

Différentielle et extrema

Corrigé de l'exercice 1 : Différentiabilité par la définition

1. On développe :

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = 2ah + h^2 + 3ak + 3bh + 3hk - k = (2a+3b)h + (3a-1)k + h^2 + 3hk.$$

Posons $L(h, k) = (2a+3b)h + (3a-1)k$, qui est linéaire, et $N = |(h, k)|_2$. Comme $|h| \leq N$ et $|k| \leq N$, on obtient $|h^2 + 3hk| \leq 4N^2$. Ainsi, le reste divisé par N est majoré par $4N$, qui tend vers 0. Par définition, f est donc différentiable en (a, b) et $df_{(a,b)}(h, k) = (2a+3b)h + (3a-1)k$.

2. Le taux d'accroissement vaut $\frac{N(h, 0) - N(0, 0)}{h} = \frac{|h|}{h}$. Il vaut 1 pour $h > 0$ et -1 pour $h < 0$: il n'a pas de limite. Donc $\partial_1 N(0, 0)$ **n'existe pas, et N n'est pas différentiable en $(0, 0)$** , puisqu'une fonction différentiable admet des dérivées partielles.

Point de méthode : le candidat à la différentielle se lit sur les termes de degré 1 du développement ; il reste ensuite à majorer les termes de degré au moins 2.

Corrigé de l'exercice 2 : Calcul de matrices jacobienes

1. Les trois composantes sont des fonctions polynomiales, exponentielles et trigonométriques : leurs dérivées partielles existent et sont continues. Donc F est de classe C^1 , donc différentiable. On trouve

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^x \sin y & \\ e^x \cos y & \\ 1 & 2y \end{pmatrix}, \quad J_F(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

La matrice obtenue est de taille 3×2 .

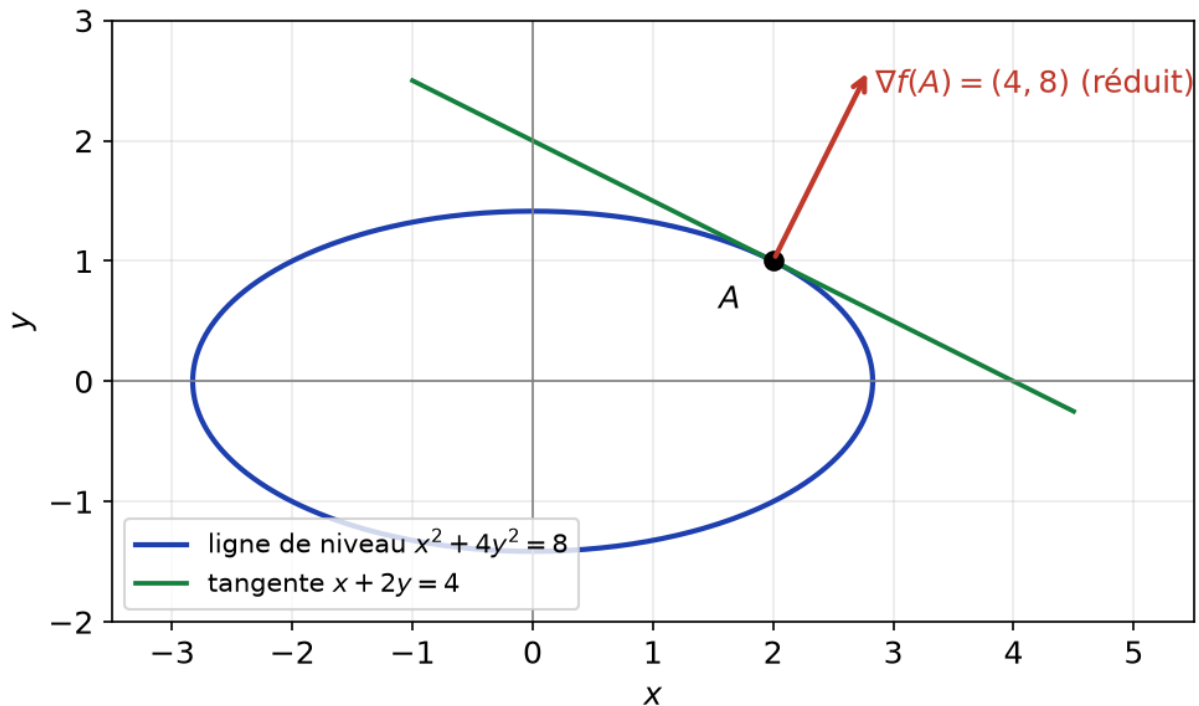
2. On a $\partial_x G = yz$, $\partial_y G = xz$ et $\partial_z G = xy + 2z$. En $(1,2,-1)$, on obtient $\nabla G(1,2,-1) = (-2, -1, 0)$. Par conséquent, $dG(1,2,-1)(h,k,l) = -2h - k$.

3. D'abord, $G(1,2,-1) = -2 + 1 = -1$. Ensuite, l'accroissement vaut $G(1,2,-1)(h,k,l) = (0,01; -0,02; 0)$, donc $dG(h,k,l) = -0,02 + 0,02 = 0$. Ainsi, $G(1,2,-1)(h,k,l) \approx -1$. La valeur exacte vaut $-1,9998 + 1 = -0,9998$: l'erreur, de l'ordre de $|h|^2$, est bien petite.

Corrigé de l'exercice 3 : Gradient et tangente à une ligne de niveau

1. On a $f(A) = 4 + 4 = 8$. Le gradient vaut $\nabla f(x,y) = (2x, 8y)$, donc $\nabla f(A) = (4, 8)$.
2. La fonction est polynomiale, donc différentiable. Ainsi $D_u f(A) = \langle \nabla f(A), u \rangle = 4 \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12+32}{5}$, soit $D_u f(A) = \frac{44}{5}$.
3. Pour u unitaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $D_u f(A) \leq |\nabla f(A)|_2 = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$. L'égalité a lieu pour u colinéaire de même sens que le gradient. Donc **le maximum est atteint pour $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et vaut $4\sqrt{5}$.**
4. Pour tout θ , $f(\gamma(\theta)) = 8\cos^2\theta + 4 \cdot 2\sin^2\theta = 8$. En dérivant avec la règle de la chaîne, $0 = \langle \nabla f(\gamma(\theta)), \gamma'(\theta) \rangle$. Le gradient est donc orthogonal au vecteur tangent $\gamma'(\theta)$. Or $A = \gamma(\pi/4)$ et $\gamma'(\pi/4) = (-2, 1) \neq 0$. Par conséquent, la tangente en A est la droite passant par A et orthogonale à $(4,8)$: $4(x-2) + 8(y-1) = 0$, c'est-à-dire $x + 2y = 4$.

La figure ci-dessous montre la tangente obtenue et le gradient, orthogonal à la ligne de niveau au point A .



Corrigé de l'exercice 4 : Dérivées partielles sans différentiabilité

1. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $x^2 \leq x^2 + y^2$, donc $|f(x,y)| \leq |y|$. Quand $(x,y) \rightarrow (0,0)$, le majorant tend vers 0. Donc f est continue en $(0,0)$.

2. Pour tout t , $f(t,0) = 0$ et $f(0,t) = 0$. Les taux d'accroissement sont nuls, donc $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$.

3. Pour $t \neq 0$,

$$\frac{f(tu, tw) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 u^2 w}{t \cdot t^2 (u^2 + w^2)} = \frac{u^2 w}{u^2 + w^2}.$$

Ce quotient ne dépend pas de t . Donc $D_v f(0,0) = \frac{u^2 w}{u^2 + w^2}$.

4. Supposons f différentiable en $(0,0)$. Alors

$df_{(0,0)}(h,k) = h \partial_1 f(0,0) + k \partial_2 f(0,0) = 0$. Ainsi, toutes les dérivées directionnelles seraient nulles. Or, pour $v = (1,1)$, on trouve $D_v f(0,0) = \frac{1}{2} \neq 0$. C'est absurde : **f n'est pas différentiable en $(0,0)$** , bien qu'elle soit continue et dérivable dans toutes les directions.

Point de méthode : une application $v \rightarrow D_v f(a)$ non linéaire suffit à prouver la non-différentiabilité.

Corrigé de l'exercice 5 : Une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle y est donc de classe C^1 . Par la formule du quotient,

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - x^2y^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Par symétrie des rôles de x et y , $\partial_1 f = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ et $\partial_2 f = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$.

2. Comme $f(t,0) = f(0,t) = 0$ pour tout t , $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$.
3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a $y^4 \leq (x^2+y^2)^2$. Donc $|\partial_1 f(x,y)| \leq 2|x|$, qui tend vers $0 = \partial_1 f(0,0)$. De même, $|\partial_2 f(x,y)| \leq 2|y|$. Ainsi, les deux dérivées partielles sont continues en $(0,0)$, et aussi ailleurs. Par conséquent, **f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$** .
4. D'après le théorème « C^1 implique différentiable », **f est différentiable en $(0,0)$ et $df_{(0,0)} = 0$** .

Corrigé de l'exercice 6 : Différentiabilité selon un paramètre

1. Pour tout t , $f_\alpha(t,0) = 0 = f_\alpha(0,t)$. Donc $\partial_1 f_\alpha(0,0) = \partial_2 f_\alpha(0,0) = 0$, quel que soit $\alpha > 0$.

2. D'abord, $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ donne $2|xy| \leq x^2 + y^2$. Le seul candidat pour la différentielle est l'application nulle. Notons $N = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alors

$$\frac{|f_\alpha(x, y)|}{N} \leq \frac{(N^2/2)^\alpha}{N} = 2^{-\alpha} N^{2\alpha - 1}.$$

Si $\alpha > \frac{1}{2}$, l'exposant $2\alpha - 1$ est strictement positif et le majorant tend vers 0. Donc f_α est différentiable en $(0, 0)$, de différentielle nulle, pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

3. Si f_α était différentiable en $(0, 0)$, sa différentielle serait nulle d'après la question 1. Il faudrait donc $f_\alpha(x, y)/N \rightarrow 0$. Or, pour $t > 0$,

$$\frac{f_\alpha(t, t)}{\sqrt{2} t} = \frac{t^{2\alpha}}{\sqrt{2} t} = \frac{t^{2\alpha - 1}}{\sqrt{2}}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, ce quotient vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$; pour $\alpha < \frac{1}{2}$, il tend vers $+\infty$. Dans les deux cas, il ne tend pas vers 0. Donc f_α n'est pas différentiable en $(0, 0)$ si $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Différentiable mais pas de classe C^1

1. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y)| \leq \rho^2$. Ainsi $|f(x, y) - f(0, 0)|/\rho \leq \rho \rightarrow 0$: on a $f(h) = f(0) + 0 + o(|h|)$. Donc f est différentiable en $(0, 0)$ et $df_{(0,0)} = 0$. En particulier, $\partial_1 f(0, 0) = 0$.

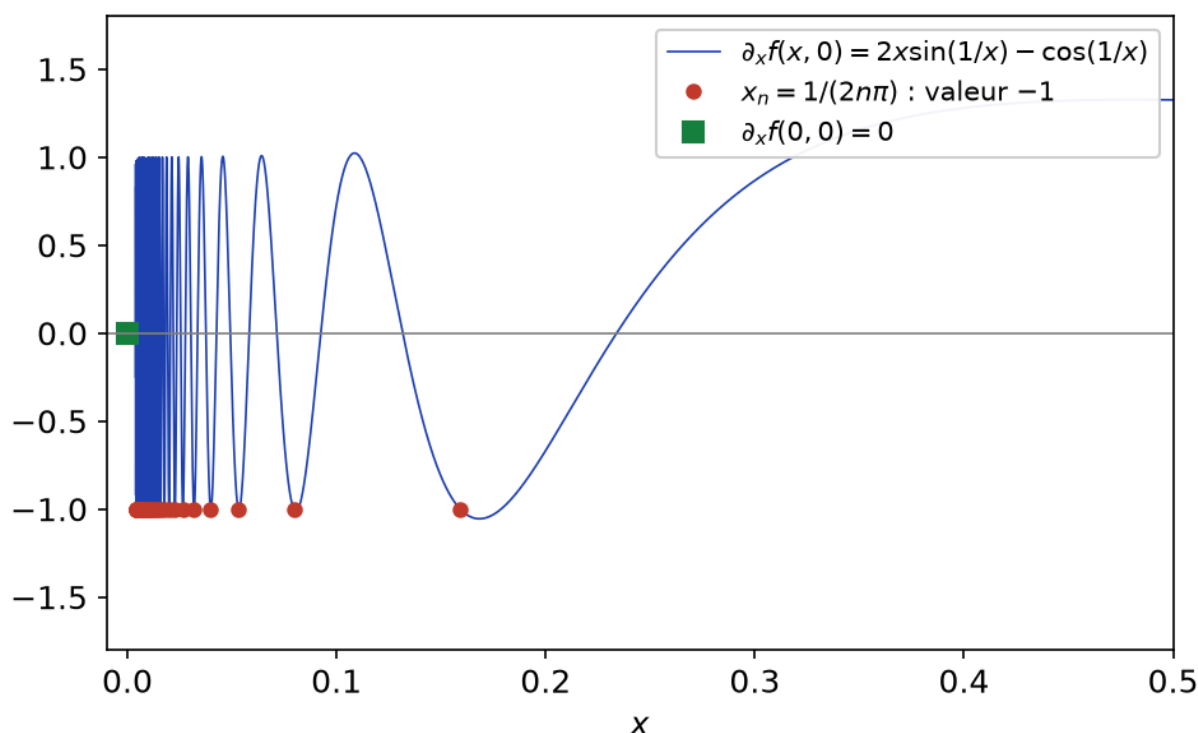
2. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ρ est de classe C^1 et strictement positive, avec $\partial_1 \rho = x/\rho$. Par composition et produit, f y est de classe C^1 . La dérivée de $u \rightarrow \sin(1/u)$ vaut $-\cos(1/u)/u^2$. Par conséquent,

$$\partial_1 f(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\rho} + \rho^2 \cdot \left(-\frac{1}{\rho^2} \cos \frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{x}{\rho} = 2x \sin \frac{1}{\rho} - \frac{x}{\rho} \cos \frac{1}{\rho}.$$

Ainsi $\partial_1 f(x, y) = 2x \sin(1/\rho) - (x/\rho) \cos(1/\rho)$.

3. Sur l'axe $(x, 0)$ avec $x > 0$, on a $\rho = x$, donc $\partial_1 f(x, 0) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Pour $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, on trouve $\sin(2n\pi) = 0$ et $\cos(2n\pi) = 1$, donc $\partial_1 f(x_n, 0) = -1$. Or $(x_n, 0) \rightarrow (0, 0)$ et $\partial_1 f(0, 0) = 0 \neq -1$. Donc $\partial_1 f$ n'est pas continue en $(0, 0)$. La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas de classe C^1 .

La figure suivante montre l'oscillation de $\partial_1 f$ sur l'axe des abscisses : elle prend la valeur -1 en chaque x_n , aussi près de 0 qu'on veut.



Corrigé de l'exercice 8 : Coordonnées polaires et règle de la chaîne

1. Les composantes de φ sont de classe C^1 , et

$$J_{\varphi}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det J_{\varphi} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

Le jacobien vaut r .

2. On a $g = f \circ \varphi$. La règle de la chaîne donne $J_g = J_f(\varphi(r, \theta)) J_{\varphi}(r, \theta)$, où

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix}. \quad \text{En effectuant le produit : } \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta \partial_1 f + \sin \theta \partial_2 f \quad \text{et} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta \partial_1 f + r \cos \theta \partial_2 f.$$

3. Notons $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$, $P = \partial_1 f$ et $Q = \partial_2 f$. Alors

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 = (cP + sQ)^2 + (-sP + cQ)^2 = (c^2 + s^2)P^2 + (s^2 + c^2)Q^2.$$

Les doubles produits $2csPQ$ et $-2csPQ$ s'éliminent. Ainsi **la somme vaut**
 $P^2 + Q^2 = |\nabla f|_2^2$.

4. Ici $\partial_1 f = 2x$ et $\partial_2 f = -2y$. D'une part, la formule donne
 $\frac{\partial g}{\partial r} = 2r\cos^2\theta - 2r\sin^2\theta = 2r\cos(2\theta)$. D'autre part, en dérivant $r^2\cos(2\theta)$, on trouve
aussi $2r\cos(2\theta)$. De même, la formule donne
 $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -2r^2\sin\theta\cos\theta - 2r^2\cos\theta\sin\theta = -2r^2\sin(2\theta)$. C'est bien la dérivée de
 $r^2\cos(2\theta)$ par rapport à θ . **Les deux formules sont vérifiées.**

Corrigé de l'exercice 9 : Jacobienne d'une composée

1. On a $J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donc $J_F(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $F(1,2) = (2,3)$ et
 $J_G(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & 2 \end{pmatrix}$. Donc $J_G(2,3) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Les applications F et G sont polynomiales, donc différentiables. Par la règle de la chaîne,

$$J_{G \circ F}(1,2) = J_G(2,3) J_F(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

On obtient $J_{G \circ F}(1,2) = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Directement, $G \circ F(x,y) = (x^2y^2 + x + y, x^2y + xy^2)$. Les dérivées partielles de la première
composante sont $2xy^2 + 1$ et $2x^2y + 1$, soit 9 et 5 en $(1,2)$. Celles de la seconde
sont $2xy + y^2$ et $x^2 + 2xy$, soit 8 et 5. **Le résultat est confirmé.**

Corrigé de l'exercice 10 : Inégalité des accroissements finis

1. On a $\nabla f(x,y) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y)$. Comme $\cos^2 y \leq 1$ et $\sin^2 y \leq 1$,

$$|\nabla f(x,y)|_2^2 = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Donc $|\nabla f|_2 \leq 1$ **sur** $\mathbb{R}^2$.

- La fonction f est de classe C^1 sur le convexe $\mathbb{R}^2$. L'inégalité des accroissements finis, avec $M = 1$, donne $|f(a,b) - f(c,d)| \leq |(a,b) - (c,d)|_2$. **C'est exactement l'inégalité demandée.**
- Fixons $x_0 \in U$. Pour $x \in U$, le segment $[x_0, x]$ est inclus dans U par convexité. Sur ce segment, $|\nabla g|_2 = 0$. L'inégalité des accroissements finis avec $M = 0$ donne $|g(x) - g(x_0)| \leq 0$. **Donc $g(x) = g(x_0)$ pour tout x : g est constante.**
- Sur V , h vaut 1 sur le demi-plan $x > 0$ et -1 sur le demi-plan $x < 0$. Elle est localement constante, donc $\nabla h = 0$ **sur V** . Pourtant h n'est pas constante. Il n'y a pas de contradiction : **V n'est pas convexe** (ni même connexe). Le segment qui joint $(-1,0)$ à $(1,0)$ sort de V , et l'argument de la question 3 tombe.

Corrigé de l'exercice 11 : Théorème de Schwarz et matrice hessienne

- La fonction $(x,y) \rightarrow x^3y^2$ est polynomiale. De plus, $(x,y) \rightarrow e^{xy}$ est la composée de l'exponentielle et d'un polynôme. Toutes leurs dérivées partielles, à tout ordre, existent et sont continues. **Donc f est de classe C^2 .**

- D'abord, $\partial_1 f = 3x^2y^2 + ye^{xy}$ et $\partial_2 f = 2x^3y + xe^{xy}$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\partial_1^2 f &= 6xy^2 + y^2 e^{xy}, & \partial_2^2 f &= 2x^3 + x^2 e^{xy}, \\ \partial_2 \partial_1 f &= 6x^2y + e^{xy} + xye^{xy}, & \partial_1 \partial_2 f &= 6x^2y + e^{xy} + xye^{xy}.\end{aligned}$$

Les dérivées croisées sont égales, conformément au théorème de Schwarz.

- En $(1,0)$: $\partial_1^2 f = 0$, $\partial_2^2 f = 2 + 1 = 3$ et $\partial_1 \partial_2 f = 0 + 1 + 0 = 1$. Donc $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 12 : Un contre-exemple au théorème de Schwarz

- Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$, donc $|f(x,y)| \leq |xy|$. Ce majorant tend vers

0 en $(0,0)$, d'où la continuité en l'origine. Ailleurs, f est un quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. **Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.**

2. Soit $y \neq 0$. Pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} \left[h \rightarrow 0 \right] \frac{y(-y^2)}{y^2} = -y.$$

Pour $y = 0$, $f(h,0) = 0$, donc $\partial_1 f(0,0) = 0 = -0$. Ainsi $\partial_1 f(0,y) = -y$ **pour tout** y . De même, pour $x \neq 0$, $\frac{f(x,k)}{k} = \frac{x(x^2 - k^2)}{x^2 + k^2} \rightarrow x$, et le cas $x = 0$ est immédiat. Donc $\partial_2 f(x,0) = x$.

3. La fonction $y \rightarrow \partial_1 f(0,y) = -y$ a pour dérivée -1 . Donc $\partial_2 \partial_1 f(0,0) = -1$. De même, $x \rightarrow \partial_2 f(x,0) = x$ a pour dérivée 1 , donc $\partial_1 \partial_2 f(0,0) = 1$.

4. Les dérivées croisées diffèrent en $(0,0)$. D'après le théorème de Schwarz, **f n'est pas de classe C^2** : au moins une dérivée seconde croisée n'est pas continue en l'origine.

Point de méthode : pour calculer une dérivée seconde croisée en un point singulier, calculez d'abord la dérivée première sur toute une droite, puis dérivez cette fonction d'une variable.

Corrigé de l'exercice 13 : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

1. La fonction f est de classe C^2 . En $(0,0)$: $f = 1$, $\partial_1 f = e^x \cos y = 1$, $\partial_2 f = -e^x \sin y = 0$. Ensuite, $r = e^x \cos y = 1$, $s = -e^x \sin y = 0$ et $t = -e^x \cos y = -1$. Par la formule de Taylor-Young :

$$e^x \cos y = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + o(x^2 + y^2).$$

2. Avec $x = 0,1$ et $y = 0,05$: $1 + 0,1 + \frac{1}{2}(0,01 - 0,0025) = 1,10375$. Donc $f(0,1; 0,05) \approx 1,10375$. La calculatrice donne environ $1,10379$: l'écart est de l'ordre de 4×10^{-5} .

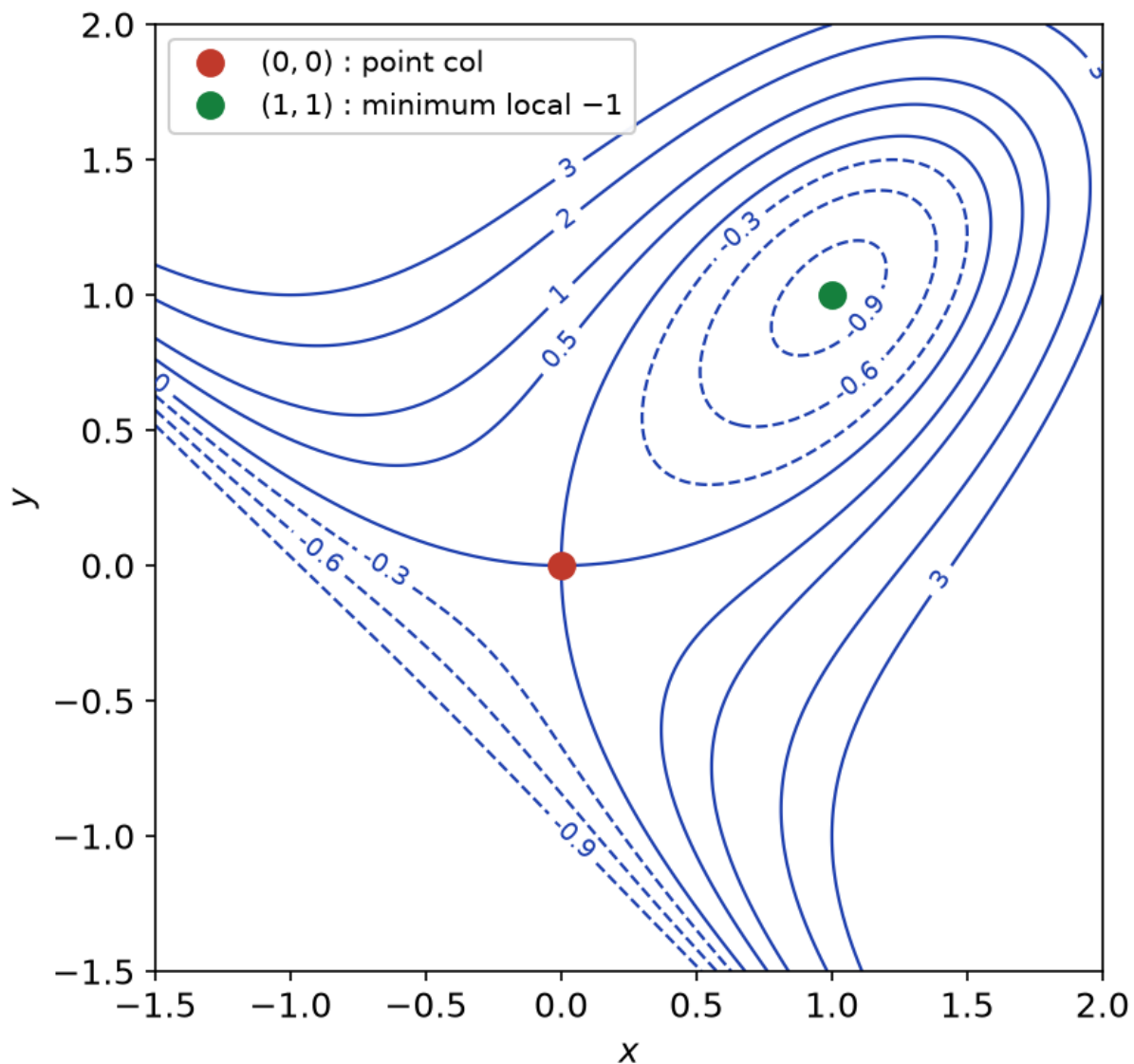
3. D'après la question 1, $\frac{e^x \cos y - 1 - x}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)} + o(1)$. Sur l'axe $y = 0$, le quotient tend vers $\frac{1}{2}$. En revanche, sur l'axe $x = 0$, il tend vers $-\frac{1}{2}$. **Il n'y a donc pas de limite en $(0,0)$.**

4. Posons $u = x + 2y$. Pour u proche de 0, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, et $u^2 \leq 5(x^2 + y^2)$ par Cauchy-Schwarz. Donc $g(x,y) = x + 2y - \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + 4y^2) + o(x^2 + y^2)$. Par unicité du développement, $g(x,y) = x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2 + o(x^2 + y^2)$ et $H_g(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. On peut le vérifier : $\partial_1^2 g = -\frac{1}{(1+x+2y)^2}$, $\partial_1 \partial_2 g = -\frac{2}{(1+x+2y)^2}$ et $\partial_2^2 g = -\frac{4}{(1+x+2y)^2}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Points critiques d'un polynôme de degré 3

- On a $\partial_1 f = 3x^2 - 3y$ et $\partial_2 f = 3y^2 - 3x$. Un point critique vérifie $y = x^2$ et $x = y^2$. Ainsi $x = x^4$, soit $x(x^3 - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$. **Les points critiques sont $(0,0)$ et $(1,1)$.**
- Les dérivées secondes valent $r = 6x$, $s = -3$, $t = 6y$. En $(0,0)$: $rt - s^2 = -9 < 0$, donc $(0,0)$ **est un point col.** En $(1,1)$: $rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ et $r = 6 > 0$, donc $(1,1)$ **est un minimum local strict, de valeur $f(1,1) = -1$.**
- On a $f(x, 0) = x^3$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Ainsi f n'est ni majorée ni minorée. **Elle n'a pas d'extremum global** : le minimum en $(1,1)$ est seulement local.

Les lignes de niveau représentées ci-dessous confirment l'analyse. Autour de $(1,1)$, elles forment des courbes fermées emboîtées ; en $(0,0)$, la ligne de niveau 0 se croise elle-même, ce qui est typique d'un col.



Corrigé de l'exercice 15 : Un point critique dégénéré

- On a $\partial_1 f = 4x^3 - 4(x-y)$ et $\partial_2 f = 4y^3 + 4(x-y)$. En ajoutant les deux équations d'un point critique, $x^3 + y^3 = 0$. Or $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$, et $x^2 - xy + y^2 = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2$ ne s'annule qu'en $(0,0)$. Dans tous les cas, $y = -x$. La première équation devient $4x^3 - 8x = 0$, soit $x(x^2 - 2) = 0$. **Les points critiques sont** $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **et** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- On a $r = 12x^2 - 4$, $s = 4$ et $t = 12y^2 - 4$. Aux deux points non nuls, $r = t = 20$, donc $rt - s^2 = 400 - 16 = 384 > 0$ avec $r > 0$. **Ce sont deux minima locaux stricts**, de valeur $f = 4 + 4 - 2(2\sqrt{2})^2 = -8$.

3. En $(0,0)$, $r = t = -4$ et $s = 4$, donc $rt - s^2 = 0$: le critère ne conclut pas. D'une part, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ pour $x \neq 0$. D'autre part, $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ pour $0 < |x| < \sqrt{2}$. Ainsi f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives aussi près qu'on veut de l'origine, où elle vaut 0. **Le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local.**

4. D'abord, $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$ donne $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}s^2$. Ensuite, $(x-y)^2 \leq (x-y)^2 + (x+y)^2 = 2s$. Par conséquent,

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}s^2 - 4s = \frac{1}{2}(s-4)^2 - 8 \geq -8.$$

Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$, **le minimum global de f vaut -8 , atteint en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.**

Corrigé de l'exercice 16 : Extremum d'une fonction de trois variables

1. Le gradient vaut $\begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z - 2, \\ 4y + 2x, \\ 6z + 2x \end{pmatrix}$. Les deux dernières équations donnent $y = -\frac{x}{2}$ et $z = -\frac{x}{3}$. La première devient $x - \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$, soit $\frac{x}{6} = 1$. **Le seul point critique est $M_0 = (6, -3, -2)$.**

2. Les dérivées secondes sont constantes :

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

La hessienne ne dépend pas du point.

3. On développe : $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ et $(y-z)^2 + z^2 = y^2 - 2yz + 2z^2$. La somme vaut $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz = q(x,y,z)$. Si $q(v) = 0$, les trois carrés sont nuls : $z = 0$, puis $y = 0$, puis $x = 0$. **Donc $q(v) > 0$ pour $v \neq 0$.**

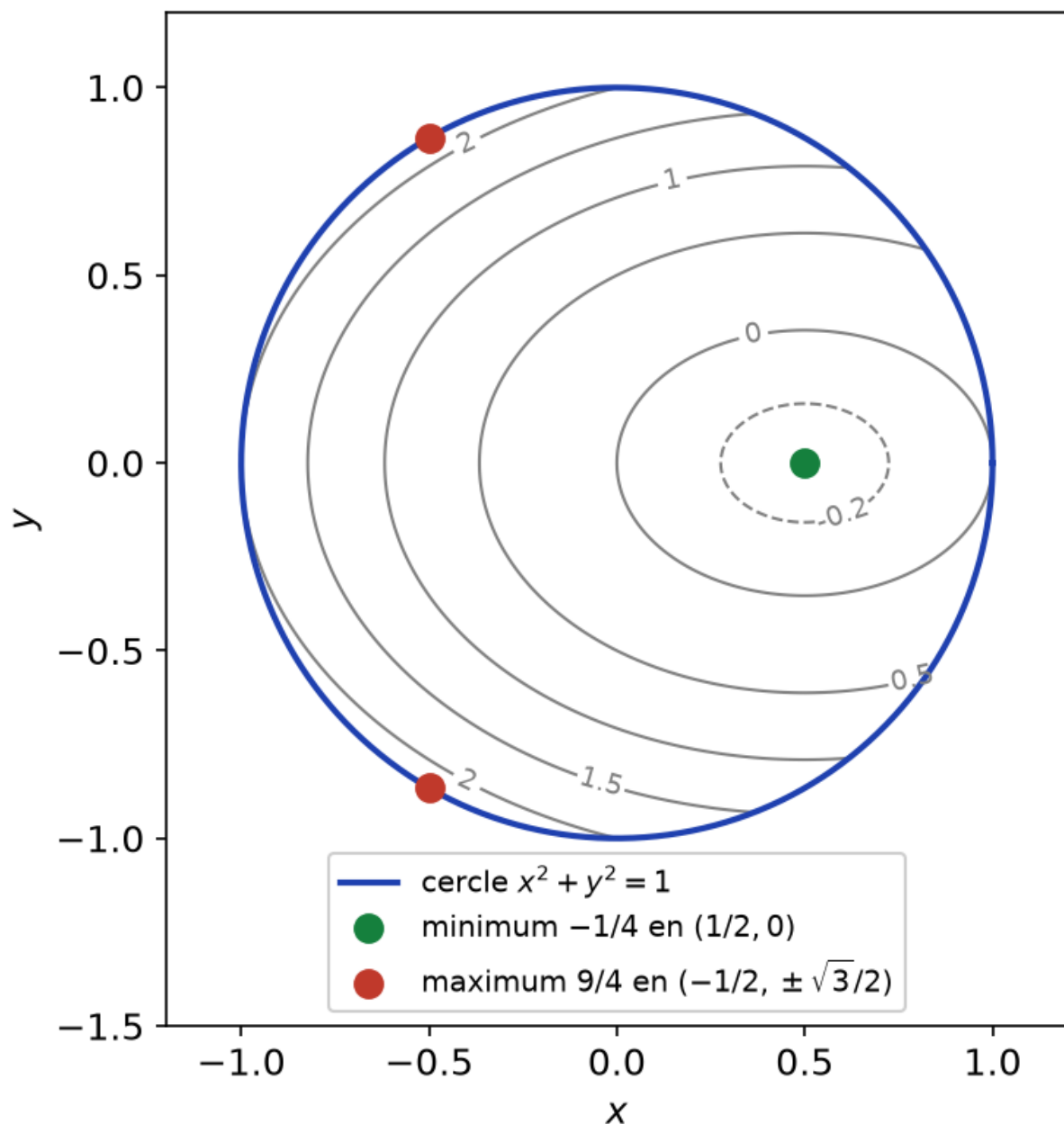
4. Notons B la forme bilinéaire symétrique associée à q . Alors $f(M) = q(M) - 2x$. Pour $v = (v_1, v_2, v_3)$,
 $f(M_0 + v) = q(M_0) + 2B(M_0, v) + q(v) - 2x_0 - 2v_1 = f(M_0) + \langle \nabla f(M_0), v \rangle + q(v).$

Comme $\nabla f(M_0) = 0$, on obtient $f(M_0 + v) = f(M_0) + q(v) \geq f(M_0)$, avec égalité seulement si $v = 0$. Enfin, $q(M_0) = 1 + 1 + 4 = 6$, donc $f(M_0) = 6 - 12 = -6$. M_0 est un minimum global strict, de valeur -6 .

Corrigé de l'exercice 17 : Extrema sur le disque unité

1. Le disque fermé D est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$, donc compact. De plus, f est polynomiale, donc continue. D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum et un minimum sur D .
2. Le gradient vaut $\begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 4y \end{pmatrix}$. Il s'annule seulement en $(\frac{1}{2}, 0)$, qui est bien intérieur à D . Le seul point critique intérieur est $(\frac{1}{2}, 0)$, où $f = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.
3. Sur le cercle, posons $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$. Alors $f = \cos^2\theta + 2\sin^2\theta - \cos\theta = 2 - \cos^2\theta - \cos\theta$. Avec $u = \cos\theta \in [-1, 1]$, on étudie $\psi(u) = 2 - u^2 - u$. Sa dérivée $-2u - 1$ s'annule en $u = -\frac{1}{2}$, où $\psi = 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$. Aux bornes, $\psi(1) = 0$ et $\psi(-1) = 2$. Sur le cercle, f varie entre 0, atteint en $(1, 0)$, et $\frac{9}{4}$, atteint en $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.
4. Un extremum sur D est atteint soit en un point critique intérieur, soit sur le cercle. On compare donc $-\frac{1}{4}$, 0 et $\frac{9}{4}$. Le minimum vaut $-\frac{1}{4}$, atteint en $(\frac{1}{2}, 0)$; le maximum vaut $\frac{9}{4}$, atteint en $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

La figure ci-dessous situe ces trois points parmi les lignes de niveau de f restreintes au disque.



Corrigé de l'exercice 18 : Maximum d'un produit sur un triangle

1. L'ensemble T est défini par trois inégalités larges entre fonctions continues : il est fermé. De plus, il est inclus dans $[0, 3]^2$, donc borné. Ainsi T est compact. Comme f est continue, f **atteint ses bornes sur T** .
2. La frontière est formée des trois côtés, sur lesquels $x = 0$, $y = 0$ ou $x + y = 3$. Dans chaque cas, un facteur du produit est nul. **Donc $f = 0$ sur toute la frontière.**

3. À l'intérieur, $x > 0$, $y > 0$ et $x + y < 3$, donc $f > 0$. On a $\partial_1 f = y(3 - 2x - y)$ et $\partial_2 f = x(3 - x - 2y)$. Comme $x, y > 0$, un point critique intérieur vérifie $2x + y = 3$ et $x + 2y = 3$. En soustrayant, $x = y$, puis $3x = 3$. Le seul point critique intérieur est $(1,1)$, où $f = 1$. On compare avec la valeur 0 prise sur la frontière. **Le maximum vaut 1, atteint en $(1,1)$; le minimum vaut 0, atteint sur toute la frontière.**
4. Soient $a, b, c \geq 0$ et $S = a+b+c$. Si $S = 0$, alors $a = b = c = 0$ et l'inégalité est une égalité. Sinon, posons $x = \frac{3a}{S}$ et $y = \frac{3b}{S}$. Alors $(x,y) \in T$ et $3 - x - y = \frac{3c}{S}$. La question 3 donne $\frac{27abc}{S^3} = f(x,y) \leq 1$. **Donc** $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$: c'est l'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres.

Corrigé de l'exercice 19 : Droite des moindres carrés

1. La fonction S est polynomiale en (a,b) . On a

$$\partial_a S = -2 \sum_i x_i (y_i - ax_i - b), \quad \partial_b S = -2 \sum_i (y_i - ax_i - b).$$

Avec $\sum x_i = 6$, $\sum y_i = 14$, $\sum x_i^2 = 14$ et $\sum x_i y_i = 0 + 3 + 8 + 18 = 29$, un point critique vérifie $14a + 6b = 29$ et $6a + 4b = 14$.

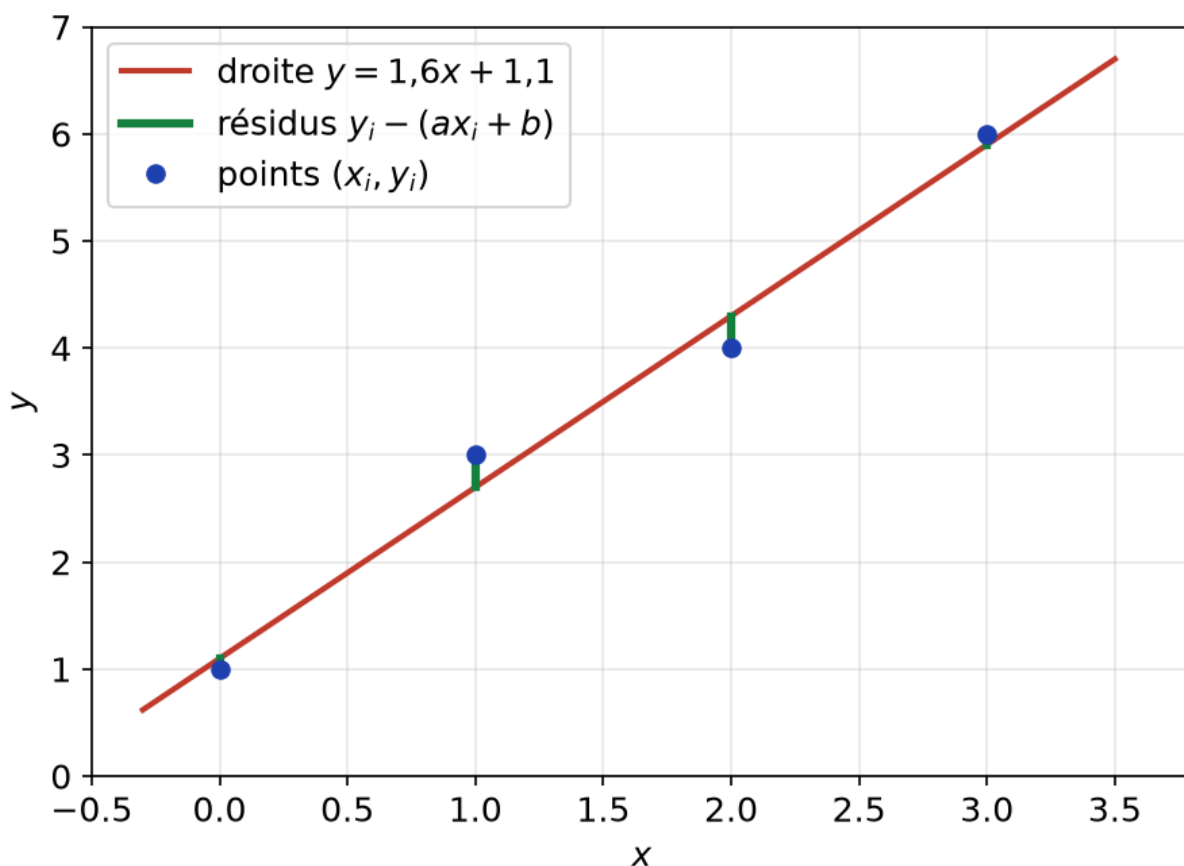
2. La seconde équation donne $b = \frac{14-6a}{4} = 3,5 - 1,5a$. En reportant, $14a + 21 - 9a = 29$, donc $5a = 8$. **On obtient** $a = 1,6$ et $b = 1,1$.
3. Les dérivées secondes sont constantes : $\partial_a^2 S = 2 \sum x_i^2 = 28$, $\partial_a \partial_b S = 2 \sum x_i = 12$ et $\partial_b^2 S = 2 \cdot 4 = 8$. Ainsi $rt - s^2 = 224 - 144 = 80 > 0$ et $r = 28 > 0$. **Le point $(1,6; 1,1)$ est un minimum local strict.**

4. Comme S est un polynôme de degré 2, sa formule de Taylor en $(a_0, b_0) = (1,6; 1,1)$ est exacte, sans reste. Le gradient y étant nul,

$$S(a_0 + h, b_0 + k) = S(a_0, b_0) + 14h^2 + 12hk + 4k^2 = S(a_0, b_0) + 4\left(k + \frac{3h}{2}\right)^2 + 5h^2.$$

Le terme ajouté est positif, et nul seulement si $h = k = 0$. **Le minimum est donc global** ; il vaut $0,01 + 0,09 + 0,09 + 0,01 = 0,2$. La droite des moindres carrés est $y = 1,6x + 1,1$.

La figure ci-dessous représente cette droite et les résidus verticaux, dont la somme des carrés est minimale.

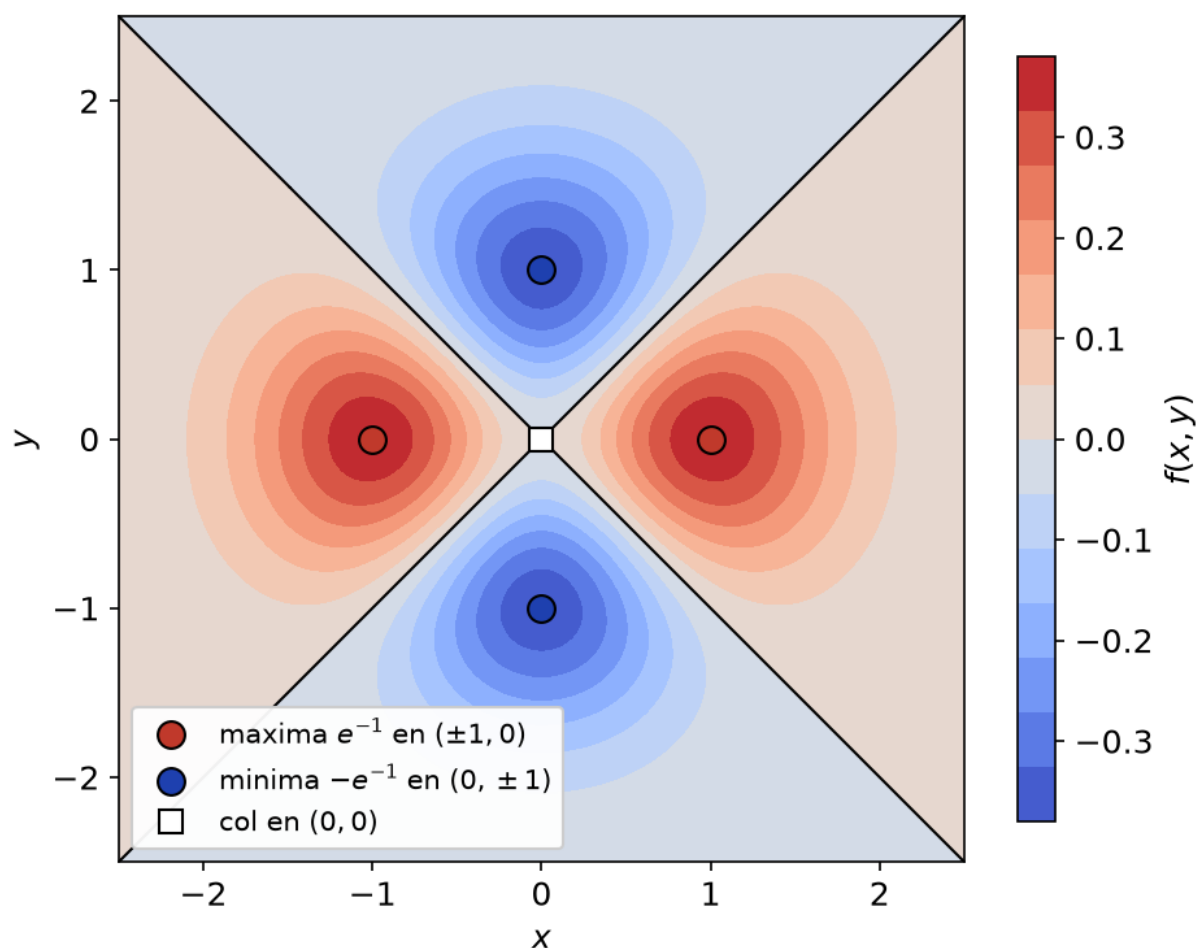


Corrigé de l'exercice 20 : Problème, étude complète d'une fonction

- La fonction f est le produit d'un polynôme et de la composée de l'exponentielle avec un polynôme. **Elle est donc de classe C^2** (et même C^∞). Ensuite, x et y n'interviennent que par x^2 et y^2 , donc $f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y)$. Enfin, échanger x et y change $x^2 - y^2$ en son opposé : $f(y, x) = -f(x, y)$.
- Notons $E = e^{-x^2-y^2}$, de sorte que $\partial_1 E = -2xE$. Par la formule du produit, $\partial_1 f = 2xE - 2x(x^2-y^2)E = 2x(1-x^2+y^2)E$. De même, $\partial_2 f = -2yE - 2y(x^2-y^2)E$, donc $\partial_2 f = -2y(1+x^2-y^2)E$.

3. Comme $E > 0$, un point critique vérifie « $x = 0$ ou $x^2 - y^2 = 1$ » et « $y = 0$ ou $y^2 - x^2 = 1$ ». Le cas $x^2 - y^2 = 1$ et $y^2 - x^2 = 1$ est impossible, car la somme donnerait $0 = 2$. Il reste trois cas. Si $x = 0$ et $y = 0$, on obtient l'origine. Si $x = 0$ et $y^2 = 1$, on obtient $(0, \pm 1)$. Si $y = 0$ et $x^2 = 1$, on obtient $(\pm 1, 0)$. **Les points critiques sont $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$.**
4. On dérive $\partial_1 f = 2x(1 - x^2 + y^2)E$. Par rapport à x :
 $\partial_1^2 f = [2(1 - x^2 + y^2) - 4x^2]E - 4x^2(1 - x^2 + y^2)E$. En $(1,0)$, on obtient $r = (0 - 4)e^{-1} = -4e^{-1}$. Par rapport à y :
 $\partial_2 \partial_1 f = 4xyE - 4xy(1 - x^2 + y^2)E$, qui s'annule en $(1,0)$. De même,
 $\partial_2^2 f = [-2(1 + x^2 - y^2) + 4y^2]E + 4y^2(1 + x^2 - y^2)E$, qui vaut $-4e^{-1}$ en $(1,0)$.
Ainsi $H_f(1,0) = -4e^{-1} I_2$, avec $rt - s^2 = 16e^{-2} > 0$ et $r < 0$. **Le point $(1,0)$ est un maximum local strict, de valeur e^{-1} .** Par la symétrie $f(-x, y) = f(x, y)$, $(-1, 0)$ **est aussi un maximum local strict.** Enfin, pour (x, y) proche de $(0, 1)$, le point (y, x) est proche de $(1, 0)$. Ainsi $f(x, y) = -f(y, x) \geq -f(1, 0) = f(0, 1)$. La symétrie $f(x, -y) = f(x, y)$ traite ensuite $(0, -1)$. **Les points $(0, \pm 1)$ sont des minima locaux stricts, de valeur $-e^{-1}$.**
5. En $(0,0)$, les formules précédentes donnent $r = 2$, $s = 0$ et $t = -2$. Donc $rt - s^2 = -4 < 0$. **L'origine est un point col.** On le voit aussi directement : $f(x, 0) = x^2 e^{-x^2} > 0$ et $f(0, y) = -y^2 e^{-y^2} < 0$ pour $x, y \neq 0$.
6. La fonction $\phi(s) = se^{-s}$ a pour dérivée $(1 - s)e^{-s}$. Elle croît sur $[0, 1]$ et décroît sur $[1, +\infty[$. Son maximum sur $[0, +\infty[$ vaut donc $\phi(1) = e^{-1}$. Ensuite, avec $s = x^2 + y^2$, on a $|x^2 - y^2| \leq s$, donc $|f(x, y)| \leq se^{-s} \leq e^{-1}$. Or $f(\pm 1, 0) = e^{-1}$ et $f(0, \pm 1) = -e^{-1}$. **Le maximum global de f vaut e^{-1} , atteint en $(\pm 1, 0)$; le minimum global vaut $-e^{-1}$, atteint en $(0, \pm 1)$.**

La figure ci-dessous résume l'étude : deux sommets rouges, deux cuvettes bleues et un col au centre, sur les diagonales où f s'annule.



Point de méthode : dans une étude globale, exploitez les symétries pour réduire les calculs de hessienne, puis cherchez une majoration qui atteint le cas d'égalité.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [différentielle et extrema, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur différentielle et extrema](#)
- À maîtriser avant : [Plusieurs variables : limites et dérivées partielles](#)

- Chapitre précédent : [Plusieurs variables : limites et dérivées partielles](#)
- Chapitre suivant : [Espaces probabilisés et conditionnement](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)