

Différentielle et extrema

Exercice 1 : Différentiabilité par la définition

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $|(h,k)|_2 = \sqrt{h^2+k^2}$.

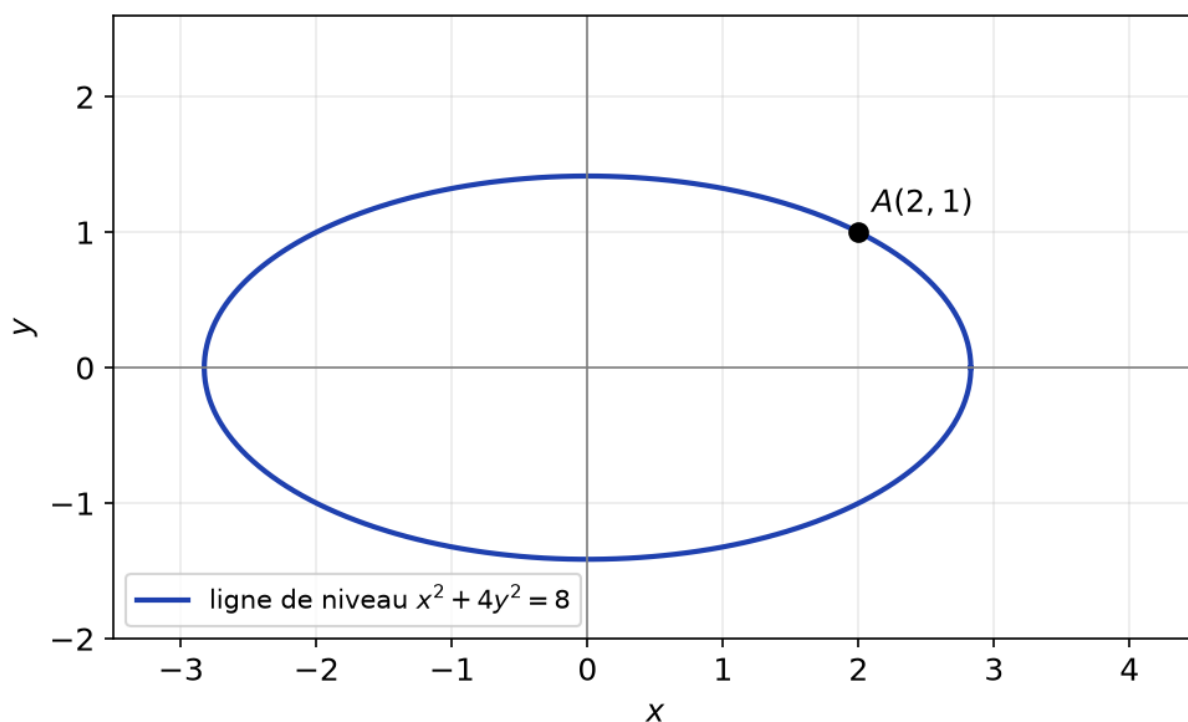
1. Soit $f(x,y) = x^2 + 3xy - y$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Développez $f(a+h, b+k) - f(a,b)$. En déduire, en revenant à la définition, que f est différentiable en (a,b) , et donnez $df_{(a,b)}(h,k)$.
2. Soit $N(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. La fonction N admet-elle une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$? Est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 2 : Calcul de matrices jacobienes

1. Soit $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $F(x,y) = (x^2 y, e^x \sin y, x + y^2)$. Justifiez que F est différentiable, puis calculez $J_F(x,y)$ et $J_F(0, \pi/2)$.
2. Soit $G(x,y,z) = xyz + z^2$. Calculez $\nabla G(1, 2, -1)$, puis $dG_{(1,2,-1)}(h,k,l)$.
3. Donnez une valeur approchée de $G(1,0.1; 1.98; -1)$ à l'aide de la différentielle.

Exercice 3 : Gradient et tangente à une ligne de niveau

Soit $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ et $A = (2,1)$. La ligne de niveau de f passant par A est représentée ci-dessous.



1. Calculez $f(A)$ et $\nabla f(A)$.
2. Calculez la dérivée de f en A selon le vecteur unitaire $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
3. Parmi les vecteurs unitaires u , lequel rend $D_u f(A)$ maximale ? Quelle est cette valeur maximale ?
4. La ligne de niveau est paramétrée par $\gamma(\theta) = (2\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta)$. En dérivant $f(\gamma(\theta))$, montrez que $\nabla f(\gamma(\theta))$ est orthogonal à $\gamma'(\theta)$. En déduire une équation de la tangente à l'ellipse en A .

Exercice 4 : Dérivées partielles sans différentiabilité

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrez que f est continue en $(0,0)$.
2. Calculez $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$.
3. Soit $v = (u, w) \neq (0,0)$. Montrez que f admet une dérivée en $(0,0)$ selon v et calculez-la.
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 5 : Une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

Soit $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Justifiez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculez $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur cet ouvert.
2. Calculez $\partial_1 f(0,0)$ et $\partial_2 f(0,0)$.
3. Montrez que $|\partial_1 f(x,y)| \leq 2|x|$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
4. Que peut-on en conclure sur la différentiabilité de f en $(0,0)$? Donnez $df(0,0)$.

Exercice 6 : Différentiabilité selon un paramètre

Soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha(x,y) = |xy|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculez les dérivées partielles de f_α en $(0,0)$.
2. Montrez que $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. En déduire que f_α est différentiable en $(0,0)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.
3. On suppose $\alpha \leq \frac{1}{2}$. En étudiant $f_\alpha(t,t)$, montrez que f_α n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 7 : Différentiable mais pas de classe C1

Soit $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. On note $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Montrez que f est différentiable en $(0,0)$ et précisez $df_{(0,0)}$.
2. Justifiez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculez $\partial_1 f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
3. En considérant la suite $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, montrez que $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0,0)$. Conclure.

Exercice 8 : Coordonnées polaires et règle de la chaîne

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Calculez la matrice jacobienne de $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et son déterminant.
2. Exprimez $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ évaluées en $\varphi(r,\theta)$.
3. Montrez que $|\nabla f|_2^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$.
4. Vérifiez les formules de la question 2 avec $f(x,y) = x^2 - y^2$, pour laquelle

$$g(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta) .$$

Exercice 9 : Jacobienne d'une composée

Soient $F(x, y) = (xy, x+y)$ et $G(u, v) = (u^2 + v, uv)$.

1. Calculez $J_F(1, 2)$, puis $J_G(F(1, 2))$.
2. En déduire $J_{G \circ F}(1, 2)$ par la règle de la chaîne.
3. Vérifiez le résultat en calculant directement $G \circ F$ et ses dérivées partielles.

Exercice 10 : Inégalité des accroissements finis

1. Soit $f(x, y) = \sin x \cos y$. Calculez ∇f et montrez que $|\nabla f(x, y)|_2 \leq 1$ pour tout (x, y) .
2. En déduire que, pour tous réels a, b, c, d ,

$$|\sin a \cos b - \sin c \cos d| \leq \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$
3. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\nabla g = 0$ sur U . Démontrez que g est constante.
4. Soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ et $h(x, y) = \frac{x}{|x|}$. Calculez ∇h sur V .
 Pourquoi cela ne contredit-il pas la question 3 ?

Exercice 11 : Théorème de Schwarz et matrice hessienne

Soit $f(x, y) = x^3 y^2 + e^{xy}$.

1. Justifiez que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculez les quatre dérivées partielles d'ordre 2 et vérifiez l'égalité des dérivées croisées.
3. Donnez la matrice hessienne $H_f(1,0)$.

Exercice 12 : Un contre-exemple au théorème de Schwarz

Soit $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrez que $|f(x,y)| \leq |xy|$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrez que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\partial_1 f(0,y) = -y$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\partial_2 f(x,0) = x$.
3. En déduire $\partial_2 \partial_1 f(0,0)$ et $\partial_1 \partial_2 f(0,0)$, où $\partial_2 \partial_1 f$ désigne la dérivée par rapport à y de $\partial_1 f$.
4. Qu'en concluez-vous sur la régularité de f ?

Exercice 13 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

1. Soit $f(x,y) = e^x \cos y$. Écrivez la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 de f en $(0,0)$.
2. En déduire une valeur approchée de $f(0,1; 0,05)$.
3. La fonction $\frac{e^x \cos y - 1 - x}{x^2 + y^2}$ admet-elle une limite en $(0,0)$?
4. Soit $g(x,y) = \ln(1 + x + 2y)$. Écrivez son développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0,0)$ et donnez $H_g(0,0)$.

Exercice 14 : Points critiques d'un polynôme de degré 3

Soit $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminez les points critiques de f .
2. Déterminez la nature de chacun d'eux.
3. La fonction f admet-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 15 : Un point critique dégénéré

Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1. Montrez que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
2. Étudiez la nature des points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
3. Montrez que la hessienne en $(0,0)$ ne permet pas de conclure. En étudiant $f(x,x)$ et $f(x,0)$, déterminez la nature de $(0,0)$.
4. En posant $s = x^2 + y^2$, montrez que $f(x,y) \geq \frac{1}{2}s^2 - 4s$. En déduire le minimum global de f .

Exercice 16 : Extremum d'une fonction de trois variables

Soit $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz - 2x$ sur $\mathbb{R}^3$, et
 $q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$.

1. Déterminez l'unique point critique M_0 de f .
2. Calculez la matrice hessienne de f .
3. Montrez que $q(x,y,z) = (x+y+z)^2 + (y-z)^2 + z^2$. En déduire que $q(v) > 0$ pour tout $v \neq 0$.
4. Montrez que $f(M_0 + v) = f(M_0) + q(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. Concluez sur la nature de M_0 et donnez la valeur du minimum.

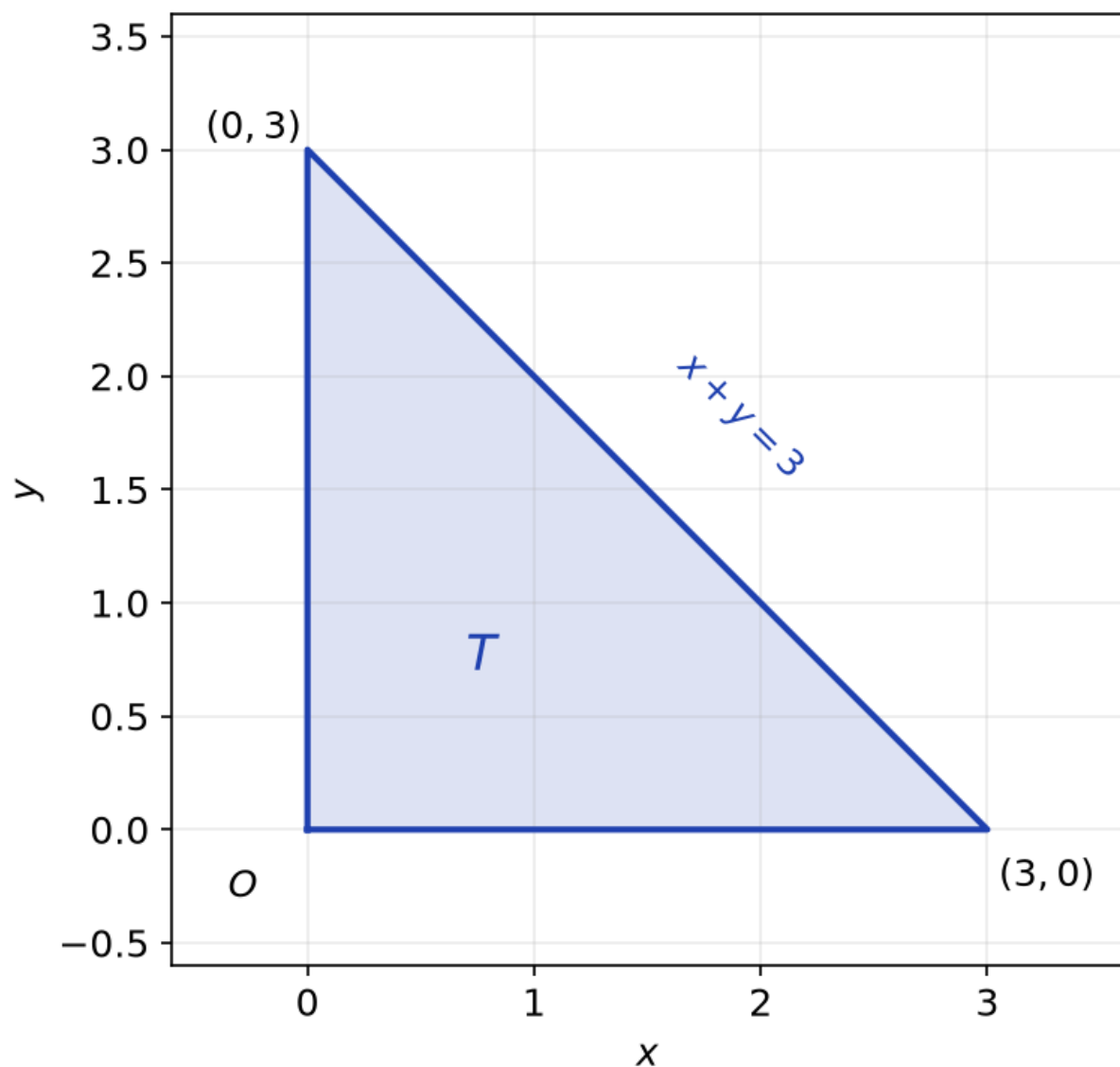
Exercice 17 : Extrema sur le disque unité

Soit $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$.

1. Justifiez que f admet un maximum et un minimum sur D .
2. Déterminez les points critiques de f situés à l'intérieur de D .
3. Étudiez f sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.
4. Concluez : donnez le minimum et le maximum de f sur D , et les points où ils sont atteints.

Exercice 18 : Maximum d'un produit sur un triangle

Soit $T = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 3 \end{array} \right\}$, représenté ci-dessous, et $f(x,y) = xy(3 - x - y)$.

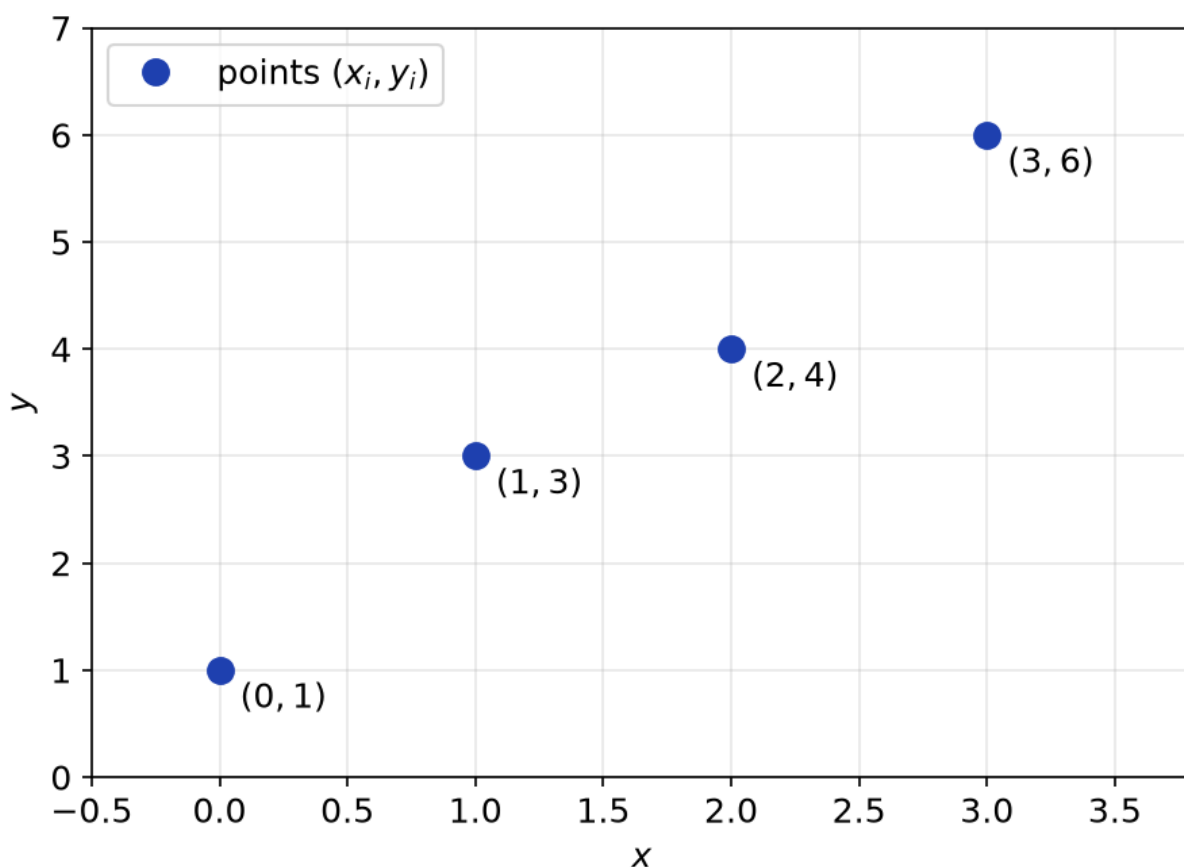


1. Montrez que T est compact et que f atteint ses bornes sur T .
2. Déterminez les valeurs de f sur la frontière de T .
3. Déterminez les points critiques de f à l'intérieur de T . En déduire le maximum et le minimum de f sur T .
4. Application : montrez que pour tous réels positifs a, b, c , $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

Exercice 19 : Droite des moindres carrés

On dispose des quatre points $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$ et $(3,6)$, représentés ci-dessous. On cherche la droite $y = ax + b$ qui minimise

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^4 (y_i - ax_i - b)^2.$$



1. Calculez $\partial_a S$ et $\partial_b S$, et montrez que tout point critique vérifie un système linéaire de deux équations.
2. Résolvez ce système.
3. Calculez la hessienne de S et montrez que le point critique est un minimum local strict.
4. Montrez que ce minimum est global, en utilisant le fait que S est un polynôme de degré 2.

Exercice 20 : Problème, étude complète d'une fonction

Soit $f(x,y) = (x^2 - y^2) e^{-x^2-y^2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Justifiez que f est de classe C^2 . Comparez $f(-x,y)$, $f(x,-y)$ et $f(y,x)$ à $f(x,y)$.
2. Montrez que $\partial_1 f(x,y) = 2x(1 - x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ et calculez $\partial_2 f$.
3. Déterminez les cinq points critiques de f .
4. Calculez la hessienne de f en $(1,0)$ et donnez la nature de ce point. En utilisant les symétries, en déduire la nature de $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(0,-1)$.
5. Déterminez la nature de $(0,0)$.
6. Montrez que $s e^{-s} \leq e^{-1}$ pour tout $s \geq 0$. En déduire que $|f(x,y)| \leq e^{-1}$ et déterminez les extrema globaux de f .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [différentielle et extrema, cours de maths en L2](#)

- À maîtriser avant : [Plusieurs variables : limites et dérivées partielles](#)
- Chapitre précédent : [Plusieurs variables : limites et dérivées partielles](#)
- Chapitre suivant : [Espaces probabilisés et conditionnement](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)