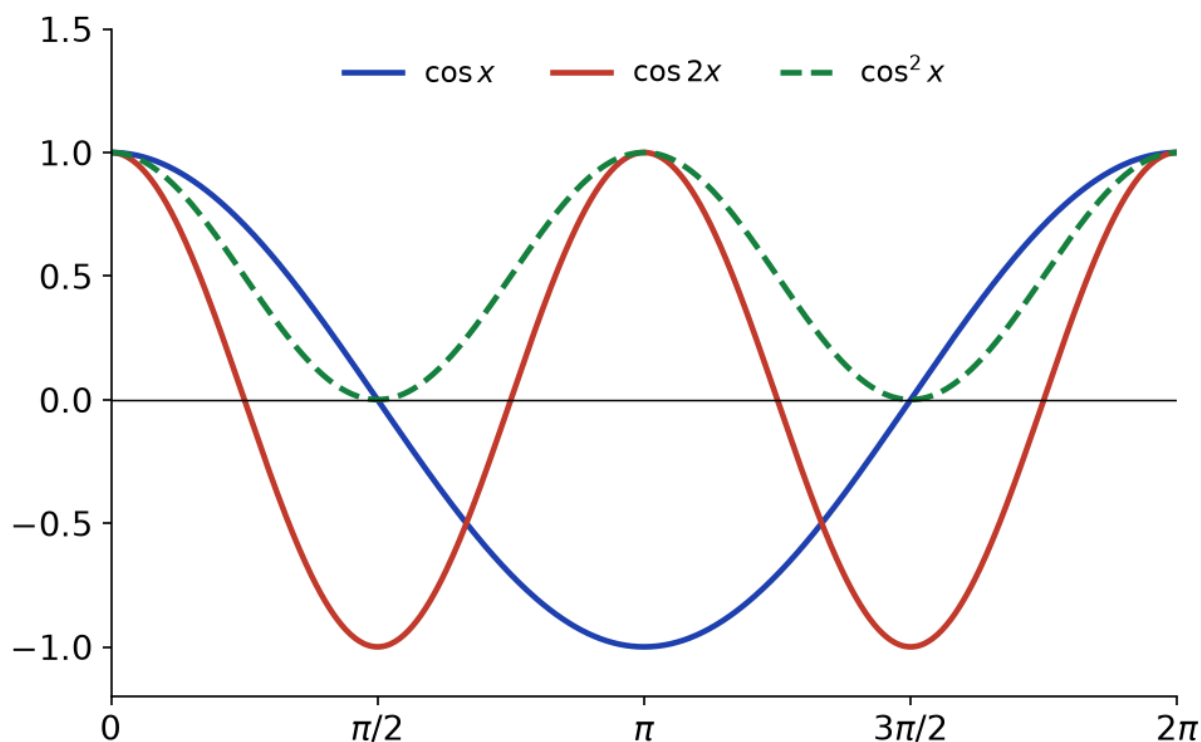
Exercice 21 : Supplémentaire commun à deux sous-espaces

Soit E un espace de dimension n , et F, G deux sous-espaces de même dimension p .

1. Soit F' et G' deux sous-espaces de E , tous deux différents de E . Montrez que $F' \cup G' \neq E$. On pourra distinguer le cas où l'un est inclus dans l'autre.
2. On suppose $p < n$. Montrez qu'il existe $x \in E$ tel que $F \cap \mathbb{R}x = G \cap \mathbb{R}x = \{0\}$, avec x non nul. Que valent $\dim(F \oplus \mathbb{R}x)$ et $\dim(G \oplus \mathbb{R}x)$?
3. Montrez par récurrence descendante sur p que F et G admettent un supplémentaire commun.
4. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminez un supplémentaire commun aux droites $\mathbb{R}(1, 0)$ et $\mathbb{R}(0, 1)$.

Exercice 22 : Polynômes en cosinus

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $c_k: x \rightarrow \cos(kx)$ et $p_k: x \rightarrow \cos^k x$, puis $V = \text{Vect}(c_0, \dots, c_n)$ et $W = \text{Vect}(p_0, \dots, p_n)$. La figure ci-dessous représente c_1 , c_2 et p_2 .



1. Calculez $\int_0^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx$ pour $k, l \in \mathbb{N}$.
2. Dédisez-en que $(c_0, \dots, c_n)$ est libre et donnez $\dim V$.
3. Montrez par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, c_k s'écrit $\sum_{j=0}^k a_j p_j$ avec $a_k = 2^{k-1}$.
On utilisera $\cos((k+1)x) + \cos((k-1)x) = 2 \cos x \cos(kx)$.
4. Montrez que $V = W$ et que $(p_0, \dots, p_n)$ est une base de W .
5. Exprimez p_2 et p_3 dans la base (c_0, c_1, c_2, c_3) de $\text{Vect}(c_0, \dots, c_3)$.

Exercice 23 : Problème, récurrence linéaire d'ordre 3

On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Partie A : dimension de $\mathcal{S}$.

1. Montrez que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. On note $\varepsilon^{(0)}, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ les suites de $\mathcal{S}$ dont les trois premiers termes sont respectivement $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Montrez que ces trois suites forment une base de $\mathcal{S}$. Que vaut $\dim \mathcal{S}$?

Partie B : une base explicite.

1. Factorisez $r^3 - 3r + 2$.
2. Montrez que les suites $a = (1), b = (n)$ et $c = ((-2)^n)$ appartiennent à $\mathcal{S}$.
3. Montrez que (a, b, c) est une base de $\mathcal{S}$.

Partie C : applications.

1. Déterminez le terme général de la suite $u \in \mathcal{S}$ telle que $u_0 = 0, u_1 = 0$ et $u_2 = 9$. Vérifiez votre formule sur u_3 et u_4 .
2. Déterminez le sous-espace $\mathcal{S}_b$ des suites bornées de $\mathcal{S}$ et sa dimension.
3. Déterminez les suites de $\mathcal{S}$ qui convergent vers 0.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [dimension finie, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels, familles libres et génératrices](#)
- Chapitre précédent : [Espaces vectoriels, familles libres et génératrices](#)
- Chapitre suivant : [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)