

Dimension finie

Corrigé de l'exercice 1 : Base et dimension d'un sous-espace de $\mathbb{R}^4$

1. Le vecteur nul vérifie les deux équations. De plus, si X et Y vérifient deux équations linéaires homogènes, alors $\lambda X + \mu Y$ les vérifie aussi. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. La seconde équation donne $x = y - 2z$. En reportant dans la première, on obtient $y - 2z + y + z + t = 0$, soit $t = -2y + z$. Ainsi

$$(x, y, z, t) = y(1, 1, 0, -2) + z(-2, 0, 1, 1).$$

La famille (f_1, f_2) , avec $f_1 = (1, 1, 0, -2)$ et $f_2 = (-2, 0, 1, 1)$, engendre donc F . Elle est libre, car les vecteurs ne sont pas colinéaires : leurs deuxièmes coordonnées valent 1 et 0, leurs troisièmes 0 et 1. Donc (f_1, f_2) est une base de F et $\dim F = 2$.

3. On vérifie : $3 + 1 - 1 - 3 = 0$ et $3 - 1 - 2 = 0$, donc $w \in F$. D'après la question précédente, ses coordonnées sont ses composantes $y = 1$ et $z = -1$. En effet, $f_1 - f_2 = (3, 1, -1, -3)$. Les coordonnées de w sont $(1, -1)$.

Point de méthode : résoudre le système en exprimant certaines inconnues en fonction des autres donne directement une famille génératrice, qu'il suffit ensuite de vérifier libre.

Corrigé de l'exercice 2 : Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

1. La famille compte trois vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

Supposons $a u_1 + b u_2 + c u_3 = 0$. On obtient $a + b = 0$, $a + c = 0$ et $b + c = 0$. Ainsi $b = -a$ et $c = -a$, puis $b + c = -2a = 0$. Donc $a = b = c = 0$. **La famille est libre, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.**

2. On cherche a, b, c avec $a + b = x$, $a + c = y$, $b + c = z$. En additionnant, $a + b + c = \frac{x + y + z}{2}$. On retranche ensuite chaque équation :

$$a = \frac{x + y - z}{2}, \quad b = \frac{x - y + z}{2}, \quad c = \frac{-x + y + z}{2}.$$

Ce sont les coordonnées de (x, y, z) dans la base (u_1, u_2, u_3) .

3. On remarque que $u_1 - u_2 = (0, 1, -1) = u'_3$. La famille est donc liée, et ce n'est pas une base. Par ailleurs, u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires. Ainsi $\text{Vect}(u_1, u_2, u'_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$ est de dimension 2. **Le rang vaut 2.**

Corrigé de l'exercice 3 : Rang d'une famille de quatre vecteurs

1. On calcule $v_2 - v_1 = (1, -1, -1, 1) = v_3$ et $v_1 + v_2 = (3, 3, 1, 1) = v_4$. **Donc $v_3 = v_2 - v_1$ et $v_4 = v_1 + v_2$.**
2. Ainsi $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$. De plus, v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires : la troisième coordonnée de v_1 vaut 1 et celle de v_2 vaut 0, tandis que la quatrième vaut 0 et 1. **Le rang vaut 2 et (v_1, v_2) est une base de V .**
3. Un vecteur de V s'écrit $a v_1 + b v_2 = (a + 2b, 2a + b, a, b)$. Donc $z = a$, $t = b$, puis $x = z + 2t$ et $y = 2z + t$. Réciproquement, un vecteur vérifiant ces deux relations s'écrit $z v_1 + t v_2$. **Donc V est défini par $x - z - 2t = 0$ et $y - 2z - t = 0$.** On vérifie sur v_1 : $1 - 1 - 0 = 0$ et $2 - 2 - 0 = 0$.

Corrigé de l'exercice 4 : Compléter une famille libre de $\mathbb{R}^4$

1. Si $a u_1 + b u_2 = 0$, la première coordonnée donne $a = 0$, puis la quatrième donne $b = 0$. **La famille (u_1, u_2) est libre.**

2. Non. En effet, $u_2 = e_3 + e_4$, donc la famille (u_1, u_2, e_3, e_4) est liée. **Ce n'est pas une base.** Autrement dit, $\text{Vect}(u_1, u_2)$ et $\text{Vect}(e_3, e_4)$ ont en commun la droite engendrée par u_2 .
3. Supposons $a u_1 + b u_2 + c e_1 + d e_3 = 0$. Coordonnée par coordonnée : $a + c = 0$, $2a = 0$, $a + b + d = 0$, $b = 0$. On obtient $a = 0$, $b = 0$, puis $c = 0$ et $d = 0$. La famille est libre et compte 4 vecteurs en dimension 4. **C'est donc une base de $\mathbb{R}^4$.**
4. C'est le **théorème de la base incomplète** : toute famille libre se complète en une base avec des vecteurs d'une famille génératrice, ici la base canonique. La question 2 montre cependant que tous les choix ne conviennent pas.

Corrigé de l'exercice 5 : Égalité de deux sous-espaces par la dimension

1. Les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(2, 3, 4)$ ne sont pas colinéaires : le double du premier est $(2, 4, 6)$. Donc $\dim F = 2$. Ensuite, G est défini par une équation non triviale. On paramètre : $x = 2y - z$, donc $G = \text{Vect}((2, 1, 0), (-1, 0, 1))$, avec deux vecteurs non colinéaires. **Ainsi $\dim F = \dim G = 2$.**
2. On a $1 - 4 + 3 = 0$ et $2 - 6 + 4 = 0$. Donc les deux générateurs de F sont dans G , et $F \subset G$ puisque G est un sous-espace. Comme de plus $\dim F = \dim G$, **on conclut que $F = G$** , par le théorème sur la dimension d'un sous-espace.

Corrigé de l'exercice 6 : Bases de polynômes à degrés échelonnés

1. Les polynômes $(X - 1)^k$, pour $k = 0, \dots, 3$, sont de degrés 0, 1, 2, 3 deux à deux distincts. Une telle famille est libre, d'après le cours. Elle compte 4 vecteurs, et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$. **C'est donc une base.**
2. On écrit $X = (X - 1) + 1$ et on applique la formule du binôme :

$$X^3 = 1 + 3(X - 1) + 3(X - 1)^2 + (X - 1)^3.$$

Les coordonnées de X^3 sont $(1, 3, 3, 1)$.

3. Écrivons $P = a_0 + a_1(X - 1) + a_2(X - 1)^2 + a_3(X - 1)^3$. En évaluant en 1, on obtient $P(1) = a_0$. Ensuite, en dérivant k fois puis en évaluant en 1, seuls les termes de degré k subsistent : $P^{(k)}(1) = k! a_k$. **Donc** $a_k = \frac{P^{(k)}(1)}{k!}$, ce qui est la formule annoncée. On retrouve la question 2 : pour X^3 , on a $\frac{P''(1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
4. Les polynômes $1, X, X(X - 1), X(X - 1)(X - 2)$ sont de degrés $0, 1, 2, 3$. Pour la même raison, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On développe ensuite $X(X - 1)(X - 2) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Donc $X^3 = X(X - 1)(X - 2) + 3X^2 - 2X$. Or $3X^2 - 2X = 3X(X - 1) + X$. **Finalement** $X^3 = X(X - 1)(X - 2) + 3X(X - 1) + X$, de coordonnées $(0, 1, 3, 1)$.

Corrigé de l'exercice 7 : Dimension d'un produit d'espaces

1. D'après le cours, $\dim E = \dim \mathbb{R}^2 + \dim \mathbb{R}_2[X] = 2 + 3$. **Donc** $\dim E = 5$, et une base est $((1, 0), 0), ((0, 1), 0), ((0, 0), 1), ((0, 0), X), ((0, 0), X^2))$.
2. L'élément nul $((0, 0), 0)$ appartient à H . Si $((a, b), P)$ et $((a', b'), Q)$ sont dans H , alors $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda a + \mu a'$, et de même en 1. **Donc** H est un sous-espace de E .
3. Un élément de H est entièrement déterminé par P : il s'écrit $((P(0), P(1)), P)$. Avec $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, on a $P(0) = \alpha$ et $P(1) = \alpha + \beta + \gamma$. Ainsi H est engendré par $h_1 = ((1, 1), 1)$, $h_2 = ((0, 1), X)$ et $h_3 = ((0, 1), X^2)$. Cette famille est libre : une combinaison nulle donne $\alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0$ sur la seconde composante. **Donc** (h_1, h_2, h_3) est une base de H et $\dim H = 3$.

Corrigé de l'exercice 8 : Rang d'une famille à paramètre

1. L'égalité $a u + b v + c w = 0$ s'écrit

$$\begin{cases} a + b + m c = 0 \\ a + m b + c = 0 \\ m a + b + c = 0 \end{cases}$$

En retranchant la deuxième ligne à la première, on obtient $(1 - m)b + (m - 1)c = 0$, soit $(m - 1)(c - b) = 0$. De même, la deuxième moins la troisième donne $(1 - m)a + (m - 1)b = 0$. **Donc** $(m - 1)(b - c) = 0$ **et** $(m - 1)(a - b) = 0$.

2. Premier cas, $m = 1$: les trois vecteurs valent $(1, 1, 1)$. **Le rang vaut 1**.

Deuxième cas, $m \neq 1$: on obtient $a = b = c$, puis la première équation donne $(m + 2)a = 0$. Si de plus $m \neq -2$, alors $a = b = c = 0$: la famille est libre et **le rang vaut 3**.

Troisième cas, $m = -2$: on a $u + v + w = (m + 2)(1, 1, 1) = 0$, donc la famille est liée. Cependant $u = (1, 1, -2)$ et $v = (1, -2, 1)$ ne sont pas colinéaires. **Le rang vaut 2**.

3. Trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si leur rang vaut **3**. **C'est le cas exactement pour** $m \notin \{1, -2\}$.

Corrigé de l'exercice 9 : Deux plans de $\mathbb{R}^3$

1. Pour P_1 , on écrit $z = -x - y$, donc $P_1 = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$, de dimension 2. De même, $P_2 = \text{Vect}((1, 0, -1), (2, 1, 0))$ est de dimension 2. Enfin, $(0, 1, -1) \in P_1$ mais $0 - 2 - 1 = -3 \neq 0$, donc ce vecteur n'est pas dans P_2 . **Les plans sont distincts.**

2. On a $P_1 \subset P_1 + P_2$, et l'inclusion est stricte car $P_2 \not\subset P_1$. Donc $\dim(P_1 + P_2) > 2$, d'où $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$. La formule de Grassmann donne alors $\dim(P_1 \cap P_2) = 2 + 2 - 3$. **Ainsi** $\dim(P_1 + P_2) = 3$ **et** $\dim(P_1 \cap P_2) = 1$.

3. On résout le système. En soustrayant les deux équations, $3y = 0$, donc $y = 0$ et $z = -x$. **Une base de $P_1 \cap P_2$ est $((1, 0, -1))$.** On retrouve bien une droite.
4. Dans $\mathbb{R}^4$, les plans $\text{Vect}(e_1, e_2)$ et $\text{Vect}(e_3, e_4)$ ont pour intersection $\{0\}$. En revanche, dans $\mathbb{R}^3$, la somme de deux plans est de dimension au plus 3. Par Grassmann, $\dim(P \cap Q) \geq 2 + 2 - 3 = 1$. **Deux plans de $\mathbb{R}^3$ ont donc toujours au moins une droite en commun.**

Corrigé de l'exercice 10 : Formule de Grassmann dans $\mathbb{R}^4$

1. Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, de même que g_1 et g_2 . **Donc $\dim F = \dim G = 2$.**
2. On calcule $f_1 - f_2 = (1, 0, -1, 0)$ et $g_1 - g_2 = (-1, 0, 1, 0)$, dont la somme est nulle. La famille est donc liée, et son rang est au plus 3. Montrons que (f_1, f_2, g_1) est libre. Si $a f_1 + b f_2 + c g_1 = 0$, on obtient $(a, a + b, b + c, c) = 0$, donc $a = b = c = 0$. Comme $g_2 = f_1 - f_2 + g_1$, on a $\text{Vect}(f_1, f_2, g_1, g_2) = \text{Vect}(f_1, f_2, g_1)$. **Le rang vaut 3.**
3. Or $F + G = \text{Vect}(f_1, f_2, g_1, g_2)$, donc $\dim(F + G) = 3$. La formule de Grassmann donne $\dim(F \cap G) = 2 + 2 - 3 = 1$. Par ailleurs, la relation s'écrit $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Ce vecteur non nul $(1, 0, -1, 0)$ est dans F et dans G . **Donc $F \cap G = \text{Vect}((1, 0, -1, 0))$.**
4. Notons K l'hyperplan d'équation $x - y + z - t = 0$. On vérifie : f_1 donne $1 - 1 = 0$, f_2 donne $-1 + 1 = 0$, g_1 donne $1 - 1 = 0$, et g_2 donne $1 - 1 = 0$. Donc $F + G \subset K$. Or K est de dimension 3, car on peut paramétrer par y, z, t . **Les dimensions étant égales, $F + G = K$.**

Corrigé de l'exercice 11 : Matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires

1. Notons E_{ij} les matrices élémentaires. Une matrice symétrique s'écrit

$\sum_i m_{ii} E_{ii} + \sum_{i < j} m_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$. Ces matrices forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_n$, et elle est libre car les E_{ij} le sont. On compte $n + \frac{n(n-1)}{2}$ éléments. De même, $(E_{ij} - E_{ji})_{i < j}$ est une base de $\mathcal{A}_n$, car la diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle. Enfin, $(E_{ij})_{i \leq j}$ est une base de $\mathcal{T}_n$. **Ainsi** $\dim \mathcal{S}_n = \dim \mathcal{T}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

2. Si $M \in \mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n$, alors $M = M^T = -M$, donc $M = 0$. De plus, $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la caractérisation dimensionnelle, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
3. Une matrice symétrique et triangulaire supérieure a ses coefficients sous la diagonale nuls, donc aussi au-dessus par symétrie. **Ainsi** $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{T}_n$ est l'espace des matrices diagonales, de dimension n . Par Grassmann,

$$\dim(\mathcal{S}_n + \mathcal{T}_n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Donc $\mathcal{S}_n + \mathcal{T}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **Cependant, la somme n'est pas directe**, car l'intersection contient $I_n \neq 0$.

Corrigé de l'exercice 12 : Un supplémentaire dans l'espace des polynômes de degré au plus 3

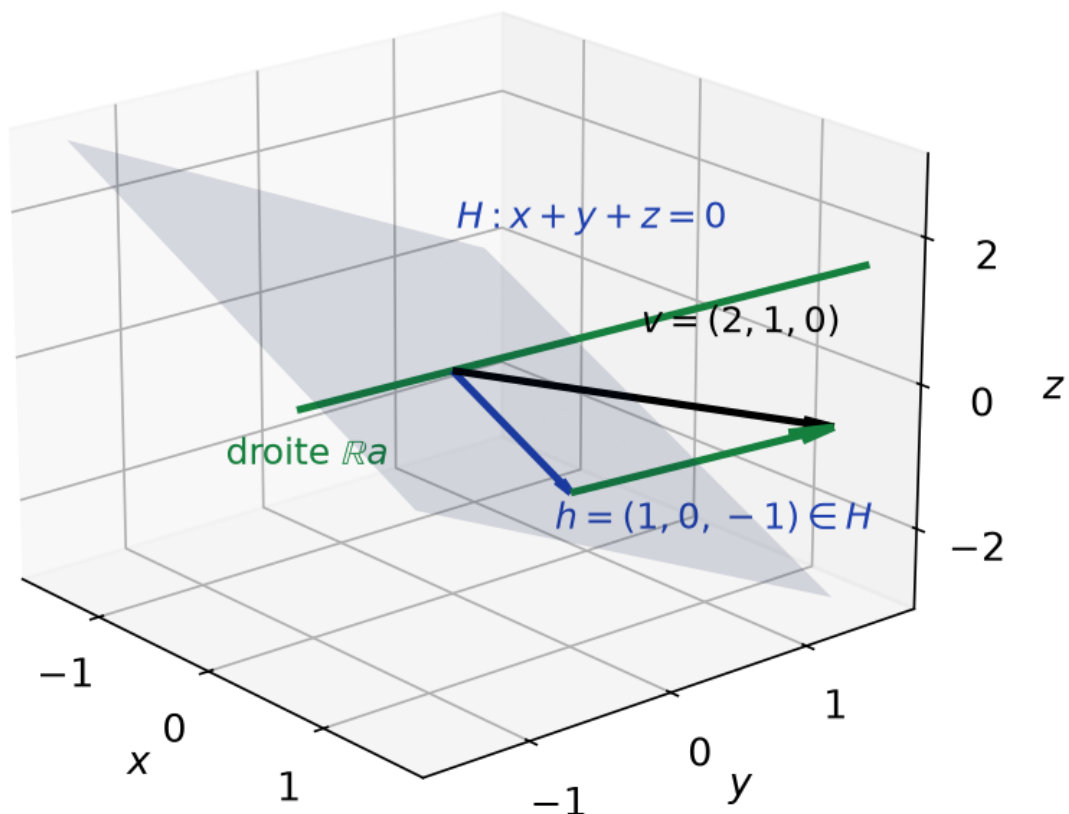
1. Le polynôme nul s'annule en 1, et une combinaison linéaire de polynômes nuls en 1 est nulle en 1. Donc F est un sous-espace. Ensuite, les trois polynômes proposés s'annulent en 1 et sont de degrés 1, 2, 3 : ils forment une famille libre de F , d'où $\dim F \geq 3$. Par ailleurs, $1 \notin F$, donc $F \neq E$ et $\dim F < 4$. **Ainsi** $\dim F = 3$, et la famille est une base de F .
2. Soit $P = a(X^2 + 1) \in F \cap G$. Alors $P(1) = 2a = 0$, donc $a = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$. De plus, $\dim F + \dim G = 3 + 1 = 4 = \dim E$. **Par la caractérisation dimensionnelle**, $E = F \oplus G$.
3. On cherche a tel que $X^3 - a(X^2 + 1) \in F$. La condition s'écrit $1 - 2a = 0$, soit $a = \frac{1}{2}$. **Donc** $X^3 = \left(X^3 - \frac{X^2+1}{2}\right) + \frac{X^2+1}{2}$, où le premier terme est dans F et le second dans G .
4. Non pour $\text{Vect}(X-1)$: ce polynôme s'annule en 1, donc la droite est incluse dans F et

$F \cap \text{Vect}(X - 1) \neq \{0\}$. En revanche, X vaut 1 en 1, donc $X \notin F$. Or F est un hyperplan de E . **Par conséquent, $\text{Vect}(X)$ est un supplémentaire de F .**

Corrigé de l'exercice 13 : Hyperplan et droite supplémentaires

- On a $H = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ en écrivant $x = -y - z$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim H = 2$. Ensuite, $1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$, donc $a \notin H$. Ainsi $H \cap \mathbb{R}a = \{0\}$ et $2 + 1 = 3$. **Donc $\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathbb{R}a$.**
- On cherche λ tel que $(x, y, z) - \lambda(1, 1, 1) \in H$. La condition est $x + y + z - 3\lambda = 0$. Posons $m = \frac{x + y + z}{3}$. **Alors $(x, y, z) = (x - m, y - m, z - m) + m(1, 1, 1)$.** Pour $v = (2, 1, 0)$, on trouve $m = 1$, donc $v = (1, 0, -1) + (1, 1, 1)$.

La figure ci-dessous montre cette décomposition : le vecteur $h = (1, 0, -1)$ est dans le plan H , et le vecteur $(1, 1, 1)$ sur la droite $\mathbb{R}a$.



3. Une droite $\mathbb{R}u$, avec $u \neq 0$, est supplémentaire de l'hyperplan H si et seulement si $u \notin H$. Or b vérifie $1 - 1 + 0 = 0$, donc $b \in H$. En revanche, c donne $1 \neq 0$. **Seul c engendre une droite supplémentaire de H .**

Corrigé de l'exercice 14 : Polynômes interpolateurs de Lagrange

1. On calcule $L_{-1}(-1) = \frac{(-1)(-2)}{2} = 1$, $L_{-1}(0) = 0$ et $L_{-1}(1) = 0$. Ensuite, $L_0(-1) = 0$, $L_0(0) = 1$ et $L_0(1) = 0$. Enfin, $L_1(-1) = 0$, $L_1(0) = 0$ et $L_1(1) = 1$. **Ainsi $L_i(j)$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.**

2. Supposons $\alpha L_{-1} + \beta L_0 + \gamma L_1 = 0$. En évaluant en -1 , en 0 et en 1 , la question 1 donne $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$. La famille est libre, et elle compte $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs. **C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.**

3. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Il s'écrit $P = \alpha L_{-1} + \beta L_0 + \gamma L_1$. En évaluant en -1 , on trouve $\alpha = P(-1)$. De même, $\beta = P(0)$ et $\gamma = P(1)$. **D'où la formule.** Pour $P = X^2 + X + 1$, on a $P(-1) = 1$, $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, et

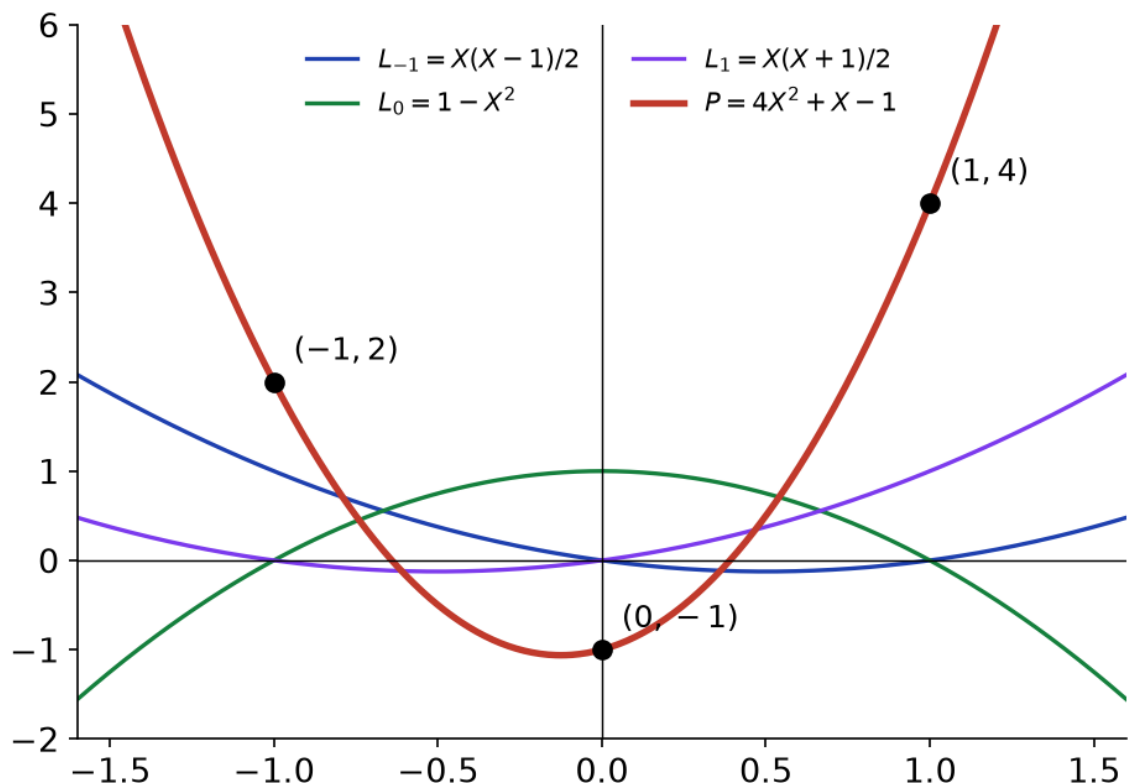
$$\frac{X^2 - X}{2} + (1 - X^2) + \frac{3X^2 + 3X}{2} = 2X^2 + X + 1 - X^2 = X^2 + X + 1.$$

4. Par la formule précédente, le polynôme cherché est unique, et vaut

$$P = 2L_{-1} - L_0 + 4L_1 = (X^2 - X) - (1 - X^2) + 2(X^2 + X).$$

Donc $P = 4X^2 + X - 1$. On vérifie : $P(-1) = 4 - 1 - 1 = 2$, $P(0) = -1$ et $P(1) = 4$.

La figure ci-dessous montre les trois polynômes de base et le polynôme P , qui passe par les trois points imposés.



Point de méthode : pour montrer qu'une famille de polynômes est libre, évaluer en des points bien choisis est souvent plus rapide que de comparer les coefficients.

Corrigé de l'exercice 15 : Base adaptée à une somme directe dans les matrices carrées d'ordre 2

1. On a

$$a I_2 + b D + c S + d J = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{pmatrix}.$$

Si cette matrice est nulle, alors $a+b = a-b = 0$ et $c+d = c-d = 0$. **Donc**
 $a = b = c = d = 0$, et la famille est libre.

2. La famille est libre et compte $4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vecteurs : c'est une base. Par conséquent, $F_1 + F_2 + F_3 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Or $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 = 1 + 2 + 1 = 4$. La somme a pour dimension la somme des dimensions, donc elle est directe. **Ainsi**
 $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$, et (I_2, D, S, J) concatène des bases de F_1, F_2, F_3 : c'est une base adaptée.

3. On résout $a+b = 1, a-b = 3, c+d = 2, c-d = 0$. On trouve $a = 2, b = -1, c = 1, d = 1$. **Donc** $M = 2I_2 + (-D + S) + J$, avec $2I_2 \in F_1, -D + S \in F_2$ et $J \in F_3$. On vérifie :
 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = M$.

4. Deux droites distinctes ont une intersection qui est un sous-espace strict d'une droite, donc de dimension 0. Ainsi $D_i \cap D_j = \{0\}$. Cependant, $D_1 + D_2 + D_3 \subset \mathbb{R}^2$ est de dimension au plus 2, alors que $1 + 1 + 1 = 3$. **La somme n'est donc pas directe.**

Corrigé de l'exercice 16 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

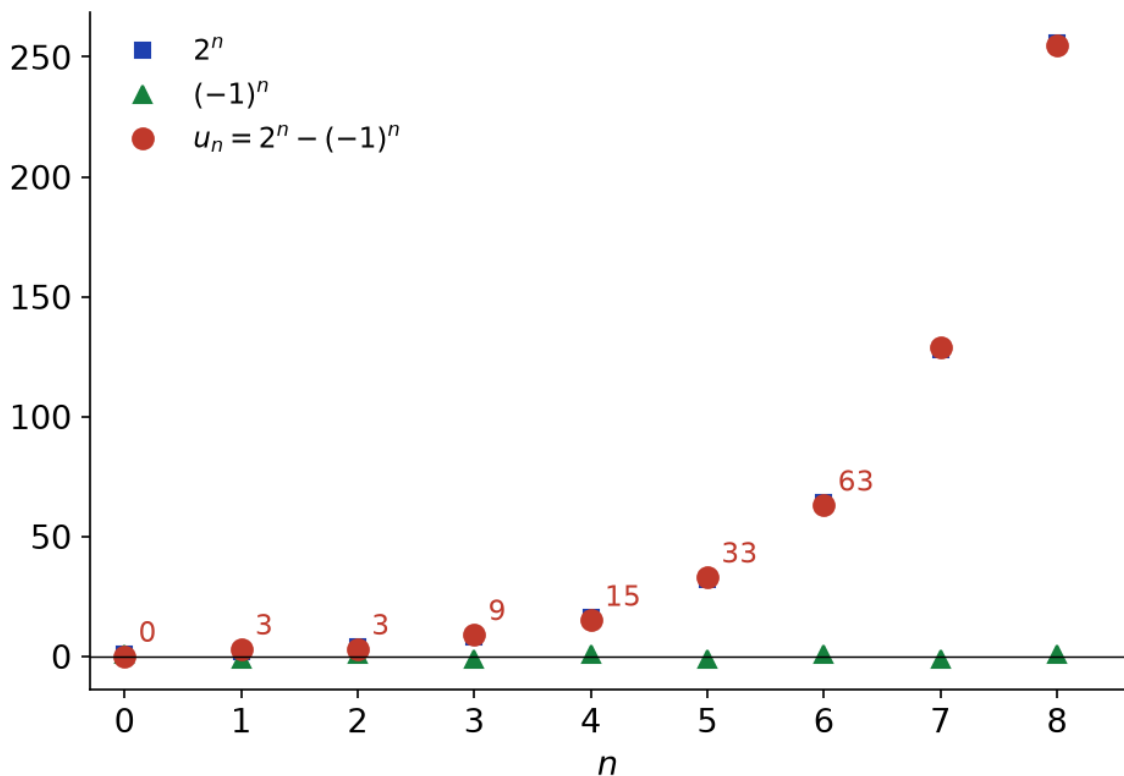
1. La suite nulle est dans S , et la relation est linéaire, donc S est stable par combinaison linéaire. Soit α la suite de S de premiers termes $(1, 0)$ et β celle de premiers termes $(0, 1)$. Pour $u \in S$, la suite $u_0 \alpha + u_1 \beta$ est dans S et a les mêmes deux premiers termes que u . Par récurrence double, elle est égale à u . Donc (α, β) engendre S . Elle est libre, car les deux

premiers termes d'une combinaison nulle donnent les coefficients. **Donc** $\dim S = 2$.

2. On a $2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n = 2^{n+2}$, et $(-1)^{n+1} + 2(-1)^n = (-1)^n = (-1)^{n+2}$. Les deux suites sont donc dans S . Leurs premiers termes $(1, 2)$ et $(1, -1)$ ne sont pas proportionnels, donc elles forment une famille libre. **Comme** $\dim S = 2$, **c'est une base de** S .

3. On écrit $u_n = \lambda 2^n + \mu(-1)^n$. Les conditions donnent $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda - \mu = 3$. Donc $3\lambda = 3$, $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. **Ainsi** $u_n = 2^n - (-1)^n$. On vérifie : $u_2 = 3 + 0 = 3$ et $4 - 1 = 3$; $u_3 = 3 + 6 = 9$ et $8 + 1 = 9$.

La figure ci-dessous représente les premiers termes : la suite suit de près 2^n , la partie $(-1)^n$ restant bornée.



4. Soit $u = \lambda(2^n) + \mu((-1)^n)$. Si $\lambda \neq 0$, alors $|u_n| \geq |\lambda| 2^n - |\mu|$, qui tend vers $+\infty$. La suite n'est donc pas bornée. Réciproquement, si $\lambda = 0$, la suite $\mu(-1)^n$ est bornée. **Les suites bornées de S forment la droite $\text{Vect}((-1)^n)$, de dimension 1.**

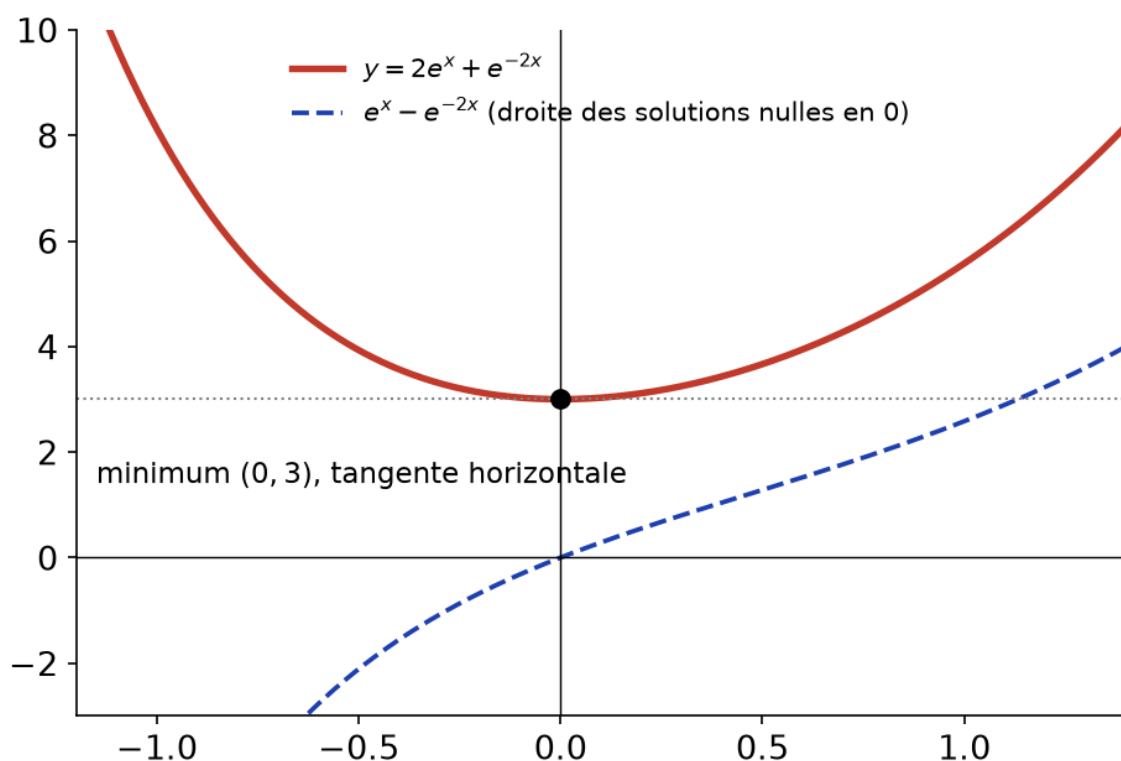
Corrigé de l'exercice 17 : Équation différentielle linéaire d'ordre 2

1. D'après le cours, S est un espace vectoriel de dimension 2. L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ se factorise en $(r - 1)(r + 2) = 0$. Donc $x \rightarrow e^x$ et $x \rightarrow e^{-2x}$ sont solutions. Elles ne sont pas proportionnelles : si $\lambda e^x + \mu e^{-2x} = 0$, l'évaluation en 0 donne $\lambda + \mu = 0$, et la dérivée en 0 donne $\lambda - 2\mu = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$. **C'est une famille libre de deux vecteurs en dimension 2, donc une base de S .**
2. On écrit $y = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$. Les conditions donnent $\lambda + \mu = 3$ et $\lambda - 2\mu = 0$. Donc $\lambda = 2\mu$, $3\mu = 3$, $\mu = 1$, $\lambda = 2$. **La solution est $y(x) = 2e^x + e^{-2x}$.** Sa dérivée vaut

$$y'(x) = 2e^x - 2e^{-2x} = 2e^{-2x}(e^{3x} - 1),$$

qui a le signe de x . **Donc y décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, et admet un minimum égal à 3 en 0.**

La figure ci-dessous confirme cette étude : la courbe admet une tangente horizontale au point $(0, 3)$.



3. Une solution $\lambda e^x + \mu e^{-2x}$ est nulle en 0 si et seulement si $\lambda + \mu = 0$. Ces solutions s'écrivent donc $\lambda(e^x - e^{-2x})$. **Elles forment la droite vectorielle engendrée par $x \rightarrow e^x - e^{-2x}$.**
4. On a $\alpha(e^x + e^{-2x}) + \beta(e^x - e^{-2x}) = (\alpha + \beta)e^x + (\alpha - \beta)e^{-2x}$. Si c'est nul, la liberté de (e^x, e^{-2x}) donne $\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. **Cette famille libre de deux solutions est une base de S .**

Corrigé de l'exercice 18 : Espaces qui ne sont pas de dimension finie

1. Supposons que $\mathbb{R}[X]$ soit engendré par $P_1, \dots, P_m$. Posons $d = \max \deg P_i$. Toute combinaison linéaire des P_i est alors de degré au plus d . Or X^{d+1} est de degré $d+1$. C'est absurde. **Donc $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.**
2. Si l'espace était de dimension finie N , toute famille libre aurait au plus N éléments, d'après le lemme fondamental. Or il contient une famille libre de $N+1$ vecteurs. **C'est absurde, donc l'espace est de dimension infinie.**
3. Pour tout n , les fonctions $x \rightarrow x^k$, $k = 0, \dots, n-1$, sont continues. Elles forment une famille libre, car un polynôme qui s'annule sur $\mathbb{R}$ est nul. **Par la question 2, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.**
4. Notons $\delta^{(k)}$ la suite dont le terme d'indice k vaut 1 et les autres 0. Pour tout n , la famille $(\delta^{(0)}, \dots, \delta^{(n-1)})$ est libre : le terme d'indice k d'une combinaison nulle donne le k -ième coefficient. **Donc $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.**

Corrigé de l'exercice 19 : Intersection d'hyperplans

1. La formule de Grassmann donne $\dim(A \cap H) = \dim A + \dim H - \dim(A + H)$. Or $\dim H = n-1$ et $\dim(A + H) \leq n$. **Donc $\dim(A \cap H) \geq \dim A + (n-1) - n = \dim A - 1$.**

2. On raisonne par récurrence sur p . Pour $p = 1$, on a $\dim H_1 = n - 1$. Supposons le résultat vrai au rang $p - 1$. On applique la question 1 avec $A = H_1 \cap \dots \cap H_{p-1}$ et $H = H_p$:

$$\dim(A \cap H_p) \geq \dim A - 1 \geq n - (p - 1) - 1 = n - p.$$

Le résultat est donc vrai pour tout p .

3. L'ensemble H_α est un sous-espace, car l'évaluation en α est linéaire. Les polynômes $(X - \alpha)X^k$, pour $k = 0, \dots, 3$, sont dans H_α et de degrés 1, 2, 3, 4 : ils sont libres, d'où $\dim H_\alpha \geq 4$. De plus, $1 \notin H_\alpha$, donc $H_\alpha \neq \mathbb{R}_4[X]$ et $\dim H_\alpha < 5$. **Ainsi $\dim H_\alpha = 4$: c'est un hyperplan de base $((X - \alpha)X^k)_{0 \leq k \leq 3}$.**
4. Un polynôme qui s'annule en 0, 1 et 2, trois racines distinctes, est divisible par $X(X - 1)(X - 2)$. Pour un degré au plus 4, le quotient est de degré au plus 1. Donc $H_0 \cap H_1 \cap H_2 = \{X(X - 1)(X - 2)(\alpha + \beta X)\}$. **Une base est $(X(X - 1)(X - 2), X^2(X - 1)(X - 2))$, et la dimension vaut 2.** La question 2 donnait $\dim \geq 5 - 3 = 2$: la minoration est ici atteinte.

Point de méthode : chaque condition linéaire indépendante fait perdre au plus une dimension ; la formule de Grassmann rend ce principe rigoureux.

Corrigé de l'exercice 20 : Intersection de trois sous-espaces

1. Par la formule de Grassmann, $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$. Comme $F + G \subset E$, on a $\dim(F + G) \leq n$. **Donc $\dim(F \cap G) \geq \dim F + \dim G - n$.**
2. On applique la question 1 aux sous-espaces $F \cap G$ et K :
- $$\dim(F \cap G \cap K) \geq \dim(F \cap G) + \dim K - n \geq \dim F + \dim G - n + \dim K - n.$$
- D'où $\dim(F \cap G \cap K) \geq \dim F + \dim G + \dim K - 2n$.**
3. Ici, $n = 5$ et les trois dimensions valent 4. On obtient $\dim(F \cap G \cap K) \geq 12 - 10 = 2$. **L'intersection contient donc un plan.**
4. Les plans d'équations $z = 0$, $y = 0$ et $y = z$ contiennent tous l'axe $\mathbb{R}e_1$. Les deux premiers se coupent exactement selon cet axe. **L'intersection des trois est donc la droite $\mathbb{R}e_1$.** Si l'on prend trois fois le même plan, l'intersection est ce plan. Enfin, la minoration vaut ici $6 - 6 = 0$. Les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ont pour intersection $\{0\}$. **L'inégalité est**

donc optimale.

Corrigé de l'exercice 21 : Supplémentaire commun à deux sous-espaces

1. Si $F' \subset G'$, alors $F' \cup G' = G' \neq E$. Il en va de même si $G' \subset F'$. Sinon, il existe $x \in F' \setminus G'$ et $y \in G' \setminus F'$. Si $x + y \in F'$, alors $y = (x + y) - x \in F'$, ce qui est exclu. De même, $x + y \in G'$ entraînerait $x \in G'$. **Donc $x + y \notin F' \cup G'$, et $F' \cup G' \neq E$.**
2. Comme $p < n$, on a $F \neq E$ et $G \neq E$. La question 1 fournit $x \notin F \cup G$, et $x \neq 0$ car $0 \in F$. Si $\lambda x \in F$ avec $\lambda \neq 0$, alors $x \in F$: c'est exclu. Donc $F \cap \mathbb{R}x = \{0\}$, et de même pour G . **Les sommes $F \oplus \mathbb{R}x$ et $G \oplus \mathbb{R}x$ sont directes et de dimension $p + 1$.**

3. On montre, par récurrence descendante sur p de n à 0 , que deux sous-espaces de dimension p ont un supplémentaire commun. Si $p = n$, alors $F = G = E$, et $\{0\}$ convient.

Supposons le résultat vrai en dimension $p + 1$, avec $p < n$. On pose $F' = F \oplus \mathbb{R}x$ et $G' = G \oplus \mathbb{R}x$, avec x donné par la question 2. Par hypothèse, ils ont un supplémentaire commun H' , de dimension $n - p - 1$. Comme $x \in F'$, on a $\mathbb{R}x \cap H' = \{0\}$. On pose donc $H = H' \oplus \mathbb{R}x$, de dimension $n - p$.

Ensuite, $F + H = F + \mathbb{R}x + H' = F' + H' = E$. De plus, $\dim F + \dim H = p + (n - p) = n$. Par la caractérisation dimensionnelle, $E = F \oplus H$. Le même raisonnement donne $E = G \oplus H$. **Ainsi H est un supplémentaire commun à F et G .**

4. Le vecteur $(1, 1)$ n'appartient à aucune des deux droites. Une droite non contenue dans une droite de $\mathbb{R}^2$ en est un supplémentaire, car $1 + 1 = 2$. **La droite $\mathbb{R}(1, 1)$ est un supplémentaire commun.**

Point de méthode : pour construire un objet en dimension finie, on peut ajouter les vecteurs un par un et raisonner par récurrence sur la dimension manquante.

Corrigé de l'exercice 22 : Polynômes en cosinus

- On linéarise : $\cos(kx)\cos(lx) = \frac{1}{2}(\cos((k-l)x) + \cos((k+l)x))$. Pour un entier $m \neq 0$, on a $\int_0^\pi \cos(mx) dx = \frac{\sin(m\pi)}{m} = 0$. Ainsi, **l'intégrale vaut 0 si $k \neq l$, $\frac{\pi}{2}$ si $k = l \geq 1$, et π si $k = l = 0$.**
- Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k c_k = 0$. On multiplie par c_l et on intègre sur $[0, \pi]$. Par la question 1, seul le terme d'indice l subsiste : $\lambda_l \int_0^\pi c_l^2 = 0$. Cette intégrale est strictement positive, donc $\lambda_l = 0$. **La famille est libre et $\dim V = n + 1$.**
- Pour $k = 1$, on a $c_1 = p_1$, avec $a_1 = 1 = 2^0$. Pour $k = 2$, on a $c_2 = 2p_2 - p_0$, avec $a_2 = 2$. Supposons la propriété vraie aux rangs $k-1$ et k , avec $k \geq 2$. La formule rappelée donne $c_{k+1} = 2p_1 c_k - c_{k-1}$. Or $p_1 p_j = p_{j+1}$, donc $2p_1 c_k$ est combinaison de $p_1, \dots, p_{k+1}$, avec le coefficient $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ devant p_{k+1} . Enfin, c_{k-1} ne fait intervenir que $p_0, \dots, p_{k-1}$. **La propriété est donc vraie au rang $k+1$, avec $a_{k+1} = 2^k$.**
- La question 3, avec $c_0 = p_0$, montre que chaque c_k est dans W . Donc $V \subset W$. Par ailleurs, W est engendré par $n+1$ vecteurs, donc $\dim W \leq n+1 = \dim V$. Avec l'inclusion, on obtient $\dim W = n+1$ et $V = W$. Enfin, $(p_0, \dots, p_n)$ engendre W et compte $n+1 = \dim W$ vecteurs. **C'est donc une base de W .**
- On a $c_2 = 2p_2 - p_0$, donc $p_2 = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_2$. Ensuite, $c_3 = 2p_1 c_2 - c_1 = 4p_3 - 2p_1 - p_1 = 4p_3 - 3p_1$. **Donc $p_3 = \frac{3}{4}c_1 + \frac{1}{4}c_3$, c'est-à-dire $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$.** La figure de l'énoncé illustre la première relation : $\cos^2 x$ oscille entre 0 et 1 autour de la valeur moyenne $\frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 23 : Problème, récurrence linéaire d'ordre 3

Partie A.

1. La suite nulle appartient à S . De plus, si u et v sont dans S , alors $\lambda u + \mu v$ vérifie la relation, par linéarité. **Donc S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.**
2. Soit $u \in S$ et $v = u_0 \varepsilon^{(0)} + u_1 \varepsilon^{(1)} + u_2 \varepsilon^{(2)}$. La suite v est dans S et a les mêmes trois premiers termes que u . Par récurrence forte, $u_n = v_n$ pour tout n , car chaque terme est déterminé par les trois précédents. La famille est donc génératrice. Elle est libre : les trois premiers termes d'une combinaison nulle donnent ses coefficients. **C'est une base, et $\dim S = 3$.**

Partie B.

1. Le réel 1 est racine, car $1 - 3 + 2 = 0$. On factorise :
$$r^3 - 3r + 2 = (r - 1)(r^2 + r - 2). \text{ Or } r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2). \text{ Donc } r^3 - 3r + 2 = (r - 1)^2(r + 2).$$
2. Pour a , on a $1 = 3 - 2$. Pour b , on a $3(n + 1) - 2n = n + 3$. Pour c , on a
$$3(-2)^{n+1} - 2(-2)^n = (-6 - 2)(-2)^n = -8(-2)^n = (-2)^{n+3}.$$

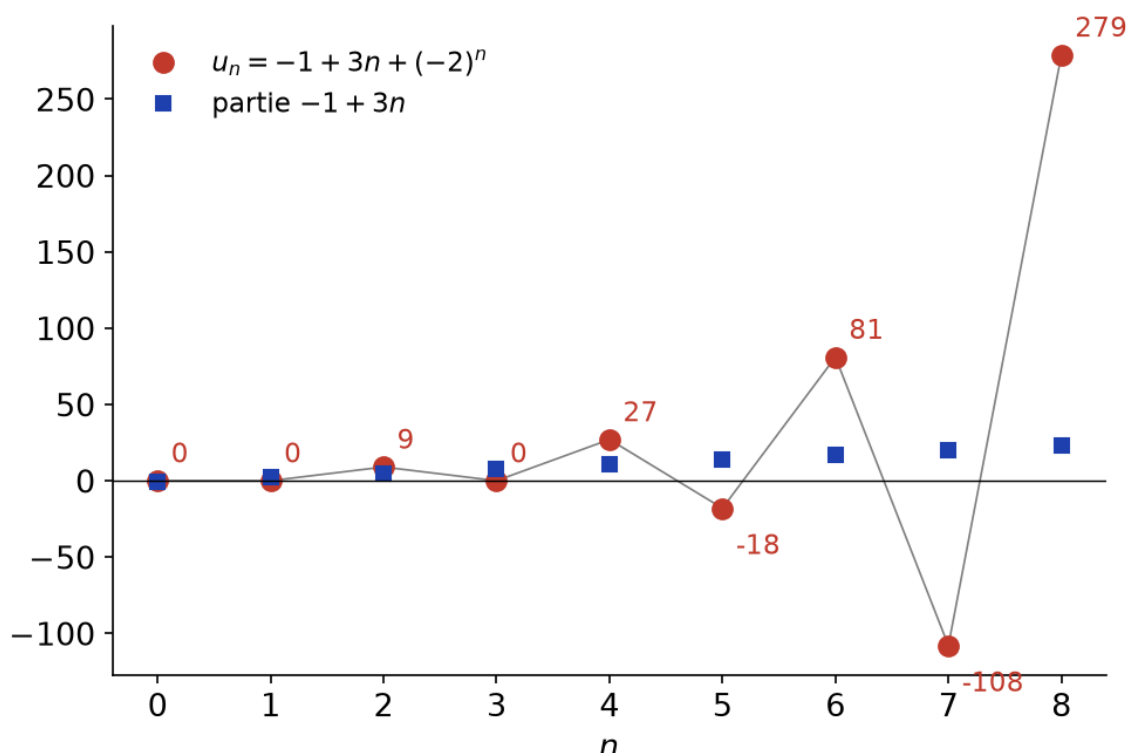
Les trois suites sont donc dans S .

3. Supposons $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. Les termes d'indices 0, 1, 2 donnent $\alpha + \gamma = 0$, $\alpha + \beta - 2\gamma = 0$ et $\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0$. La première donne $\alpha = -\gamma$, puis la deuxième $\beta = 3\gamma$. La troisième devient $-\gamma + 6\gamma + 4\gamma = 9\gamma = 0$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La famille est libre, compte trois vecteurs et $\dim S = 3$: c'est une base de S .

Partie C.

1. On écrit $u_n = \alpha + \beta n + \gamma(-2)^n$. Les conditions donnent $\alpha + \gamma = 0$, $\alpha + \beta - 2\gamma = 0$ et $\alpha + 2\beta + 4\gamma = 9$. Comme ci-dessus, $\alpha = -\gamma$, $\beta = 3\gamma$, puis $9\gamma = 9$. Donc $\gamma = 1$, $\beta = 3$, $\alpha = -1$. **Ainsi $u_n = -1 + 3n + (-2)^n$.**
Vérification : la relation donne $u_3 = 3u_1 - 2u_0 = 0$, et la formule donne $-1 + 9 - 8 = 0$. De même, $u_4 = 3u_2 - 2u_1 = 27$, et $-1 + 12 + 16 = 27$.

La figure ci-dessous montre les premiers termes : l'alternance de signe provient du terme $(-2)^n$, qui domine rapidement la partie affine.



2. Soit $u = \alpha a + \beta b + \gamma c$. Si $\gamma \neq 0$, alors $|u_n| \geq |\gamma| 2^n - |\alpha| - |\beta| n$, qui tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Si $\gamma = 0$ et $\beta \neq 0$, alors $|u_n| \geq |\beta| n - |\alpha|$ tend aussi vers $+\infty$. Réciproquement, les suites constantes sont bornées. **Donc** $S_b = \text{Vect}(a)$, **de dimension 1**.

3. Une suite de S qui converge est bornée, donc constante d'après la question précédente. Si elle tend vers 0, cette constante est nulle. **Seule la suite nulle converge vers 0**.

Point de méthode : le calcul de la dimension, par les conditions initiales, garantit qu'il suffit de trouver trois solutions libres pour les avoir toutes.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [dimension finie, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur dimension finie](#)
- À maîtriser avant : [Espaces vectoriels, familles libres et génératrices](#)
- Chapitre précédent : [Espaces vectoriels, familles libres et génératrices](#)
- Chapitre suivant : [Applications linéaires et théorème du rang](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)