

Diagonalisation et trigonalisation

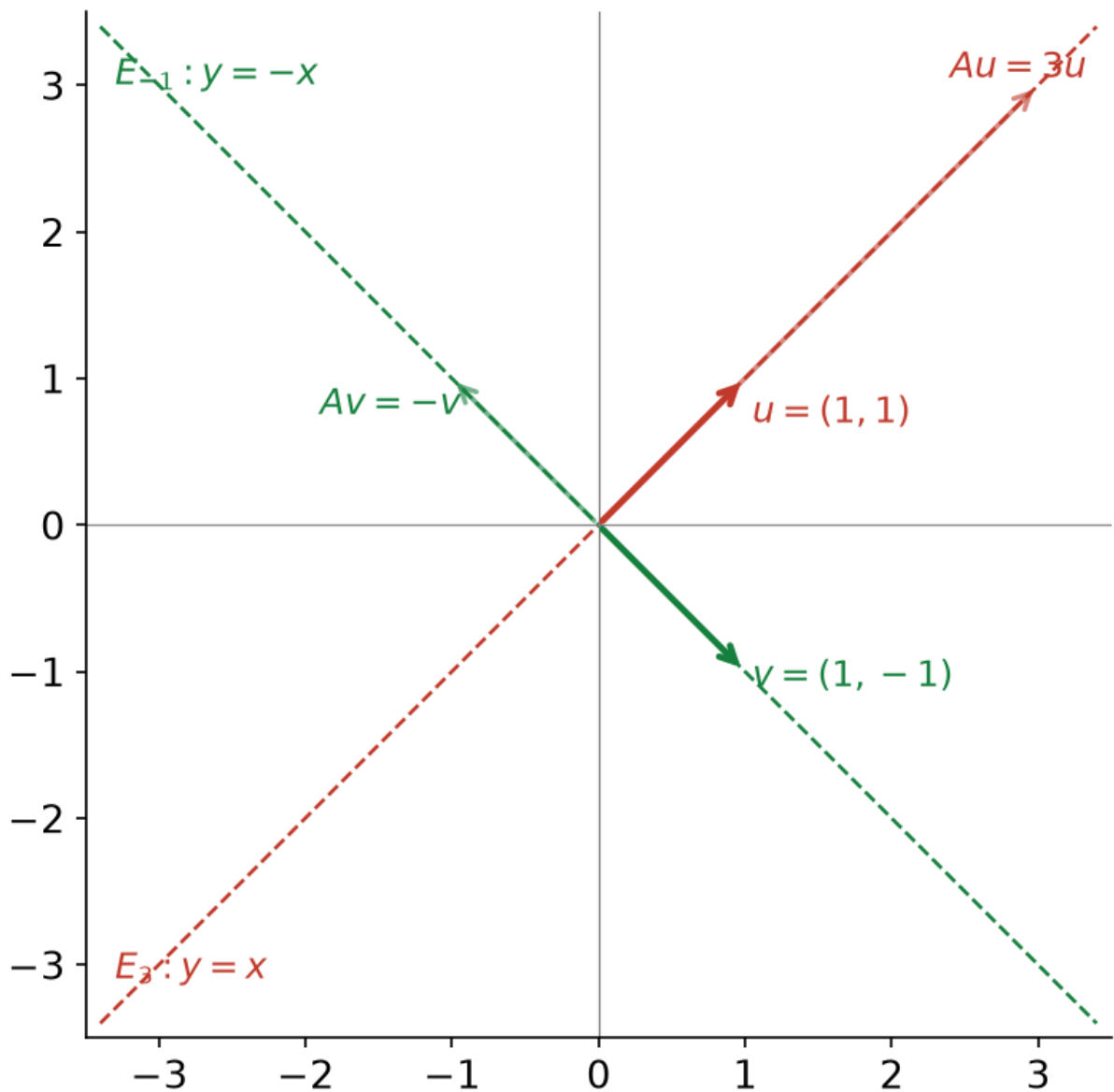
Corrigé de l'exercice 1 : Diagonalisation d'une matrice 2x2

1. Pour une matrice de taille 2, on a $\chi_A = X^2 - (\text{tr } A)X + \det A$. Ici $\text{tr } A = 2$ et $\det A = 1 - 4 = -3$. Donc $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$. Ainsi $\text{Sp}(A) = \{3, -1\}$.
2. Pour $\lambda = 3$, on résout $(A - 3I_2)X = 0$, soit $-2x + 2y = 0$. Donc $E_3 = \text{Vect}((1, 1))$. Pour $\lambda = -1$, on résout $2x + 2y = 0$. Donc $E_{-1} = \text{Vect}((1, -1))$. **Les deux sous-espaces propres sont les droites $y = x$ et $y = -x$.**
3. La matrice a deux valeurs propres distinctes en dimension 2, donc elle est diagonalisable. On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions : $AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det P = -2 \neq 0$, on a bien $A = P D P^{-1}$.

La figure ci-dessous montre les deux droites propres : A triple les vecteurs de E_3 et retourne ceux de E_{-1} .



Point de méthode : vérifier $AP = PD$ plutôt que $A = PDP^{-1}$ évite d'inverser P .

Corrigé de l'exercice 2 : Trois valeurs propres distinctes

- On a $\chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$: la première colonne devient $(X-1, 0, X-1)$. On factorise $X-1$, puis on effectue $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\chi_A = (X - 1) \begin{vmatrix} 1 & X-1 & 1 \\ 0 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X - 1)(X - 2)(X - 3).$$

Donc $\chi_A = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$.

2. La matrice possède trois valeurs propres distinctes en dimension 3. D'après le cours, **A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.**

À partir de la question 3

3. Pour $\lambda = 1$, le système $(A - I_3)X = 0$ s'écrit $x + y - z = 0$, $-x + y + z = 0$, $-x + y + z = 0$. En additionnant les deux premières, $y = 0$, puis $z = x$. Donc $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

Pour $\lambda = 2$, on obtient $y - z = 0$, $-x + z = 0$ et $-x + y = 0$. Donc $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Pour $\lambda = 3$, on obtient $-x + y - z = 0$, $-x - y + z = 0$. En additionnant, $x = 0$, puis $y = z$. Donc $E_3 = \text{Vect}((0, 1, 1))$.

Ainsi : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, 2, 3)$. Contrôle : $A(0, 1, 1) = (0, 3, 3)$, ce qui convient.

Corrigé de l'exercice 3 : Matrices non diagonalisables

1. On a $\text{tr } A = 2$ et $\det A = 1$, donc $\chi_A = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$. La seule valeur propre est 1. Si A était diagonalisable, on aurait $A = P I_2 P^{-1} = I_2$, ce qui est faux. **Donc A n'est pas diagonalisable.**
2. On a $\chi_B = X^2 - 2X + 2$, de discriminant -4 . Ses racines sont $1 + i$ et $1 - i$, qui ne sont pas réelles. Par conséquent χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et **B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$** . En revanche, ces deux racines sont distinctes, donc **B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$** .

3. Dans $\det(X I_3 - C)$, la troisième colonne vaut $(0, 0, X - 3)$. En développant selon cette colonne, on obtient $\chi_C = (X - 3) \begin{vmatrix} X & -1 \\ 0 & X - 2 \end{vmatrix} = (X - 3)(X - 2)^2$. Ensuite, $C - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Le théorème du rang donne $\dim E_2 = 1 < 2 = m_2$. **Donc C n'est pas diagonalisable.**

Corrigé de l'exercice 4 : Matrice de rotation sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $R_\theta = I_2$. Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, alors $R_\theta = -I_2$. **Dans les deux cas, R_θ est diagonale, donc diagonalisable.**
- Un vecteur propre réel X vérifierait $R_\theta X \in \mathbb{R} X$. Or, comme sur la figure de l'énoncé, $R_\theta X$ fait un angle θ avec X , et cet angle n'est pas un multiple de π . Donc $R_\theta X$ n'est jamais colinéaire à $X \neq 0$. Par le calcul, $\chi_{R_\theta} = X^2 - 2\cos\theta X + 1$, de discriminant $4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta < 0$. **Ainsi R_θ n'a aucune valeur propre réelle.**
- Les racines complexes sont $\cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$. Elles sont distinctes car $\sin\theta \neq 0$, donc R_θ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour $\lambda = e^{i\theta}$, on a $R_\theta - \lambda I_2 = \sin\theta \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i-i \end{pmatrix}$, dont le noyau contient $(1, -i)$. De même, $(1, i)$ est propre pour $e^{-i\theta}$. **Une base propre est $((1, -i), (1, i))$, associée à $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$.**
- Une matrice est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Ce n'est pas le cas ici. **Donc R_θ n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**

Corrigé de l'exercice 5 : Valeur propre double et matrice de passage

- Dans $X I_3 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 3 & -3 \\ 3 & X+1 & 3 \\ 3 & 3 & X-15 \end{pmatrix}$, la somme de chaque ligne vaut $X + 1$. On effectue donc $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ et on factorise $X + 1$. Ensuite, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent :

$$\chi_A = (X + 1) \begin{vmatrix} 1 & X & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & X & -2 \end{vmatrix} = (X + 1)(X - 2)^2.$$

Les valeurs propres sont -1 (simple) et 2 (double).

2. On a $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, de rang 1. Ainsi E_2 est le plan $x + y - z = 0$, de base $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$. Par ailleurs, la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut -1 , donc $A(1, 1, 1) = -(1, 1, 1)$. **Ainsi E_2 est un plan et $E_{-1} = \text{Vect}((1, 1, 1))$ est une droite.**

À partir de la question 3

3. Le polynôme caractéristique est scindé, et $\dim E_2 = 2 = m_2$, $\dim E_{-1} = 1 = m_{-1}$. Par le critère du cours, A est diagonalisable. **On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(2, 2, -1)$.**

4. Par la méthode de Gauss, ou en résolvant $PY = X$, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie que } P P^{-1} = I_3 : \text{ par exemple, la première ligne}$$

de P fois la première colonne de P^{-1} donne $0 + 0 + 1 = 1$. Ensuite,

$$D^n = 2^n I_3 + ((-1)^n - 2^n) \text{diag}(0, 0, 1). \text{ Donc :}$$

$$A^n = 2^n I_3 + ((-1)^n - 2^n) \Pi, \quad \Pi = P \text{diag}(0, 0, 1) P^{-1}.$$

Or Π est le produit de la troisième colonne $(1, 1, 1)$ de P par la troisième ligne $(1, 1, -1)$ de P^{-1} . **Ainsi $A^n = 2^n I_3 + ((-1)^n - 2^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.** Pour $n = 1$, on retrouve bien $2I_3 - 3\Pi = A$.

Point de méthode : repérer que les lignes ont une somme constante donne immédiatement un vecteur propre et une factorisation du déterminant.

Corrigé de l'exercice 6 : Diagonalisabilité selon un paramètre

1. La matrice est triangulaire supérieure, donc $\chi_{A_{a,b}} = (X - 1)^2 (X - 2)$. **Le spectre est $\{1, 2\}$, avec 1 double et 2 simple.**
2. On a $A_{a,b} - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $a \neq 0$, les lignes $(0, a, 1)$ et $(0, 0, 1)$ sont libres, et la deuxième ligne est proportionnelle à la troisième : le rang vaut 2. Si $a = 0$, toutes les lignes sont colinéaires à $(0, 0, 1)$: le rang vaut 1. **Donc $\text{rg}(A_{a,b} - I_3) = 2$ si $a \neq 0$, et 1 si $a = 0$.**
3. La valeur propre 2 est simple, donc $\dim E_2 = 1$ dans tous les cas. Le polynôme caractéristique est scindé. Ainsi, $A_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_1 = 2$, soit $\text{rg}(A_{a,b} - I_3) = 1$. **La condition cherchée est $a = 0$, quel que soit b .**
4. Pour $a = 0$, E_1 est le plan $z = 0$, de base e_1, e_2 . Ensuite,
 $A_{0,b} - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne $x = z$ et $y = bz$. Donc $E_2 = \text{Vect}((1, b, 1))$.
On peut prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $D = \text{diag}(1, 1, 2)$.

Corrigé de l'exercice 7 : Puissances d'une matrice diagonalisable

1. On a $\text{tr } A = 5$ et $\det A = 4 + 2 = 6$, donc
 $\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$. Pour 2, l'équation $2x - 2y = 0$ donne $(1, 1)$. Pour 3, l'équation $x - 2y = 0$ donne $(2, 1)$. **Ainsi $A = P D P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(2, 3)$.**
2. On a $\det P = -1$, donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ensuite :
 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2 \cdot 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Donc $A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$. Pour $n = 0$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $n = 1$, on obtient $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$.

3. La matrice A est inversible car $0 \notin \text{Sp}(A)$. De plus, $A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$, donc la formule vaut pour $n = -1$. Elle donne

$$\begin{pmatrix} 2/3 - 1/2 & 1 - 2/3 & 1/3 - 1/2 & 1 - 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}. \text{ Directement, } A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Les deux calculs concordent.}$$

Corrigé de l'exercice 8 : Évolution de deux populations

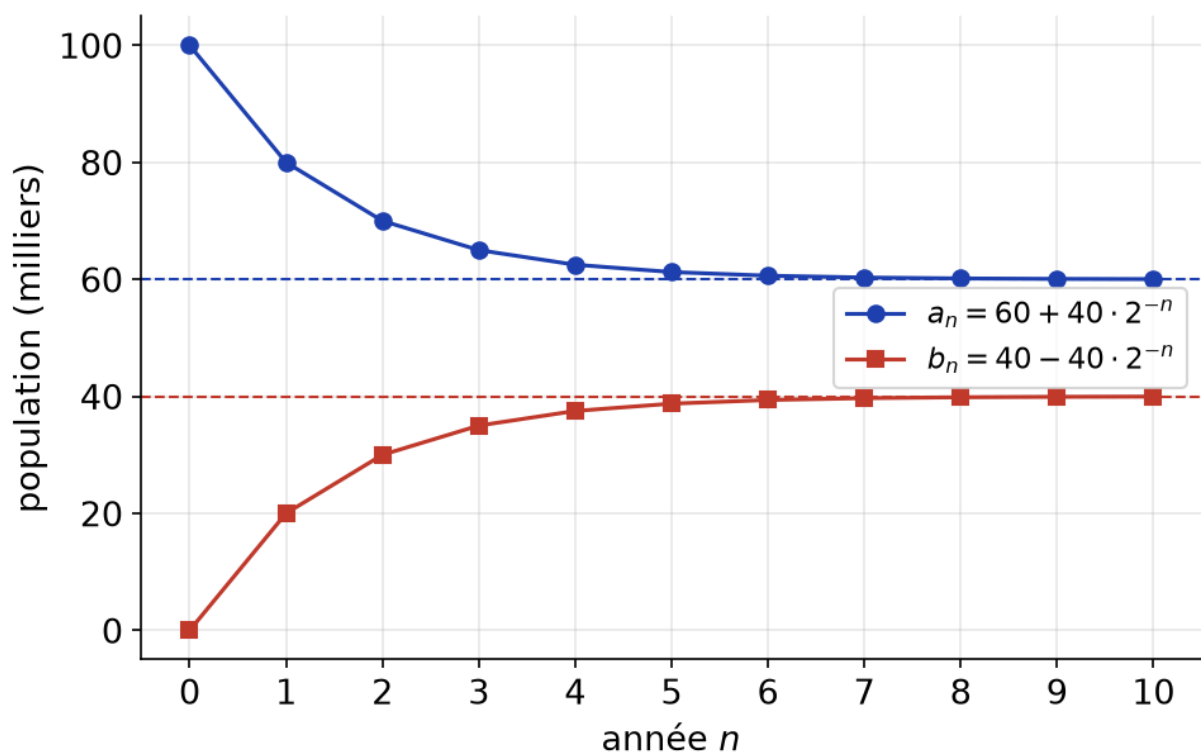
1. La ville A garde 80 % de ses habitants et reçoit 30 % de ceux de B . De même pour B . **Donc** $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$.

2. On a $\text{tr } M = 1,5$ et $\det M = 0,56 - 0,06 = 0,5$. Donc $\chi_M = X^2 - 1,5X + 0,5 = (X - 1)(X - 0,5)$. Pour 1, l'équation $-0,2x + 0,3y = 0$ donne $(3, 2)$. Pour 0,5, l'équation $0,3x + 0,3y = 0$ donne $(1, -1)$. **Ainsi** $M = P \text{diag}(1, 0,5) P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. On décompose $X_0 = \alpha(3, 2) + \beta(1, -1)$. Le système $3\alpha + \beta = 100$, $2\alpha - \beta = 0$ donne $\alpha = 20$ et $\beta = 40$. Par conséquent, $X_n = M^n X_0 = 20(3, 2) + 40 \cdot 0,5^n (1, -1)$. **Donc** $a_n = 60 + \frac{40}{2^n}$ et $b_n = 40 - \frac{40}{2^n}$, **de limites 60 et 40**. Contrôle : $a_1 = 80$ et $b_1 = 20$.

4. Dans le cas général, la somme des coordonnées de $(1, -1)$ est nulle, donc $a_0 + b_0 = 5\alpha$. Ainsi $\alpha = \frac{a_0 + b_0}{5}$ et $X_n \rightarrow \alpha(3, 2)$. **La limite vaut** $(\frac{3}{5}S, \frac{2}{5}S)$ **avec** $S = a_0 + b_0$.

La figure ci-dessous représente les deux suites : l'écart à la limite est divisé par 2 chaque année.



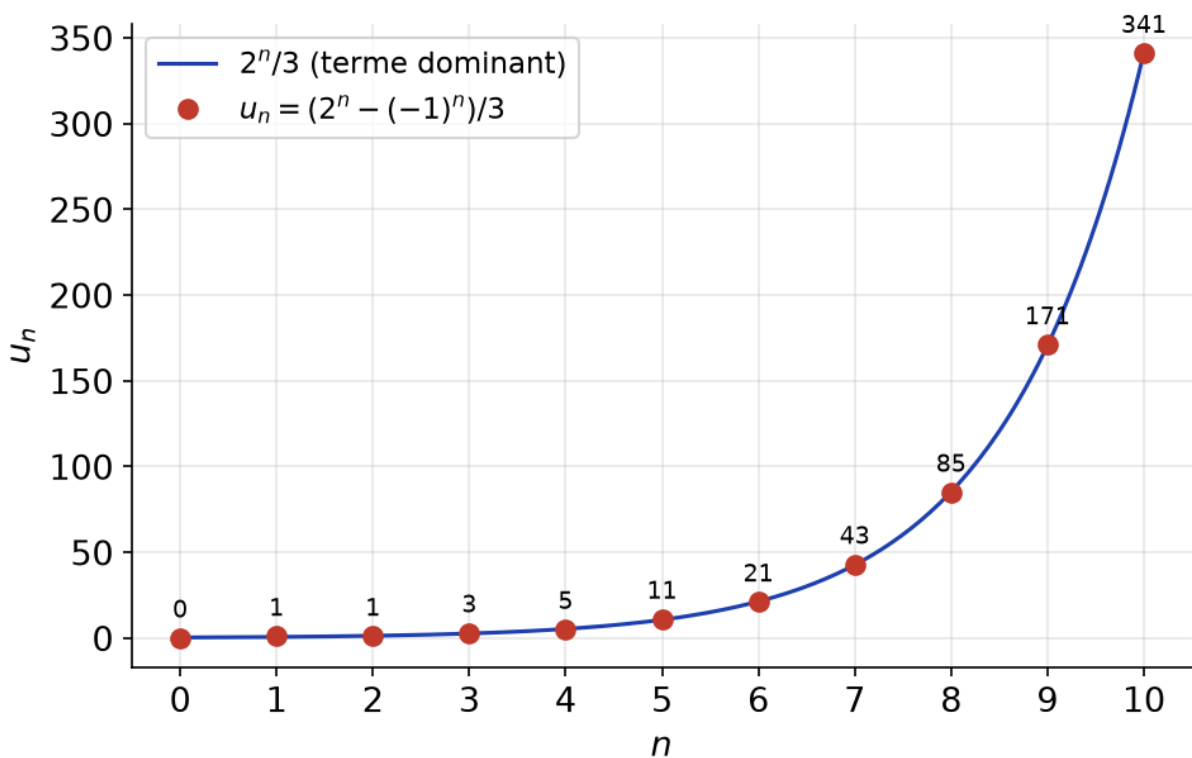
Corrigé de l'exercice 9 : Suite récurrente d'ordre 2

- On a $X_{n+1} = (u_{n+1}, u_{n+2}) = (u_{n+1}, 2u_n + u_{n+1})$. **Donc**

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
- On a $\chi_C = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$. Pour une valeur propre λ , la première ligne de $C - \lambda I_2$ donne $y = \lambda x$. Ainsi $(1, 2)$ est propre pour 2 et $(1, -1)$ pour -1 . **Donc**

$$C = P \operatorname{diag}(2, -1) P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
- On décompose $X_0 = (0, 1) = a(1, 2) + b(1, -1)$. On obtient $a + b = 0$ et $2a - b = 1$, donc $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$. Ensuite, $X_n = \frac{2^n}{3}(1, 2) - \frac{(-1)^n}{3}(1, -1)$. En lisant la première coordonnée : $u_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$, et $u_n \sim \frac{2^n}{3}$. Contrôle : $u_2 = 1$ et $u_3 = 3$, ce que donne aussi la récurrence.

Comme le montre la figure ci-dessous, le terme $(-1)^n/3$ devient vite négligeable devant $2^n/3$.



Corrigé de l'exercice 10 : Trigonalisation d'une matrice 2x2

- On a $\text{tr } A = 4$ et $\det A = 3 + 1 = 4$, donc $\chi_A = (X - 2)^2$. La seule valeur propre est 2 et $A \neq 2I_2$. **Donc A n'est pas diagonalisable.**
- On a $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, donc $V_1 = (1, -1)$ est propre. On cherche V_2 tel que $(A - 2I_2)V_2 = V_1$, soit $x + y = 1$. Le choix $V_2 = (1, 0)$ convient. Alors $AV_1 = 2V_1$ et $AV_2 = V_1 + 2V_2$. **Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient.**
- On écrit $T = 2I_2 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Comme $2I_2$ et N commutent, la formule du binôme donne $T^n = 2^n I_2 + n 2^{n-1} N$. Ensuite, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^n = P T^n P^{-1}$. Le calcul donne :

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} n & 1 \\ -n & 2 - n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 2$, la formule donne $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, et le calcul direct de A^2 donne le

même résultat.

Corrigé de l'exercice 11 : Trigonalisation d'une matrice 3x3

1. On développe $\det(XI_3 - A)$ selon la dernière ligne $(0, 0, X - 2)$:

$$\chi_A = (X - 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X - 2)(X^2 - 2X + 1).$$

Donc $\chi_A = (X - 1)^2 (X - 2)$.

2. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La troisième équation donne $z = 0$, puis $x = y$. Donc $E_1 = \text{Vect}((1, 1, 0))$. Ensuite, $A - 2I_3$ donne $-y + z = 0$ et $x - 2y + 2z = 0$, donc $y = z$ et $x = 0$. Ainsi $E_2 = \text{Vect}((0, 1, 1))$. **Comme** $\dim E_1 = 1 < 2 = m_1$, **la matrice** A **n'est pas diagonalisable**. Elle est cependant trigonalisable, car χ_A est scindé.

À partir de la question 3

3. On prend $V_1 = (1, 1, 0)$ et $V_3 = (0, 1, 1)$. On résout $(A - I_3)V_2 = V_1$: on obtient $z = 0$ et $x - y = 1$. Le choix $V_2 = (1, 0, 0)$ convient. Vérification :

$$AV_2 = (2, 1, 0) = V_1 + V_2. \text{ La famille est une base, car } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Dans la base $((1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$, **la matrice est bien** T .

4. La matrice T est diagonale par blocs. Le bloc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + N$, avec

$$N^2 = 0, \text{ a pour puissance } n\text{-ième } I_2 + nN. \text{ Donc } T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 12 : Matrices nilpotentes explicites

1. Pour N_1 , on calcule $N_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, puis $N_1^3 = 0$. Pour N_2 , on remarque que $N_2 = U V^T$ avec $U = (1, 2, 1)$ et $V = (1, 0, -1)$. Ainsi $N_2^2 = U (V^T U) V^T$, et $V^T U = 1 - 1 = 0$. Donc $N_2^2 = 0$ alors que $N_2 \neq 0$. **Les indices valent 3 pour N_1 et 2 pour N_2 .**
2. Une matrice nilpotente de taille 3 a pour seule valeur propre complexe 0. **Donc**
 $\chi_{N_1} = \chi_{N_2} = X^3$.
3. On a $(I_3 + N_2)(I_3 - N_2) = I_3 - N_2^2 = I_3$. **Donc**
 $(I_3 + N_2)^{-1} = I_3 - N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & \\ -1 & 0 & 2,2 \end{pmatrix}$. De même,
 $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1 + N_1^2) = I_3 + N_1^3 = I_3$. **Donc**
 $(I_3 + N_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Une matrice nilpotente diagonalisable est nulle, car sa seule valeur propre est 0. **Comme**
 $N_1 \neq 0$ et $N_2 \neq 0$, **aucune des deux n'est diagonalisable.**

Corrigé de l'exercice 13 : Caractérisation des matrices nilpotentes

1. Soit p tel que $A^p = 0$, et $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$. Par récurrence,
 $A^p X = \lambda^p X$. Donc $\lambda^p X = 0$, puis $\lambda = 0$. De plus, χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ et toutes ses racines sont des valeurs propres. **Ainsi** $\text{Sp}(A) = \{0\}$ **et** $\chi_A = X^n$.
2. Le polynôme X^n est scindé, donc A est trigonalisable. La diagonale de la matrice triangulaire obtenue contient les racines de χ_A , qui sont toutes nulles. **Donc A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte T .**

À partir de la question 3

3. Pour $k = 1$, la j -ième colonne de T n'a de coefficients non nuls qu'au-dessus de la diagonale. Ainsi $Te_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$ et $Te_1 = 0$. Supposons la propriété vraie au rang k . Si $j \leq k+1$, alors $T^k e_j$ est nul ou colinéaire à e_1 , donc $T^{k+1} e_j = 0$. Si $j > k+1$, alors $T^{k+1} e_j = T(T^k e_j)$ est une combinaison des Te_i pour $i \leq j-k$, qui sont dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{j-k-1})$. La propriété est donc héréditaire. Pour $k = n$, tous les $T^n e_j$ sont nuls, donc $T^n = 0$. **Par similitude**, $A^n = P T^n P^{-1} = 0$.
4. Si N est nilpotente et $N = PDP^{-1}$ avec D diagonale, les coefficients de D sont des valeurs propres, donc nuls. **Ainsi** $D = 0$ **et** $N = 0$.
5. Toutes les valeurs propres complexes de N sont nulles, donc $\text{tr } N = 0$. Ensuite, $I_n + N$ est semblable à $I_n + T$, triangulaire de diagonale $(1, \dots, 1)$. **Donc** $\text{tr } N = 0$ **et** $\det(I_n + N) = 1$.

Corrigé de l'exercice 14 : Traces des puissances et nilpotence

1. La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $A = PTP^{-1}$, avec T triangulaire de diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Alors $A^k = PT^kP^{-1}$. Or le produit de matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur, et sa diagonale est le produit des diagonales. Donc T^k a pour diagonale $(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k)$. **Par invariance de la trace**, $p_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k$.
2. En développant σ_1^2 , on obtient $\sum \lambda_i^2 + 2\sigma_2$, d'où $p_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ensuite, $\sigma_1 p_2 = p_3 + \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 \lambda_j$ et $\sigma_1 \sigma_2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 \lambda_j + 3\sigma_3$. Donc $p_3 = \sigma_1 p_2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3$. En remplaçant p_2 : $p_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_3$.
3. Si $p_1 = 0$, alors $\sigma_1 = 0$. Ensuite, $p_2 = 0$ donne $\sigma_2 = 0$, puis $p_3 = 0$ donne $\sigma_3 = 0$. Or $\chi_A = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3$. Donc $\chi_A = X^3$. D'après l'exercice précédent, **A est nilpotente et $A^3 = 0$** .
4. Soit $j = e^{2i\pi/3}$ et $A = \text{diag}(1, j, j^2)$. On a $p_1 = 1 + j + j^2 = 0$ et $p_2 = 1 + j^2 + j^4 = 1 + j^2 + j = 0$. Pourtant, $p_3 = 3$ et A est inversible. **Les**

conditions $p_1 = p_2 = 0$ ne suffisent donc pas.

Corrigé de l'exercice 15 : La matrice J et ses voisines

1. Toutes les colonnes de J sont égales et non nulles. **Donc** $\text{rg } J = 1$ **et, par le théorème du rang,** $\dim \ker J = n - 1$.
2. Chaque coefficient de JU vaut $1 + \dots + 1 = n$, donc $JU = nU$. Ainsi, 0 est valeur propre avec $\dim E_0 = n - 1$, et n est valeur propre avec $\dim E_n \geq 1$. La somme des dimensions atteint n . **Donc** $\text{Sp}(J) = \{0, n\}$ **et** J **est diagonalisable**.
3. Soit P telle que $J = P \text{diag}(n, 0, \dots, 0) P^{-1}$. Alors $M = P \text{diag}(a + nb, a, \dots, a) P^{-1}$. Donc M est diagonalisable, de valeurs propres $a + nb$ (au moins simple) et a (répétée $n - 1$ fois). **Ainsi** $\det M = a^{n-1}(a + nb)$.
4. La matrice proposée vaut $I_3 + J$, avec $n = 3$, $a = 1$ et $b = 1$. **Son déterminant vaut** $1^2 \times (1 + 3) = 4$.

Corrigé de l'exercice 16 : Matrices de rang 1

1. L'image de A est une droite $\text{Vect}(U)$. Chaque colonne C_j de A s'écrit donc $v_j U$. En posant $V = (v_1, \dots, v_n)$, on obtient $A = UV^T$. Enfin, $V \neq 0$ car $A \neq 0$. **Ainsi** $A = UV^T$ **avec** U, V **non nulles**.
2. Le coefficient diagonal (i, i) de UV^T vaut $u_i v_i$, donc $\text{tr } A = \sum u_i v_i = V^T U$. Par associativité, $A^2 = U(V^T U)V^T$. **Donc** $A^2 = (\text{tr } A) A$.
3. Par le théorème du rang, $\dim \ker A = n - 1 \geq 1$, donc 0 est valeur propre avec $\dim E_0 = n - 1$. Ensuite, $AU = U(V^T U) = (\text{tr } A)U$. Dans $\mathbb{C}$, la multiplicité de 0 est au moins $n - 1$. La somme des n valeurs propres vaut $\text{tr } A$, donc la dernière vaut $\text{tr } A$. **Ainsi** $\chi_A = X^{n-1}(X - \text{tr } A)$.

À partir de la question 4

4. Si $\text{tr } A \neq 0$, alors $\dim E_0 + \dim E_{\text{tr } A} \geq (n-1) + 1 = n$, donc A est diagonalisable. Si $\text{tr } A = 0$, alors $A^2 = 0$, donc A est nilpotente et non nulle : elle n'est pas diagonalisable. **Donc A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } A \neq 0$.**
5. La première matrice est de rang 1, de trace $1 + 4 + 9 = 14 \neq 0$: elle est diagonalisable. La seconde est de rang 1, de trace $1 - 1 + 0 = 0$: elle ne l'est pas. **Réponses : oui pour la première, non pour la seconde.**

Point de méthode : une matrice de rang 1 se traite toujours avec l'écriture UV^T et la relation $A^2 = (\text{tr } A)A$.

Corrigé de l'exercice 17 : Transposition dans $M_n(\mathbb{R})$

1. La transposition est linéaire : $(\lambda M + N)^T = \lambda M^T + N^T$. De plus, $(M^T)^T = M$. **Donc τ est un endomorphisme et $\tau \circ \tau = \text{id}$.**
2. Si $\tau(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$, alors $M = \tau^2(M) = \lambda^2 M$, donc $\lambda^2 = 1$. Ensuite, $E_1 = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, tous deux non nuls car $n \geq 2$. **Donc $\text{Sp}(\tau) = \{-1, 1\}$, avec les matrices symétriques et antisymétriques comme sous-espaces propres.**
3. Toute matrice s'écrit $M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$, somme d'une symétrique et d'une antisymétrique. Donc $\mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et la somme est directe. **Ainsi τ est diagonalisable.**
4. On a $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}$. Avec les valeurs propres, $\text{tr } \tau = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$. Avec la base canonique, $\tau(E_{ij}) = E_{ji}$: la coordonnée de $\tau(E_{ij})$ sur E_{ij} vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, donc la trace vaut aussi n . Enfin, $\det \tau = 1^{n(n+1)/2} (-1)^{n(n-1)/2}$. **Donc $\text{tr } \tau = n$ et $\det \tau = (-1)^{n(n-1)/2}$.**

Corrigé de l'exercice 18 : Vrai ou faux sur la diagonalisation

1. **Faux.** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres distinctes, 1 et 0, donc elle est diagonalisable. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale. Pourtant leur somme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.
2. **Faux.** Les matrices I_2 et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ont le même polynôme caractéristique $(X - 1)^2$. Cependant, la seule matrice semblable à I_2 est I_2 elle-même.
3. **Vrai.** Si $A = PDP^{-1}$ est inversible, les coefficients de D sont non nuls. Alors $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, et D^{-1} est diagonale.
4. **Faux.** La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0$, qui est diagonale. Pourtant N n'est pas diagonalisable.
5. **Vrai.** Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^T = (P^{-1})^T D P^T = Q D Q^{-1}$ avec $Q = (P^T)^{-1}$. La réciproque s'obtient en appliquant ce résultat à A^T .
6. **Faux.** La matrice $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$, qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Corrigé de l'exercice 19 : Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

1. La linéarité découle de celle de la dérivation et de la multiplication par un polynôme fixé. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Les deux termes sont de degré au plus $n + 1$. Le coefficient de X^{n+1} vaut $n a_n - n a_n = 0$. Donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ et φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Par la dérivée d'un produit,
 $P'_k = k(X - 1)^{k-1}(X + 1)^{n-k} + (n - k)(X - 1)^k (X + 1)^{n-k-1}$, les termes d'exposant négatif étant absents. En multipliant par $(X - 1)(X + 1)$, on obtient :
 $(X^2 - 1)P'_k = P_k(k(X + 1) + (n - k)(X - 1)) = P_k(nX + 2k - n).$

Par conséquent, $\varphi(P_k) = (2k - n)P_k$.

3. Les $n + 1$ réels $2k - n$, pour $0 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts. Les P_k sont non nuls, donc ce sont des vecteurs propres associés à $n + 1$ valeurs propres distinctes. Or $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$. **Donc φ est diagonalisable, de spectre $\{-n, -n + 2, \dots, 1, \dots, n\}$, et $(P_0, \dots, P_n)$ est une base propre.**

À partir de la question 4

4. Pour $n = 2$, on a $\varphi(1) = -2X$, $\varphi(X) = (X^2 - 1) - 2X^2 = -1 - X^2$ et $\varphi(X^2) = 2X(X^2 - 1) - 2X^3 = -2X$. La matrice est donc $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
 Pour $P_0 = (X + 1)^2$, de coordonnées $(1, 2, 1)$, on trouve $M(1, 2, 1) = (-2, -4, -2)$.
 Pour $P_1 = X^2 - 1$, on trouve $M(-1, 0, 1) = 0$. Pour $P_2 = (X - 1)^2$, on trouve $M(1, -2, 1) = (2, -4, 2)$. **On retrouve les valeurs propres $-2, 0$ et 2 , dont la somme vaut bien $\text{tr } M = 0$.**

Corrigé de l'exercice 20 : Commutant d'une matrice à valeurs propres distinctes

- Le coefficient (i, j) de BD vaut $b_{ij}\lambda_j$, et celui de DB vaut $\lambda_i b_{ij}$. Donc $BD = DB$ équivaut à $b_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$ pour tous i, j . Pour $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc $b_{ij} = 0$. **Ainsi B commute avec D si et seulement si B est diagonale.**
- On a $AB = BA$ si et seulement si $D(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)D$. D'après la question 1, cela équivaut à $P^{-1}BP$ diagonale. **Donc $\mathcal{C}(A) = \left\{ P \Delta P^{-1} \mid \Delta \text{ diagonale} \right\}$, sous-espace de dimension n .**
- Toute $B \in \mathcal{C}(A)$ s'écrit $P \Delta P^{-1}$: elle est diagonalisable dans la même base que A . Chaque sous-espace propre de A est une droite $\mathbb{K}V_i$, où V_i est la i -ième colonne de P . Or $BV_i = \delta_i V_i$. **Tout vecteur propre de A est donc vecteur propre de B .**
- Avec l'exercice 1, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors

$P \operatorname{diag}(\alpha, \beta) P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$. Le commutant est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Corrigé de l'exercice 21 : Racines carrées d'une matrice

- On a $\operatorname{tr} A = 5$ et $\det A = 4$, donc $\chi_A = (X - 1)(X - 4)$. Pour 1, l'équation $x + y = 0$ donne $(1, -1)$. Pour 4, l'équation $-2x + y = 0$ donne $(1, 2)$. Ainsi $A = P \operatorname{diag}(1, 4) P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Si $B^2 = A$, alors $AB = B^3 = BA$. Soit $V \in E_\lambda(A)$. Alors $A(BV) = B(AV) = \lambda BV$, donc $BV \in E_\lambda(A)$. Ainsi B laisse stables les deux droites propres de A .
- Comme $BV_1 \in \mathbb{R}V_1$ et $BV_2 \in \mathbb{R}V_2$, la matrice $P^{-1}BP$ est diagonale, égale à $\operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2)$. La relation $B^2 = A$ donne $\mu_1^2 = 1$ et $\mu_2^2 = 4$. Réciproquement, ces quatre choix conviennent. Le calcul donne $P \operatorname{diag}(1, 2) P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $P \operatorname{diag}(-1, 2) P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les solutions sont $\pm \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Contrôle : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- Supposons $B^2 = N$. Alors $B^4 = N^2 = 0$, donc B est nilpotente dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Son indice est au plus 2, donc $B^2 = 0$. Or $N \neq 0$, ce qui est contradictoire. Donc N n'a pas de racine carrée.

Corrigé de l'exercice 22 : Problème : matrices compagnons et récurrences d'ordre 3

Partie A.

- On développe $\det(XI_3 - C) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -c_1 & X - c_2 \end{vmatrix}$ selon la première colonne. Le premier terme vaut $X(X(X - c_2) - c_1)$. Le second vaut $-c_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix} = -c_0$. **Donc** $\chi_C = X^3 - c_2 X^2 - c_1 X - c_0$.
- Le système $(C - \lambda I_3)X = 0$ donne $y = \lambda x$ et $z = \lambda y = \lambda^2 x$. La troisième équation s'écrit alors $x(c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 - \lambda^3) = -x \chi_C(\lambda) = 0$: elle est automatiquement vérifiée. **Donc** $E_\lambda(C) = \text{Vect}((1, \lambda, \lambda^2))$, **de dimension 1**.
- Chaque sous-espace propre réel est une droite. Donc $\sum \dim E_\lambda$ est égal au nombre de valeurs propres réelles distinctes. **Ainsi** C **est diagonalisable si et seulement si** χ_C **a trois racines réelles distinctes**.

Partie B.

- Ici $\chi_C = X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$.
D'après la partie A, $C = V \text{diag}(1, -1, 2) V^{-1}$ **avec** $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

À partir de la question 2

- On cherche $X_0 = (3, 2, 6) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 2, 4)$. La première et la troisième équation donnent $3c = 3$, donc $c = 1$. Ensuite $a + b = 2$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 1$. Comme $X_n = C^n X_0$, on obtient
 $X_n = (1, 1, 1) + (-1)^n(1, -1, 1) + 2^n(1, 2, 4)$. **Donc** $u_n = 1 + (-1)^n + 2^n$.
Contrôle : la récurrence donne $u_3 = 12 + 2 - 6 = 8$, et la formule aussi.

Partie C.

- Ici $\chi_C = X^3 - X^2 - X + 1 = X^2(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)^2(X + 1)$. La valeur

propre 1 est double, mais $\dim E_1 = 1$ d'après la partie A. **Donc C n'est pas diagonalisable.**

À partir de la question 2

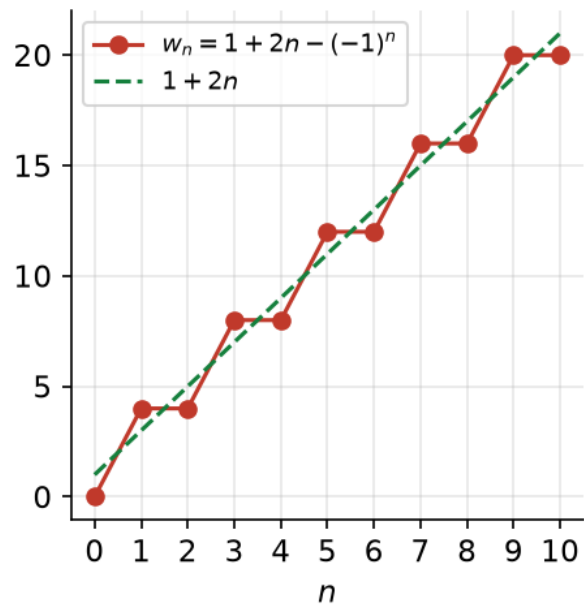
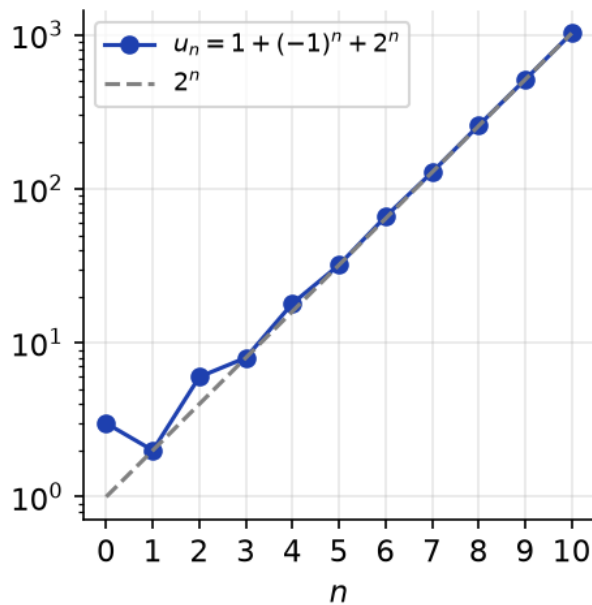
2. On a $C - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $(C - I_3)(0, y, z) = (y, z - y, y)$. L'égalité avec $(1, 1, 1)$ donne $y = 1$ et $z = 2$. Ainsi $V_2 = (0, 1, 2)$ et $CV_2 = V_1 + V_2$. Par la partie A, V_1 est propre pour 1 et V_3 pour -1 . **Donc** $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Le résultat est vrai pour $n = 0$. S'il est vrai au rang n , alors $C^{n+1}V_2 = CV_2 + nCV_1 = V_1 + V_2 + nV_1$. **Donc** $C^n V_2 = V_2 + nV_1$ pour tout n .

À partir de la question 4

4. On résout $(0, 4, 4) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$. La première coordonnée donne $\alpha + \gamma = 0$. Les deux autres donnent $\alpha + \beta - \gamma = 4$ et $\alpha + 2\beta + \gamma = 4$, soit $\beta = 2$ puis $\alpha = 1$ et $\gamma = -1$. Ensuite, $Y_n = C^n Y_0 = V_1 + 2(V_2 + nV_1) - (-1)^n V_3$. **Donc** $w_n = 1 + 2n - (-1)^n$. Contrôle : $w_3 = 4 + 4 - 0 = 8$, et la formule donne $1 + 6 + 1 = 8$.

La figure ci-dessous compare les deux situations. À gauche, la valeur propre dominante 2 impose une croissance géométrique. À droite, le bloc triangulaire associé à la valeur propre double 1 produit un terme linéaire en n .



Point de méthode : une valeur propre double non diagonalisable produit un facteur n dans le terme général, comme dans les équations différentielles linéaires.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths spé

- Le cours : [diagonalisation et trigonalisation, cours de maths spé](#)
- Les énoncés : [exercices de maths spé sur diagonalisation et trigonalisation](#)
- À maîtriser avant : [Éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- Chapitre précédent : [Éléments propres et polynôme caractéristique](#)
- Chapitre suivant : [Polynômes d'endomorphismes et Cayley-Hamilton](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths spé par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths spé](#) et les [chapitres de maths sup](#)

