Diagonalisation

Exercice 1 : Éléments propres d'une matrice d'ordre 2

On considère la matrice $A = \left([\text{ray?}] \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix},\right)$.

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A et en déduire le spectre de A.
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
3. Justifier que A est diagonalisable et donner P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 : Reconnaître des vecteurs propres

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$, $v_4 = (1,0,0)$, $v_5 = (1,1,1)$.

1. Pour chaque v_i, dire s'il est vecteur propre de M et, le cas échéant, préciser la valeur propre associée.
2. Sans calculer χ_M, montrer que M est diagonalisable et donner son spectre.
3. En déduire χ_M, puis vérifier la valeur de $\operatorname{tr}(M)$ et de $\det M$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 3 : Sous-espaces stables

1. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P \to P'$. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par D.

3. Soit $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, vue comme endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par R. Donner une interprétation géométrique.

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2, e_3). Montrer que $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par f et écrire la matrice de l'endomorphisme induit.

Exercice 4 : Spectre d'une matrice triangulaire et multiplicités

Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner, sans calcul de déterminant, le polynôme caractéristique et le spectre de T.

2. Pour chaque valeur propre, préciser la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique.

3. La matrice T est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 : Polynôme caractéristique et invariants

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)\, X + \det A$.

2. Montrer que, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices A et A^T ont le même polynôme

caractéristique. Ont-elles les mêmes sous-espaces propres ?

3. Montrer que A est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que 1 et 2 soient valeurs propres de A et $\mathrm{tr}(A) = 6$. Déterminer la troisième valeur propre, $\det A$, et justifier que A est diagonalisable.

Exercice 6 : Puissances d'une matrice d'ordre 2

On reprend la matrice $A = \left([\text{ray?}] \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix},\right)$ de l'exercice 1.

1. Calculer P^{-1}, où P est la matrice de passage obtenue à l'exercice 1.

2. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Vérifier le résultat pour $n = 0$ et $n = 1$, puis calculer A^3.

Exercice 7 : Diagonalisation d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & & \\ , & 1 & \\ -1 & 1 & 2{,}2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A sous forme factorisée.

2. Déterminer les sous-espaces propres de A et leurs dimensions.

3. Montrer que A est diagonalisable et expliciter P et D.

4. Vérifier que $(A - I_3)^2 = A - I_3$, puis en déduire que $A^n = I_3 + (2^n - 1)(A - I_3)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 8 : Une matrice non diagonalisable

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & & \\ , & -1 & \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_B en développant selon une colonne bien choisie.
2. Déterminer les sous-espaces propres de B.
3. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 9 : Diagonalisabilité selon un paramètre

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le spectre de A_a et les multiplicités algébriques.
2. Calculer le rang de $A_a - I_3$ selon les valeurs de a.
3. En déduire les valeurs de a pour lesquelles A_a est diagonalisable.
4. Dans ce cas, diagonaliser A_a.

Exercice 10 : Diagonalisation sur R et sur C

Soit $B = \begin{pmatrix} [\backslash \mathrm{ary?}] 1 & -2 \\ 1 & -1_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_B. La matrice B est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

2. Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et déterminer une base de vecteurs propres.

3. Calculer B^2, puis B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 : Matrices de rang 1

Soit $n \geq 2$, et soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ deux colonnes non nulles. On pose $A = UV^T$.

1. Montrer que A est de rang 1 et que $\mathrm{tr}(A) = V^T U$.

2. Montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)\, A$.

3. Déterminer $\dim E_0(A)$. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.

4. En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

5. Application : diagonaliser la matrice J_n dont tous les coefficients valent 1, et montrer que $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 12 : Éléments propres d'endomorphismes de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(P) = (X+1)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Écrire la matrice de u dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$. En déduire le spectre de u et justifier que u est diagonalisable.

3. Calculer $u\left((X+1)^k\right)$ et en déduire une base de vecteurs propres de u.

4. Montrer en revanche que la dérivation $D : P \to P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas diagonalisable.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 13 : La transposition dans les matrices carrées

Soit $n \geq 2$ et $\tau : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \to M^T$.

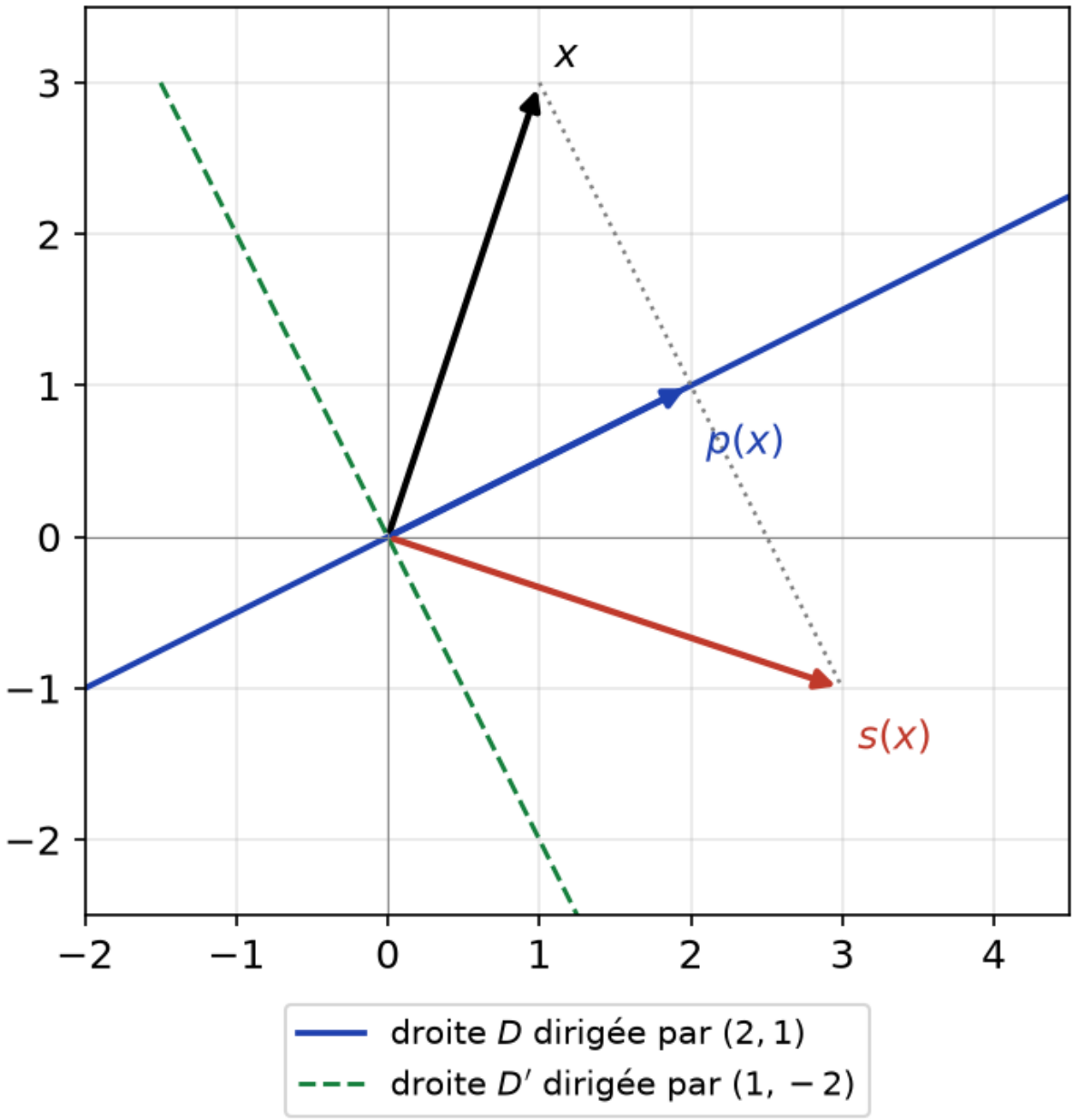
1. Montrer que τ est linéaire et calculer $\tau \circ \tau$.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}(\tau) \subset \{-1, 1\}$, puis identifier $E_1(\tau)$ et $E_{-1}(\tau)$.
3. Montrer que τ est diagonalisable. Donner les dimensions des sous-espaces propres.
4. En déduire $\mathrm{tr}(\tau)$ et $\det(\tau)$.

Exercice 14 : Projecteurs et symétries

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. Montrer que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$, puis que $E = \ker p \oplus \ker(p - \mathrm{id}_E)$. En déduire que p est diagonalisable.
2. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Montrer de même que s est diagonalisable.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P^2 = P$, puis déterminer $E_1(P)$ et $E_0(P)$.
4. Calculer $S = 2P - I_2$, vérifier que $S^2 = I_2$ et donner ses sous-espaces propres. Calculer $P\,x$ et $S\,x$ pour $x = (1,3)$.

La figure suivante représente la situation de la question 4 : la droite D, la droite D', le vecteur x et ses images.



Exercice 15 : Une famille d'exponentielles

Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \to f'$.

1. Montrer que tout réel λ est valeur propre de D et que $E_\lambda(D)$ est la droite engendrée par $f_\lambda : x \to e^{\lambda x}$.

2. En déduire que, pour des réels $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p$, la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_p})$ est libre.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. En utilisant l'endomorphisme $D^2 = D \circ D$, montrer que la famille $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, où $c_k(x) = \cos(kx)$, est libre.

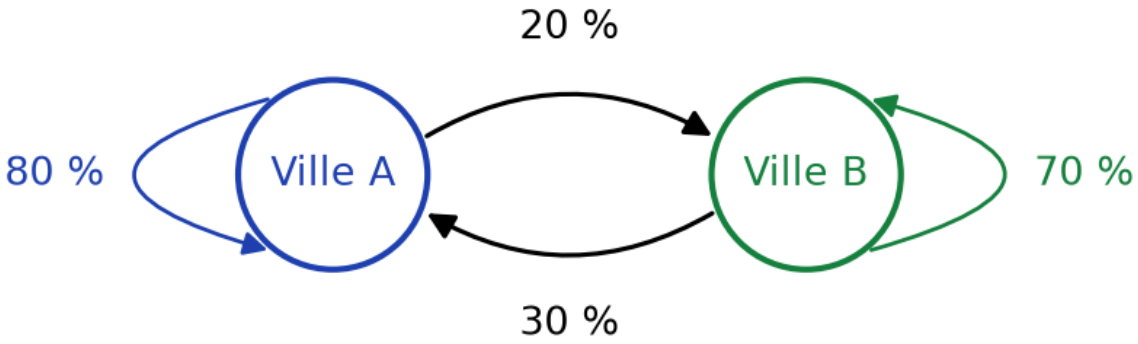
Exercice 16 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice C telle que $X_{n+1} = CX_n$.
2. Diagonaliser C.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n. Vérifier pour $n \leq 3$.
4. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 17 : Système de suites récurrentes

Une population se répartit entre deux villes A et B. Chaque année, 20 % des habitants de A partent vivre en B et 30 % des habitants de B partent vivre en A ; les autres restent. On note x_n et y_n les parts de la population totale vivant en A et en B l'année n, avec $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$. Le schéma ci-dessous résume les flux annuels.



1. Écrire le système liant (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n), puis la matrice M correspondante.
2. Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres de M .
3. En déduire x_n et y_n en fonction de n, puis leurs limites.
4. Calculer M^n et sa limite quand $n \to +\infty$. Interpréter les colonnes de la limite.

Exercice 18 : Système différentiel d'ordre 2

On cherche les couples de fonctions dérivables (x, y) sur $\mathbb{R}$ tels que $x' = x + 2y$ et $y' = 2x + y$.

1. Écrire le système sous la forme $X' = AX$ et diagonaliser A .
2. Déterminer toutes les solutions du système.
3. Déterminer la solution telle que $x(0) = 2$ et $y(0) = 0$.
4. Déterminer les conditions initiales $(x(0), y(0))$ pour lesquelles la solution est bornée sur $[0, +\infty[$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

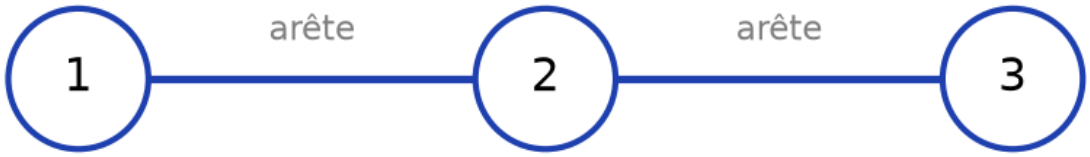
Exercice 19 : Système différentiel d'ordre 3

Avec la matrice A de l'exercice 7, on étudie le système $x' = y + z$, $y' = -x + 2y + z$, $z' = -x + y + 2z$.

1. Vérifier que le système s'écrit $X' = AX$.
2. Donner la forme générale des solutions.
3. Déterminer la solution telle que $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Vérifier le résultat dans la première équation.

Exercice 20 : Chemins dans un graphe

On considère le graphe ci-dessous, à trois sommets 1, 2, 3, où 1 est relié à 2 et 2 est relié à 3. Sa matrice d'adjacence est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que le coefficient (i, j) de A^k est le nombre de chemins de longueur k allant du sommet i au sommet j.



1. Calculer χ_A, les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.
2. Justifier que A est diagonalisable, puis montrer que $A^3 = 2A$.
3. En déduire A^{2k+1} pour $k \in \mathbb{N}$ et A^{2k} pour $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Combien existe-t-il de chemins de longueur 10 allant du sommet 1 au sommet 3 ? du sommet 2 au

sommet 2 ? de longueur 7 du sommet 1 au sommet 2 ?

Exercice 21 : Démonstration du critère de diagonalisabilité

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

1. Montrer par récurrence sur p que la somme $E_{\lambda_1}(u) + \ldots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe.
2. Soit $d = \dim E_{\lambda_1}(u)$. En complétant une base de $E_{\lambda_1}(u)$, montrer que $(X - \lambda_1)^d$ divise χ_u. Conclure que $1 \leq d \leq m(\lambda_1)$.
3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}(u) = n$.
4. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $\dim E_{\lambda_i}(u) = m(\lambda_i)$ pour tout i.

Exercice 22 : Endomorphismes qui commutent

Soit u un endomorphisme de E, de dimension n, possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$. On note $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes v tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Montrer que chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v.
2. En déduire que tout $v \in \mathcal{C}(u)$ est diagonalisable dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Réciproquement, montrer que tout endomorphisme diagonal dans cette base commute avec u.
3. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$, avec $v(e_i) = \mu_i e_i$. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré au plus $n-1$ tel que $v = Q(u)$.
4. En déduire que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de dimension n, de base

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$.

Exercice 23 : Racines carrées d'une matrice

Soit $A = \left([\backslash \mathrm{ray?}] \begin{matrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{matrix},\right)$. On cherche toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

1. Diagonaliser A.
2. Soit B telle que $B^2 = A$. Montrer que $AB = BA$.
3. En déduire que les sous-espaces propres de A sont stables par B, puis que $P^{-1}BP$ est diagonale.
4. Déterminer toutes les solutions B et les écrire explicitement.

Exercice 24 : Problème : matrices compagnons et récurrences d'ordre 3

Soient c_0, c_1, c_2 des réels et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \& c_2 \end{pmatrix}$.

Partie A : étude générale.

1. Montrer que $\chi_C(X) = X^3 - c_2 X^2 - c_1 X - c_0$.
2. Soit λ une valeur propre réelle de C. Montrer que $E_\lambda(C)$ est la droite engendrée par $(1, \lambda, \lambda^2)$.
3. En déduire que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_C possède trois racines réelles distinctes.

Partie B : application. On considère la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$ et $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

1. Écrire $X_{n+1} = CX_n$ avec $X_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})^T$ et préciser c_0, c_1, c_2.
2. Factoriser χ_C et diagonaliser C.
3. En déduire que $u_n = 1 + (-1)^n + 2^n$ pour tout n. Vérifier pour $n = 3$.
4. La matrice compagnon de la récurrence $v_{n+3} = 3v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n$ est-elle diagonalisable ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : diagonalisation, cours de maths en L2
- Chapitre précédent : Intégrales généralisées
- Chapitre suivant : Polynômes d'endomorphismes et trigonalisation
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L2 par chapitre

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L2 et la licence de maths de L1 à L3