

# Diagonalisation et trigonalisation

## I. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$  et  $u$  est un endomorphisme de  $E$ . Le chapitre précédent a introduit les valeurs propres, les sous-espaces propres  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$  et le polynôme caractéristique  $\chi_u$ . Nous les utilisons maintenant pour simplifier la matrice de  $u$ .

L'idée est simple. Une matrice diagonale se manipule sans effort : ses puissances, son déterminant et son rang se lisent directement. On cherche donc une base dans laquelle  $u$  agit par de simples dilatations.

### Définition :

L'endomorphisme  $u$  est **diagonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale. Autrement dit, il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale : il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $D$  diagonale telles que  $A = P D P^{-1}$ .

Les deux notions se correspondent. En effet,  $A$  est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé l'est. Dans ce cas, les colonnes de  $P$  forment une base de vecteurs propres, et les coefficients diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres associées, dans le même ordre.

### Remarque :

La diagonalisabilité d'une matrice réelle dépend du corps choisi. Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  peut être

diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sans l'être dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Il faut donc toujours préciser le corps de travail.

## 1. Caractérisation par les sous-espaces propres

On sait que les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Le théorème suivant en tire la caractérisation fondamentale.

### Théorème :

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $u$  est diagonalisable ;
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$  ;
- $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_{\lambda}(u) = n$ .

### Démonstration :

Notons  $F$  la somme des sous-espaces propres. Cette somme est directe, donc  $\dim F = \sum \dim E_{\lambda}(u)$ . Ainsi, les deux dernières assertions sont équivalentes, car  $F = E$  équivaut à  $\dim F = n$ .

Si  $u$  est diagonalisable, une base de vecteurs propres est contenue dans  $F$ . Par conséquent  $F = E$ . Réciproquement, si  $F = E$ , on concatène des bases des  $E_{\lambda}(u)$ . On obtient une base de  $E$  formée de vecteurs propres, d'où la diagonalisabilité.

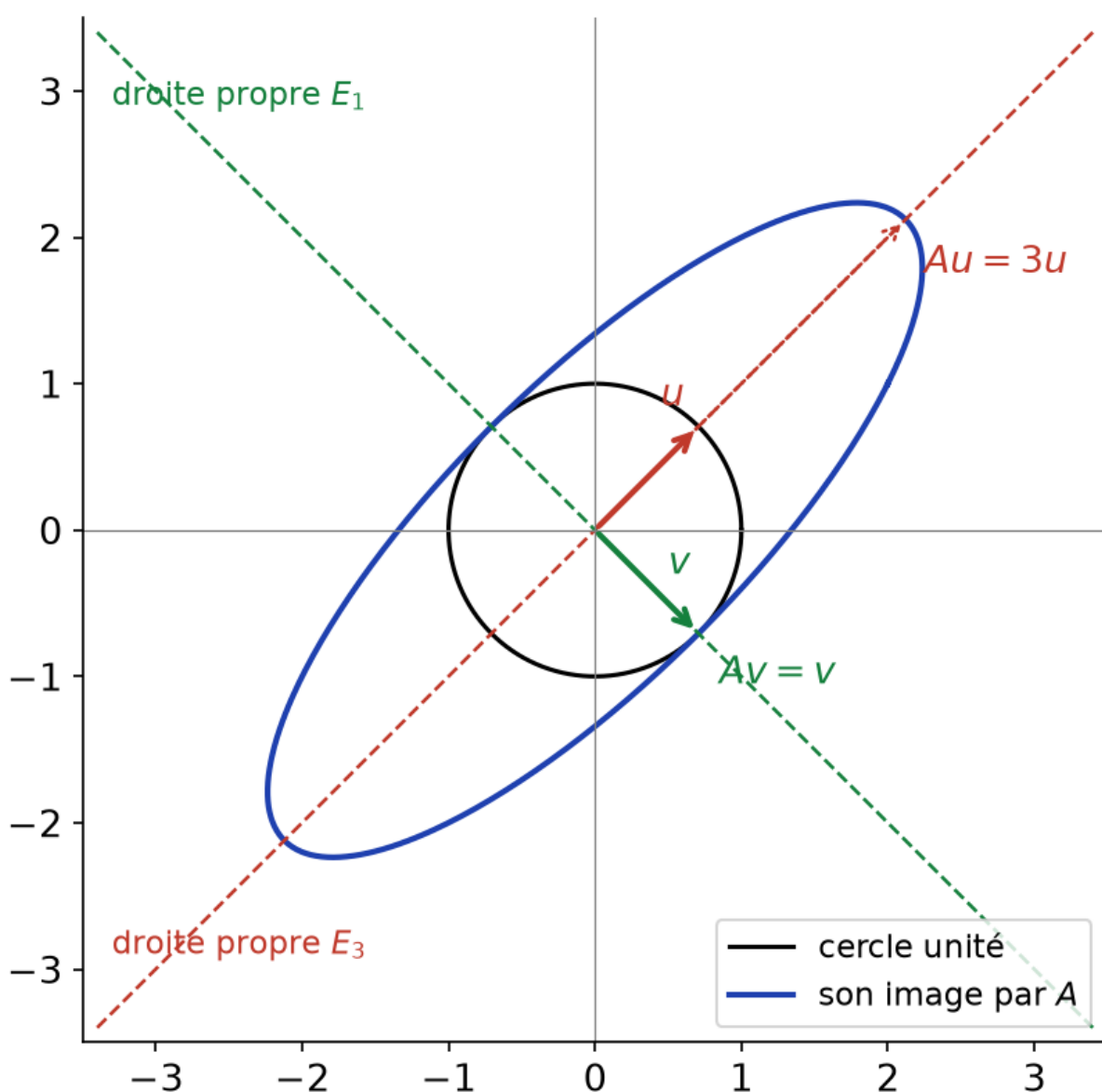
### Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . On a  $\chi_A = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$ . De plus,

$u = (1, 1)$  vérifie  $Au = 3u$  et  $v = (1, -1)$  vérifie  $Av = v$ . Les deux droites propres sont supplémentaires, donc  $A$  est diagonalisable :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La figure ci-dessous montre ce que signifie géométriquement la diagonalisation. L'image du cercle unité par  $A$  est une ellipse dont les axes portent les deux droites propres :  $A$  dilate d'un facteur 3 le long de  $E_3$  et laisse fixe la direction  $E_1$ .



## II. Critères de diagonalisation

---

### 1. Le cas de $n$ valeurs propres distinctes

---

#### Proposition :

Si  $\mathcal{U}$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors  $\mathcal{U}$  est diagonalisable, et chacun de ses sous-espaces propres est une droite.

#### Démonstration :

Chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1. La somme des  $n$  dimensions vaut donc au moins  $n$ . Or cette somme est directe, donc elle vaut au plus  $n$ . Ainsi, elle vaut exactement  $n$  et chaque dimension vaut 1. On conclut par le théorème précédent.

#### Attention :

La condition est suffisante mais pas nécessaire. Par exemple,  $I_n$  est diagonale, donc diagonalisable, alors qu'elle n'a qu'une seule valeur propre.

### 2. Le critère avec le polynôme caractéristique

---

Rappelons que la multiplicité  $m_\lambda$  d'une valeur propre  $\lambda$  est son ordre de multiplicité comme racine de  $\chi_{\mathcal{U}}$ . On a toujours  $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ .

#### Théorème :

L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

- $\chi_u$  est **scindé** sur  $\mathbb{K}$  ;
- pour toute valeur propre  $\lambda$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$ .

### Démonstration :

Supposons  $u$  diagonalisable, de matrice  $D$  diagonale dans une base adaptée. La valeur propre  $\lambda$  apparaît  $d_\lambda = \dim E_\lambda(u)$  fois sur la diagonale. Par conséquent  $\chi_u = \prod_{\lambda} (X - \lambda)^{d_\lambda}$  : ce polynôme est scindé et  $m_\lambda = d_\lambda$ .

Réciproquement, si  $\chi_u$  est scindé, la somme des multiplicités vaut  $\deg \chi_u = n$ . Avec l'égalité des dimensions, on obtient  $\sum \dim E_\lambda(u) = n$ . Le théorème de la partie I permet alors de conclure.

### Remarque :

Pour une valeur propre simple, l'égalité  $\dim E_\lambda(u) = 1 = m_\lambda$  est automatique. En pratique, on ne vérifie donc la dimension que pour les valeurs propres multiples.

### Méthode :

Pour diagonaliser une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

1. calculer  $\chi_A = \det(X I_n - A)$ , en factorisant au fur et à mesure grâce aux opérations sur les lignes et les colonnes ;
2. vérifier que  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et lister les valeurs propres avec leurs multiplicités ;
3. pour chaque valeur propre, résoudre  $(A - \lambda I_n) X = 0$  et donner une base de  $E_\lambda$  ;
4. comparer  $\dim E_\lambda$  et  $m_\lambda$  ; si l'égalité vaut partout, ranger les vecteurs trouvés en colonnes dans  $P$  ;
5. écrire  $D$  avec les valeurs propres dans l'ordre des colonnes de  $P$ , puis contrôler une

colonne en calculant  $AP$ .

### Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . La somme de chaque ligne vaut 2, donc  $(1, 1, 1)$  est propre pour la valeur 2. Ensuite,  $A + I_3$  a toutes ses colonnes égales, donc son rang vaut 1. Ainsi,  $-1$  est valeur propre et  $\dim E_{-1} = 2$ . Comme la trace vaut  $0 = 2 + (-1) + (-1)$ , on obtient  $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$ . Les dimensions sont égales aux multiplicités, donc  $A$  est diagonalisable :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

### 3. Justifier qu'une matrice n'est pas diagonalisable

Le critère fournit deux obstructions. D'abord, le polynôme caractéristique peut ne pas être scindé. Ensuite, un sous-espace propre peut être trop petit. Un argument très rapide sert aussi souvent : si  $A$  est diagonalisable et n'a qu'une valeur propre  $\lambda$ , alors  $A = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda I_n$ .

### Méthode :

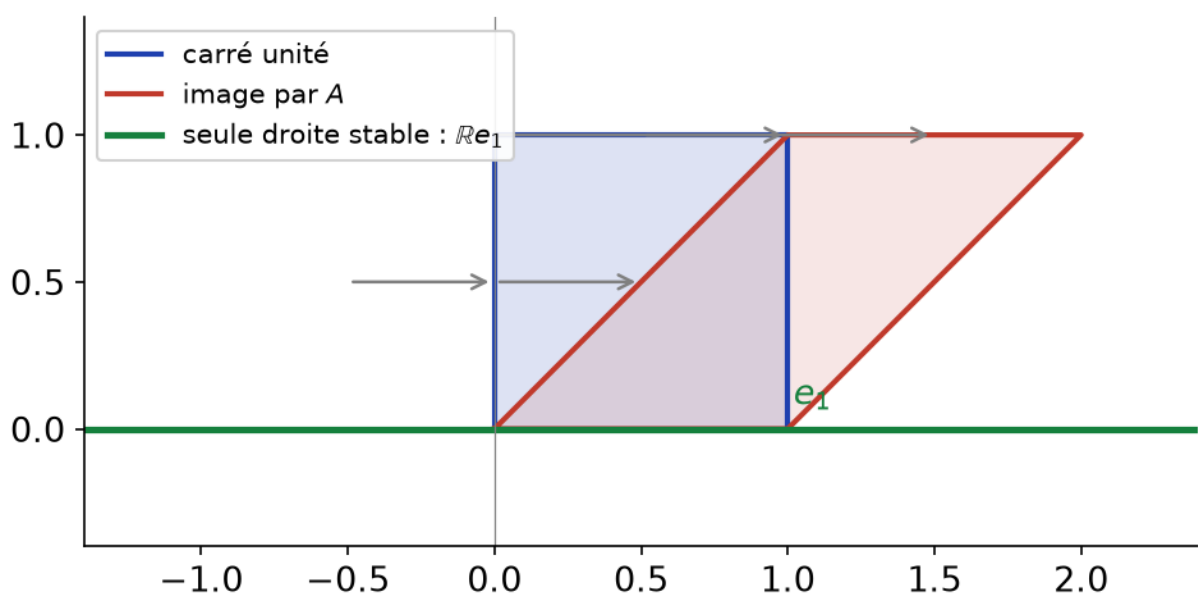
Pour montrer que  $A$  n'est pas diagonalisable, on utilise l'un des arguments suivants :

- $\chi_A$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$  (par exemple, il a des racines non réelles alors que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) ;
- une valeur propre  $\lambda$  vérifie  $\dim E_\lambda < m_\lambda$ , ce qu'on obtient par le théorème du rang :  
 $\dim E_\lambda = n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n)$  ;
- $A$  a une seule valeur propre  $\lambda$  mais  $A \neq \lambda I_n$ .

### Exemple :

La matrice de cisaillement  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  a pour seule valeur propre 1, et  $A \neq I_2$ . Par conséquent, elle n'est pas diagonalisable. De fait,  $E_1 = \ker(A - I_2) = \mathbb{K} e_1$  n'est qu'une droite.

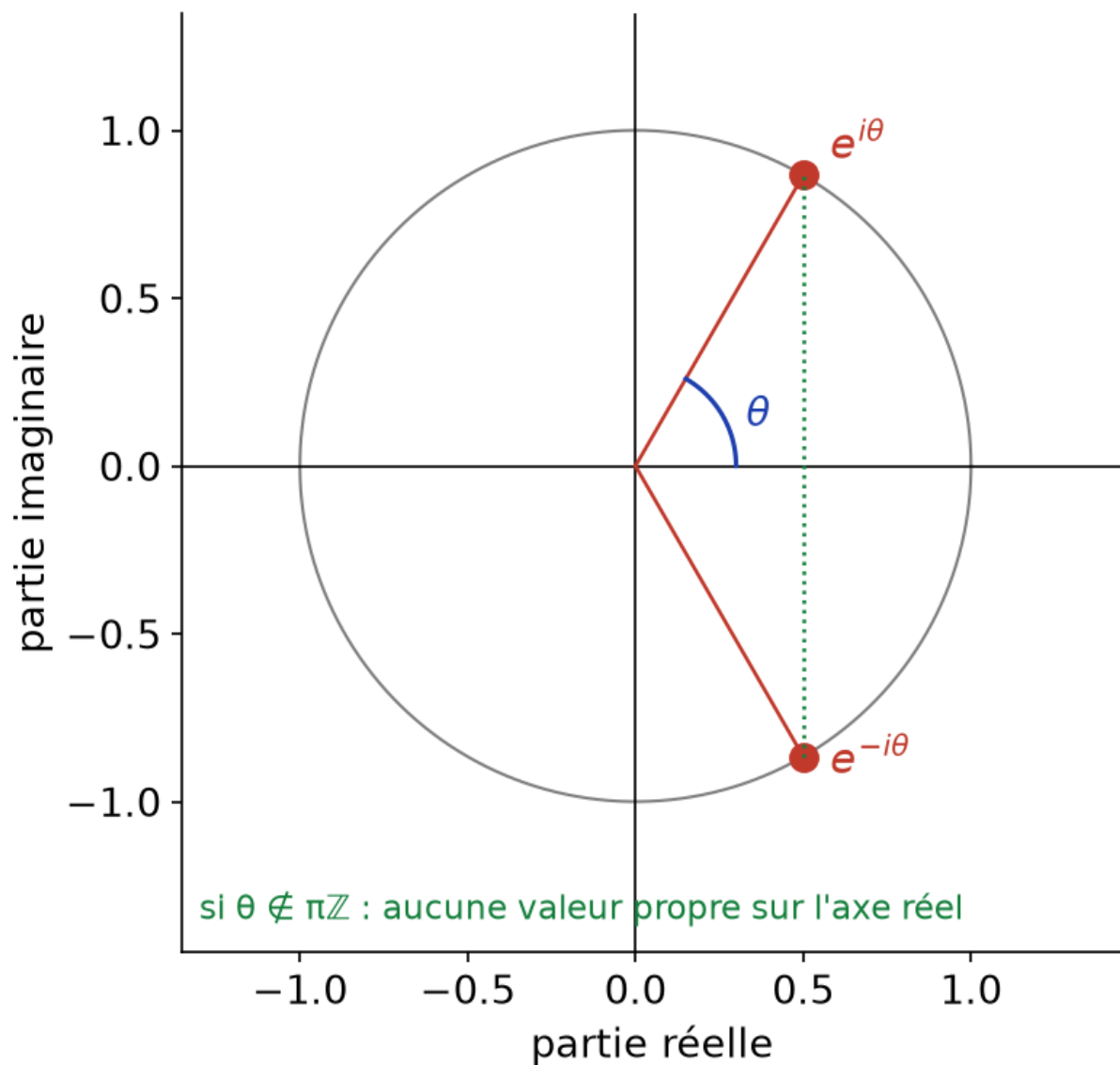
La figure suivante illustre ce phénomène : le carré unité est transformé en parallélogramme, et seul l'axe horizontal est conservé. Il manque donc une deuxième direction propre pour former une base.



### Exemple :

La matrice de rotation  $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$  a pour polynôme caractéristique  $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ , dont les racines sont  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ . Si  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ , ces racines ne sont pas réelles :  $R_\theta$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . En revanche, elles sont distinctes, donc  $R_\theta$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Comme le montre la figure ci-dessous, les deux valeurs propres complexes sont conjuguées et situées sur le cercle unité, hors de l'axe réel.



### III. Puissances et récurrences linéaires

#### 1. Puissances d'une matrice diagonalisable

Si  $A = P D P^{-1}$ , alors les facteurs intermédiaires se simplifient. On obtient, par une récurrence immédiate,  $A^k = P D^k P^{-1}$  pour tout entier  $k \geq 0$ . De plus,  $D^k$  s'obtient en élevant chaque coefficient diagonal à la puissance  $k$ .

**Propriété :**

Si  $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$A^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}.$$

Si de plus  $A$  est inversible, la formule reste vraie pour  $k \in \mathbb{Z}$ .

### Méthode :

Pour étudier une suite vectorielle définie par  $X_0$  et  $X_{k+1} = A X_k$  :

1. écrire  $X_k = A^k X_0$  ;
2. diagonaliser  $A$  et décomposer  $X_0 = \sum_i c_i V_i$  sur la base de vecteurs propres  $(V_i)$  ;
3. en déduire  $X_k = \sum_i c_i \lambda_i^k V_i$ , ce qui évite de calculer  $P^{-1}$  ;
4. lire le comportement asymptotique sur la valeur propre de plus grand module.

## 2. Un exemple de modèle d'évolution

### Exemple :

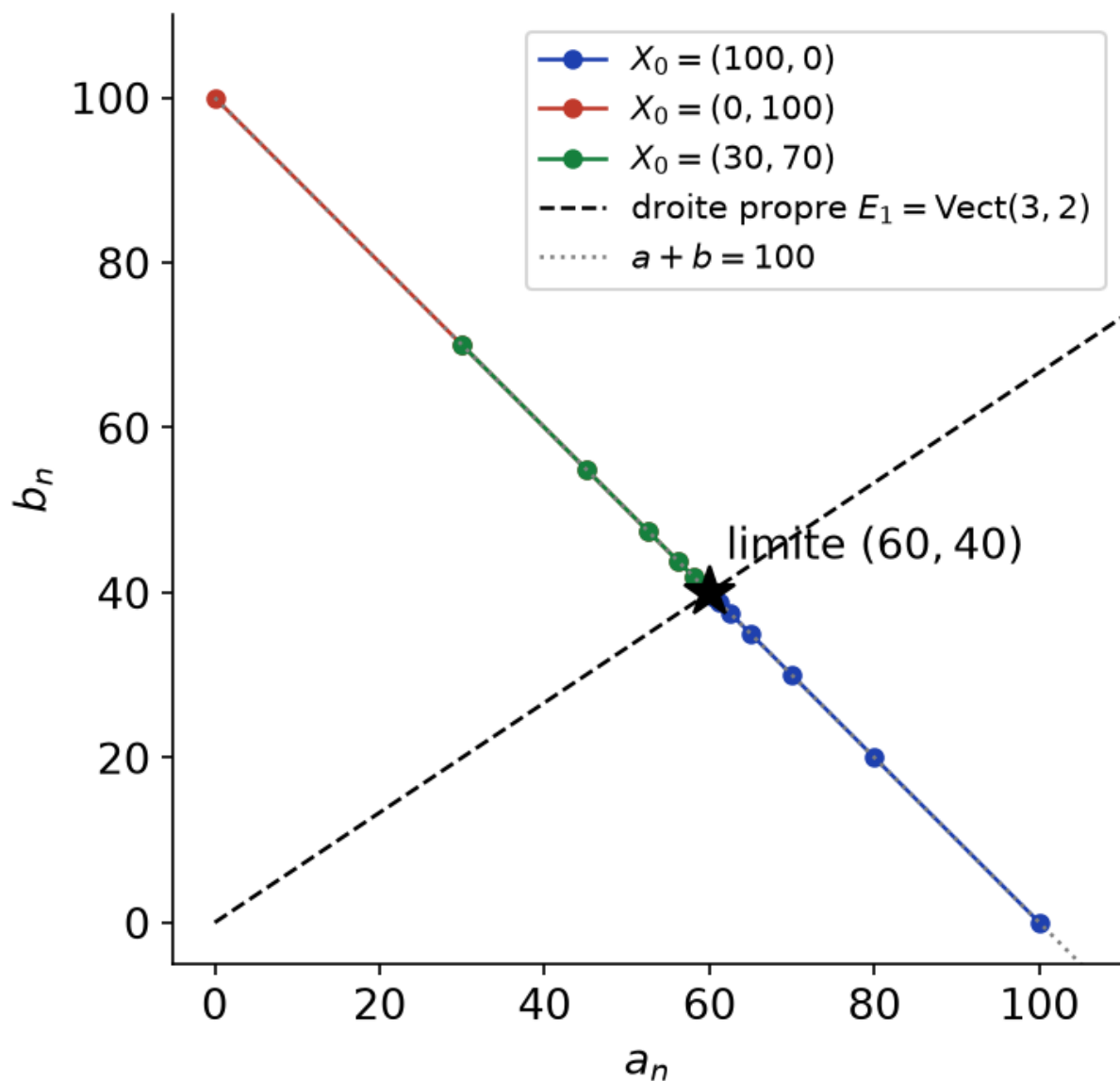
Deux populations évoluent selon  $a_{k+1} = 0,8 a_k + 0,3 b_k$  et  $b_{k+1} = 0,2 a_k + 0,7 b_k$ .

Autrement dit,  $X_{k+1} = M X_k$  avec  $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ . La trace vaut 1,5 et le

déterminant 0,5, donc  $\chi_M = (X - 1)(X - 0,5)$ . Les vecteurs propres sont  $(3, 2)$  pour 1 et  $(1, -1)$  pour 0,5. Pour  $X_0 = (100, 0)$ , on trouve  $X_0 = 20(3, 2) + 40(1, -1)$ , donc :

$$X_k = 20 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{40}{2^k} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{pmatrx } 60 \\ k \rightarrow +\infty \\ \text{endpmatrx.} \end{matrix} \begin{matrix} 40 \\ 40 \end{matrix}$$

La figure ci-dessous représente plusieurs trajectoires dans le plan. Toutes restent sur la droite  $a + b = 100$ , car le total est conservé, et convergent vers le point de la droite propre  $E_1$ .



### 3. Récurrences linéaires scalaires

Une suite définie par  $u_{k+2} = \alpha u_{k+1} + \beta u_k$  se ramène au cas vectoriel. On pose  $X_k = (u_k, u_{k+1})$ , et alors  $X_{k+1} = C X_k$  avec  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $C$  vaut  $X^2 - \alpha X - \beta$  : on retrouve l'équation caractéristique de la récurrence. Si ses racines  $r_1 \neq r_2$  sont dans  $\mathbb{K}$ , la diagonalisation donne  $u_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$ .

## IV. La trigonalisation

Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. On se contente alors d'une forme triangulaire, qui conserve l'essentiel des informations spectrales.

### Définition :

L'endomorphisme  $u$  est **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice  $A$  est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure  $T$ .

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de trigonalisation, alors chaque sous-espace  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est stable par  $u$ . En particulier,  $e_1$  est un vecteur propre. Par ailleurs, les coefficients diagonaux de  $T$  sont exactement les valeurs propres, répétées selon leur multiplicité, puisque  $\chi_u = \prod_i (X - t_{ii})$ .

### Théorème :

L'endomorphisme  $u$  est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

### Démonstration :

Si la matrice de  $u$  est triangulaire, on vient de voir que  $\chi_u = \prod_i (X - t_{ii})$  est scindé.

Pour la réciproque, on raisonne par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 1$  étant clair. Supposons  $\chi_A$  scindé, avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $n \geq 2$ . Il possède une racine  $\lambda$ , donc un vecteur propre  $e_1$ . On complète  $e_1$  en une base de  $\mathbb{K}^n$ . Ainsi,  $A$  est semblable à une matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} a & m & b & d & a \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} L \\ , \\ A_1 \end{matrix}, \quad A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs donne  $\chi_A = (X - \lambda) \chi_{A_1}$ . Par conséquent,  $\chi_{A_1}$  est scindé. Par hypothèse de récurrence,  $A_1 = Q T_1 Q^{-1}$  avec  $T_1$  triangulaire.

Enfin, la matrice  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$  conjugue la matrice par blocs en  $\begin{pmatrix} a & LQ \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$ , qui est triangulaire.

### Corollaire :

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable, car tout polynôme non constant est scindé sur  $\mathbb{C}$  (théorème de d'Alembert-Gauss). Une matrice réelle est donc toujours trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

### Méthode :

Pour trigonaliser une matrice  $A$  de taille 2 ou 3 non diagonalisable :

- **taille 2**, avec  $\chi_A = (X - \lambda)^2$  : on choisit un vecteur propre  $V_1$ , puis un vecteur  $V_2$  non colinéaire. Alors  $AV_2 = \lambda V_2 + c V_1$ , et on peut même choisir  $V_2$  tel que  $(A - \lambda I_2)V_2 = V_1$ , ce qui donne  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ;
- **taille 3**, avec  $\chi_A = (X - \lambda)^2(X - \mu)$ ,  $\lambda \neq \mu$  et  $\dim E_\lambda = 1$  : on prend  $V_1 \in E_\lambda$  et  $V_3 \in E_\mu$  non nuls, puis on résout  $(A - \lambda I_3)V_2 = V_1$ . Dans la base  $(V_1, V_2, V_3)$ , on obtient  $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ .

### Exemple :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\text{tr } A = 4$  et  $\det A = 4$ , donc  $\chi_A = (X - 2)^2$ . Comme  $A \neq 2I_2$ , la matrice n'est pas diagonalisable. Le vecteur  $V_1 = (1, -1)$  est propre. Ensuite,  $V_2 = (1, 0)$  vérifie  $AV_2 = (3, -1) = 2V_2 + V_1$ . Ainsi :

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus,  $T = 2I_2 + N$  avec  $N^2 = 0$ , et ces deux matrices commutent. La formule du binôme donne donc  $T^k = 2^k I_2 + k 2^{k-1} N$ .

## V. Trace, déterminant et valeurs propres

La trigonalisation fournit des formules très utiles. Elles relient deux invariants simples à calculer, la trace et le déterminant, au spectre complet.

### Théorème :

Si  $\chi_A$  est scindé, de racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comptées avec multiplicité, alors :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

C'est toujours le cas dans  $\mathbb{C}$  : pour  $A$  réelle, on utilise ses valeurs propres complexes.

### Démonstration :

La matrice  $A$  est semblable à une matrice triangulaire  $T$  de diagonale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Or deux matrices semblables ont même trace et même déterminant. Enfin, la trace de  $T$  est la somme de ses coefficients diagonaux, et son déterminant en est le produit.

#### Corollaire :

Avec les mêmes notations, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , les valeurs propres de  $A^k$  sont les  $\lambda_i^k$ , avec multiplicité, et  $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$ .

En effet,  $A^k$  est semblable à  $T^k$ , qui est triangulaire de diagonale  $(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ .

#### Exemple :

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de trace 6 admet 1 et 2 pour valeurs propres, et  $X_A$  est scindé. La troisième valeur propre vaut  $6 - 1 - 2 = 3$ . Ainsi,  $\det A = 1 \times 2 \times 3 = 6$  et  $A$  est diagonalisable, puisqu'elle a trois valeurs propres distinctes.

## VI. Endomorphismes et matrices nilpotents

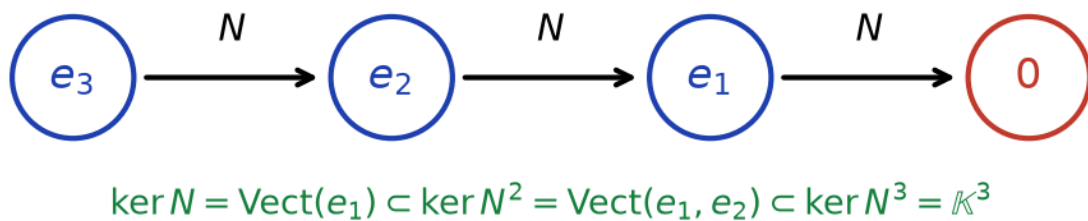
#### Définition :

L'endomorphisme  $u$  est **nilpotent** s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0$ . Le plus petit tel entier est l'**indice de nilpotence** de  $u$ . La même définition vaut pour une matrice.

#### Exemple :

Soit  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $N e_1 = 0$ ,  $N e_2 = e_1$  et  $N e_3 = e_2$ . Donc  $N^2 \neq 0$  car  $N^2 e_3 = e_1$ , tandis que  $N^3 = 0$ . L'indice de nilpotence vaut 3.

La figure ci-dessous représente cette chaîne : chaque application de  $N$  fait descendre d'un cran, jusqu'au vecteur nul. On y lit aussi la croissance stricte des noyaux itérés.



### Théorème :

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est nilpotente ;
- $\text{Sp}(A) = \{0\}$  ;
- $\chi_A = X^n$  ;
- $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Dans ce cas,  $A^n = 0$  : l'indice de nilpotence est au plus  $n$ .

### Démonstration :

Si  $A^p = 0$  et  $A X = \lambda X$  avec  $X \neq 0$ , alors  $0 = A^p X = \lambda^p X$ , donc  $\lambda = 0$ . Comme  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , on a bien  $\text{Sp}(A) = \{0\}$ , puis  $\chi_A = X^n$ .

Si  $\chi_A = X^n$ , le théorème de trigonalisation donne  $T$  triangulaire de diagonale nulle, c'est-à-

dire strictement triangulaire. Enfin, si  $T$  est strictement triangulaire, on a  $T e_1 = 0$  et  $T e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$ . Par récurrence sur  $k$ ,  $T^k e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-k})$ , cet espace étant nul pour  $j \leq k$ . Par conséquent  $T^n = 0$ , donc  $A^n = 0$ .

#### Remarque :

Pour une matrice réelle, on applique ce théorème en la voyant dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Ainsi,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est nilpotente si et seulement si  $\chi_A = X^n$ . En revanche, la condition  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$  ne suffit pas : la matrice  $\text{diag}(0, R_{\pi/2})$  n'a que 0 comme valeur propre réelle et n'est pas nilpotente.

#### Propriété :

Soit  $N$  nilpotente. Alors  $\text{tr } N = 0$  et  $\det N = 0$ . De plus, si  $N$  est diagonalisable, alors  $N = 0$ .

#### Démonstration :

Toutes les valeurs propres complexes de  $N$  sont nulles, donc leur somme et leur produit aussi. Par ailleurs, si  $N = P D P^{-1}$ , la diagonale de  $D$  ne contient que des valeurs propres, donc  $D = 0$  et  $N = 0$ .

#### Remarque :

Le chapitre suivant introduit les polynômes annulateurs et le théorème de Cayley-Hamilton. Ils donneront des critères de diagonalisation plus algébriques, mais les méthodes de ce chapitre restent celles qu'on applique sur des matrices explicites.

## Ce qu'il faut retenir

---

- $u$  est diagonalisable si et seulement si  $E$  est la somme directe de ses sous-espaces propres, c'est-à-dire si  $\sum \dim E_\lambda = n$ .
- $n$  valeurs propres distinctes suffisent pour diagonaliser, mais ne sont pas nécessaires.
- Critère général :  $X_u$  scindé et  $\dim E_\lambda = m_\lambda$  pour toute valeur propre multiple.
- Une matrice diagonalisable à une seule valeur propre  $\lambda$  est égale à  $\lambda I_n$ .
- $A^k = P D^k P^{-1}$  : c'est l'outil des suites récurrentes linéaires vectorielles.
- Trigonalisable équivaut à  $X$  scindé ; toute matrice complexe est trigonalisable.
- Avec les valeurs propres complexes comptées avec multiplicité,  $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$  et  $\det A = \prod \lambda_i$ .
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente si et seulement si son spectre est  $\{0\}$  ; son indice est alors au plus  $n$ .
- Une matrice nilpotente et diagonalisable est nulle.

## Questions fréquentes sur diagonalisation et trigonalisation

---

Comment montrer rapidement qu'une matrice n'est pas diagonalisable ?

Trois arguments suffisent presque toujours. Le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur le corps de travail, ou bien un sous-espace propre a une dimension strictement inférieure à la multiplicité, que l'on calcule par le théorème du rang. Enfin, une matrice diagonalisable ayant une seule valeur propre  $\lambda$  est forcément égale à  $\lambda I_n$ .

Faut-il toujours calculer l'inverse de la matrice de passage ?

Non. Pour vérifier une diagonalisation, il suffit de contrôler  $AP = PD$ . Pour une suite

$X_{k+1} = AX_k$ , on décompose  $X_0$  sur la base de vecteurs propres, ce qui évite aussi  $P^{-1}$ .

L'inverse n'est utile que pour écrire explicitement tous les coefficients de  $A^k$ .

Quelle est la différence entre diagonalisable et trigonalisable ?

Une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé ; c'est toujours le cas sur  $\mathbb{C}$ . Pour être diagonalisable, il faut en plus que chaque sous-espace propre ait pour dimension la multiplicité de la valeur propre. Ainsi,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est trigonalisable mais pas diagonalisable.

Comment reconnaître une matrice nilpotente ?

Une matrice complexe est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre, c'est-à-dire si  $\chi_A = X^n$ . Son indice de nilpotence est alors au plus  $n$ , donc  $A^n = 0$ . Une matrice nilpotente non nulle n'est jamais diagonalisable.

## **Pour aller plus loin en maths spé**

---

- Les énoncés : [exercices de maths spé sur diagonalisation et trigonalisation](#)
- À maîtriser avant : [Éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- Chapitre précédent : [Éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- Chapitre suivant : [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)