

Diagonalisation et trigonalisation

Exercice 1 : Diagonalisation d'une matrice 2x2

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A et le spectre de A .
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre.
3. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P D P^{-1}$. Vérifier le résultat en calculant AP .

Exercice 2 : Trois valeurs propres distinctes

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A . On pourra ajouter la troisième colonne à la première dans $\det(X I_3 - A)$.
2. Justifier sans autre calcul que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une matrice de passage P et la matrice diagonale D associée.

Exercice 3 : Matrices non diagonalisables

Justifier, en choisissant à chaque fois l'argument le plus rapide, que les matrices suivantes ne sont pas diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

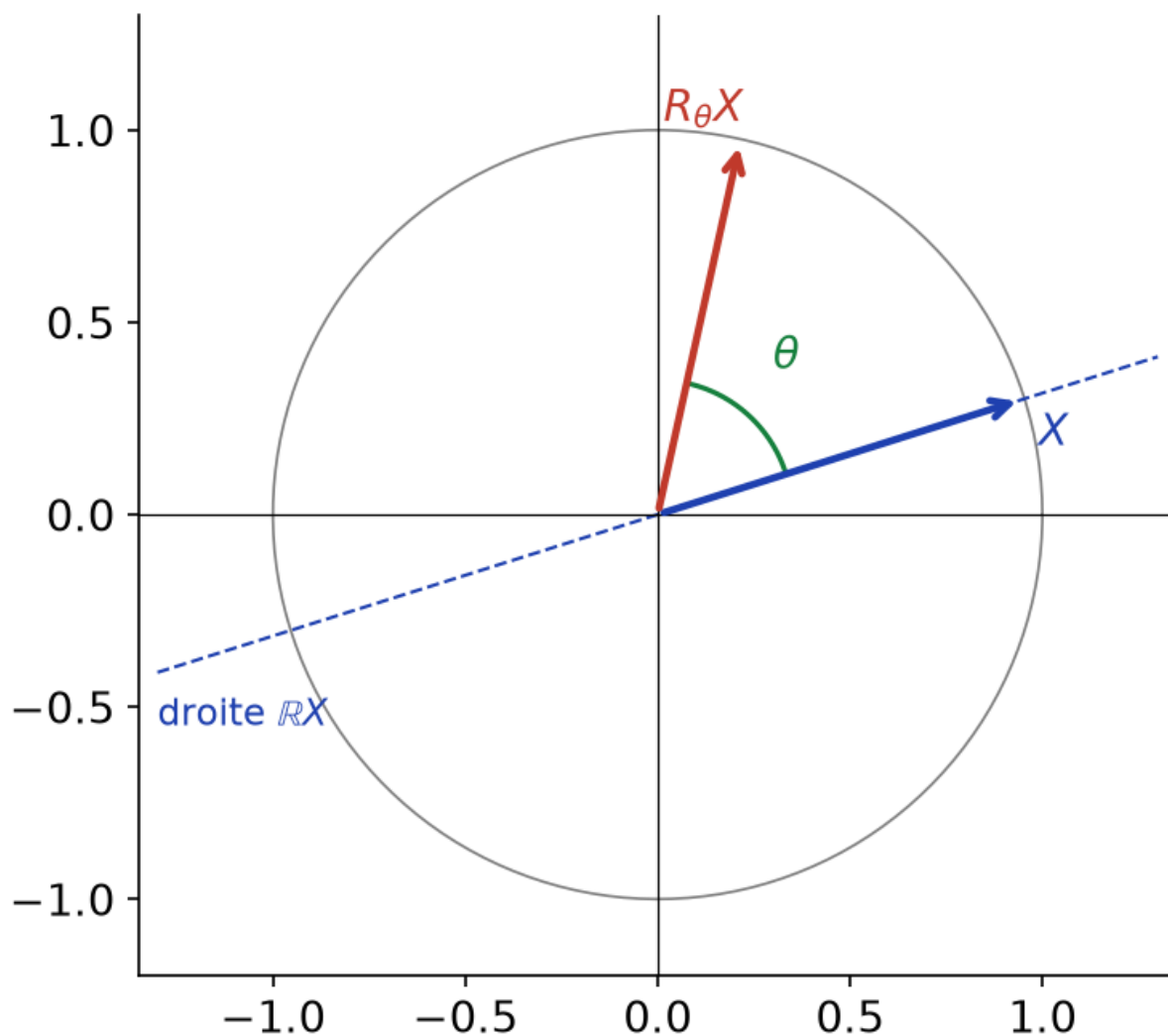
1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : Matrice de rotation sur R et sur C

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. La figure ci-dessous rappelle l'action de R_θ sur un vecteur X du plan.



1. Pour $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, que vaut R_θ ? Est-elle diagonalisable ?
2. On suppose $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Expliquer géométriquement pourquoi R_θ n'a aucun vecteur propre réel, puis le retrouver par le calcul de X_{R_θ} .
3. Montrer que R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et donner une base de vecteurs propres.
4. La matrice R_θ est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ lorsque $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$?

Exercice 5 : Valeur propre double et matrice de passage

On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A sous forme factorisée.
2. Déterminer les sous-espaces propres et leurs dimensions.
3. Montrer que A est diagonalisable, puis donner P inversible et D diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.
4. Calculer P^{-1} et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : Diagonalisabilité selon un paramètre

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner le spectre de $A_{a,b}$ et les multiplicités.
2. Déterminer, selon a , le rang de $A_{a,b} - I_3$.
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $A_{a,b}$ soit diagonalisable.
4. Dans ce cas, donner une matrice de passage.

Exercice 7 : Puissances d'une matrice diagonalisable

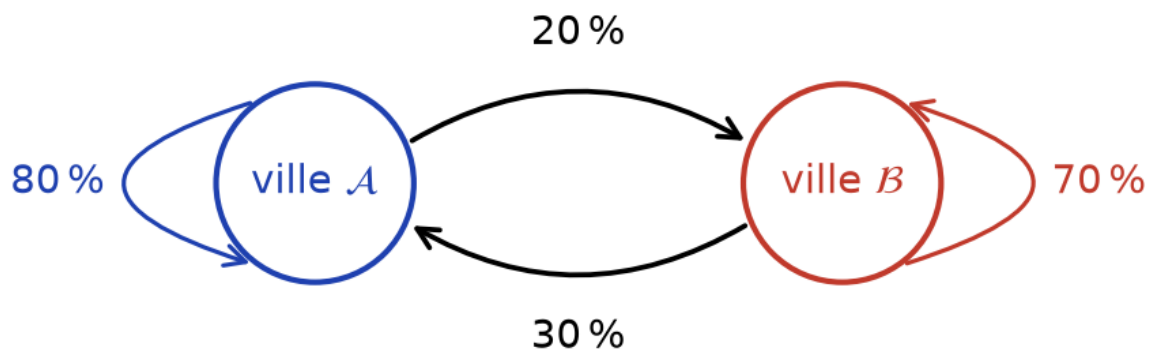
On considère $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifier la formule pour $n = 0$ et $n = 1$.
3. La formule obtenue reste-t-elle valable pour $n = -1$? Vérifier en calculant A^{-1} directement.

Exercice 8 : Évolution de deux populations

Deux villes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ échangent des habitants chaque année. Chaque année, 20 % des habitants de $\mathcal{A}$ partent pour $\mathcal{B}$ et 30 % des habitants de $\mathcal{B}$ partent pour $\mathcal{A}$; les autres restent. Il n'y a ni naissance, ni décès, ni échange extérieur. On note a_n et b_n les populations (en milliers) l'année n , avec $a_0 = 100$ et $b_0 = 0$. Le schéma ci-dessous résume les échanges.



1. Écrire $X_{n+1} = M X_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et M à préciser.
2. Diagonaliser M .
3. Exprimer a_n et b_n en fonction de n , puis déterminer leurs limites.
4. Montrer que la limite ne dépend que de la population totale $a_0 + b_0$.

Exercice 9 : Suite récurrente d'ordre 2

On définit (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire $X_{n+1} = C X_n$ avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.
2. Diagonaliser C .
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n , et un équivalent de u_n .

Exercice 10 : Trigonalisation d'une matrice 2×2

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A et montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer P inversible telle que $P^{-1} A P = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. Calculer T^n , puis A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Contrôler le résultat pour $n = 2$.

Exercice 11 : Trigonalisation d'une matrice 3×3

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer χ_A .
2. Déterminer les sous-espaces propres. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Trouver une base (V_1, V_2, V_3) dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Calculer T^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 : Matrices nilpotentes explicites

On considère $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont nilpotentes et donner leur indice de nilpotence.
2. Donner le polynôme caractéristique de chacune.
3. Montrer que $I_3 + N_2$ est inversible et calculer son inverse. Faire de même pour $I_3 + N_1$.
4. Pourquoi ni N_1 ni N_2 n'est diagonalisable ?

Exercice 13 : Caractérisation des matrices nilpotentes

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose A nilpotente. Montrer que $\text{Sp}(A) = \{0\}$ puis que $\chi_A = X^n$.
2. On suppose $\chi_A = X^n$. Justifier que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T .
3. Soit T triangulaire supérieure stricte et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Montrer par récurrence sur k que $T^k e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-k})$ pour $j > k$ et $T^k e_j = 0$ pour $j \leq k$. En déduire que $A^n = 0$.
4. Montrer qu'une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.
5. Soit N nilpotente. Calculer $\text{tr } N$ et $\det(I_n + N)$.

Exercice 14 : Traces des puissances et nilpotence

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ comptées avec multiplicité. On pose $p_k = \text{tr}(A^k)$, $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$ et $\sigma_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

1. En trigonalisant A , montrer que $p_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que $p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $p_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.
3. On suppose $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Montrer que A est nilpotente, puis que $A^3 = 0$.
4. Montrer par un exemple que les seules conditions $p_1 = p_2 = 0$ ne suffisent pas.

Exercice 15 : La matrice J et ses voisines

Soit $n \geq 2$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Déterminer le rang de J et la dimension de $\ker J$.
2. Calculer JU pour $U = (1, \dots, 1)^T$. En déduire le spectre de J et montrer que J est diagonalisable.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M = aI_n + bJ$. Déterminer les valeurs propres de M , justifier qu'elle est diagonalisable et calculer $\det M$.
4. Application : calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 : Matrices de rang 1

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux colonnes non nulles $U, V \in \mathbb{R}^n$ telles que $A = U V^T$.
2. Montrer que $V^T U = \operatorname{tr} A$, puis que $A^2 = (\operatorname{tr} A) A$.
3. Montrer que 0 est valeur propre avec $\dim E_0 = n - 1$ et que $A U = (\operatorname{tr} A) U$. En déduire $\chi_A = X^{n-1}(X - \operatorname{tr} A)$.
4. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq 0$.
5. Application : les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 17 : Transposition dans $M_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geq 2$ et $\tau : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^T$.

1. Vérifier que τ est un endomorphisme et calculer $\tau \circ \tau$.
2. Montrer que $\operatorname{Sp}(\tau) \subset \{-1, 1\}$ et identifier les sous-espaces propres.
3. Montrer que τ est diagonalisable.
4. Calculer $\operatorname{tr} \tau$ et $\det \tau$ de deux façons pour la trace : avec les valeurs propres, puis avec la base canonique (E_{ij}) .

Exercice 18 : Vrai ou faux sur la diagonalisation

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, avec une démonstration ou un contre-exemple. Toutes les matrices sont dans $M_n(\mathbb{K})$.

1. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

2. Deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique sont semblables.
3. Si A est diagonalisable et inversible, alors A^{-1} est diagonalisable.
4. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
5. A est diagonalisable si et seulement si A^T l'est.
6. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $n \geq 1$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = (X - 1)^k (X + 1)^{n-k}$. Montrer que $\varphi(P_k) = (2k - n)P_k$.
3. En déduire que φ est diagonalisable, son spectre et une base de vecteurs propres.
4. Pour $n = 2$, écrire la matrice de φ dans la base $(1, X, X^2)$ et vérifier les résultats précédents.

Exercice 20 : Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec des $\lambda_i \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer qu'une matrice B vérifie $BD = DB$ si et seulement si B est diagonale.
2. Soit A possédant n valeurs propres distinctes, avec $A = PDP^{-1}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices qui commutent avec A et donner sa dimension.

3. Montrer que toute matrice de $\mathcal{C}(A)$ est diagonalisable et que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B .
4. Application : déterminer les matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 : Racines carrées d'une matrice

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On cherche les $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

1. Diagonaliser A .
2. Soit B une solution. Montrer que $AB = BA$, puis que B laisse stable chaque sous-espace propre de A .
3. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale et déterminer toutes les solutions.
4. Montrer en revanche que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 22 : Problème : matrices compagnons et récurrences d'ordre 3

Soit $(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$. On étudie les suites réelles vérifiant $u_{n+3} = c_2 u_{n+2} + c_1 u_{n+1} + c_0 u_n$ pour tout n .

Partie A : étude générale.

1. Montrer que $\chi_C = X^3 - c_2 X^2 - c_1 X - c_0$.
2. Soit λ une valeur propre réelle de C . Montrer que $E_\lambda(C) = \text{Vect}((1, \lambda, \lambda^2))$.

3. En déduire que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si χ_C possède trois racines réelles distinctes.

Partie B : trois racines distinctes. On prend $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$, avec $u_0 = 3$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 6$.

1. Factoriser χ_C et diagonaliser C .
2. Avec $X_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})$, décomposer X_0 sur la base propre et en déduire u_n .

Partie C : une racine double. On prend $w_{n+3} = w_{n+2} + w_{n+1} - w_n$, avec $w_0 = 0$, $w_1 = 4$ et $w_2 = 4$.

1. Factoriser χ_C et montrer que C n'est pas diagonalisable.
2. Avec $V_1 = (1, 1, 1)$ et $V_3 = (1, -1, 1)$, trouver $V_2 = (0, y, z)$ tel que $(C - I_3)V_2 = V_1$. Écrire la matrice triangulaire T de C dans la base (V_1, V_2, V_3) .
3. Montrer que $C^n V_2 = V_2 + n V_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Décomposer $Y_0 = (w_0, w_1, w_2)$ sur (V_1, V_2, V_3) et en déduire w_n .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [diagonalisation et trigonalisation, cours de maths spé](#)
- À maîtriser avant : [Éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- Chapitre précédent : [Éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- Chapitre suivant : [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)