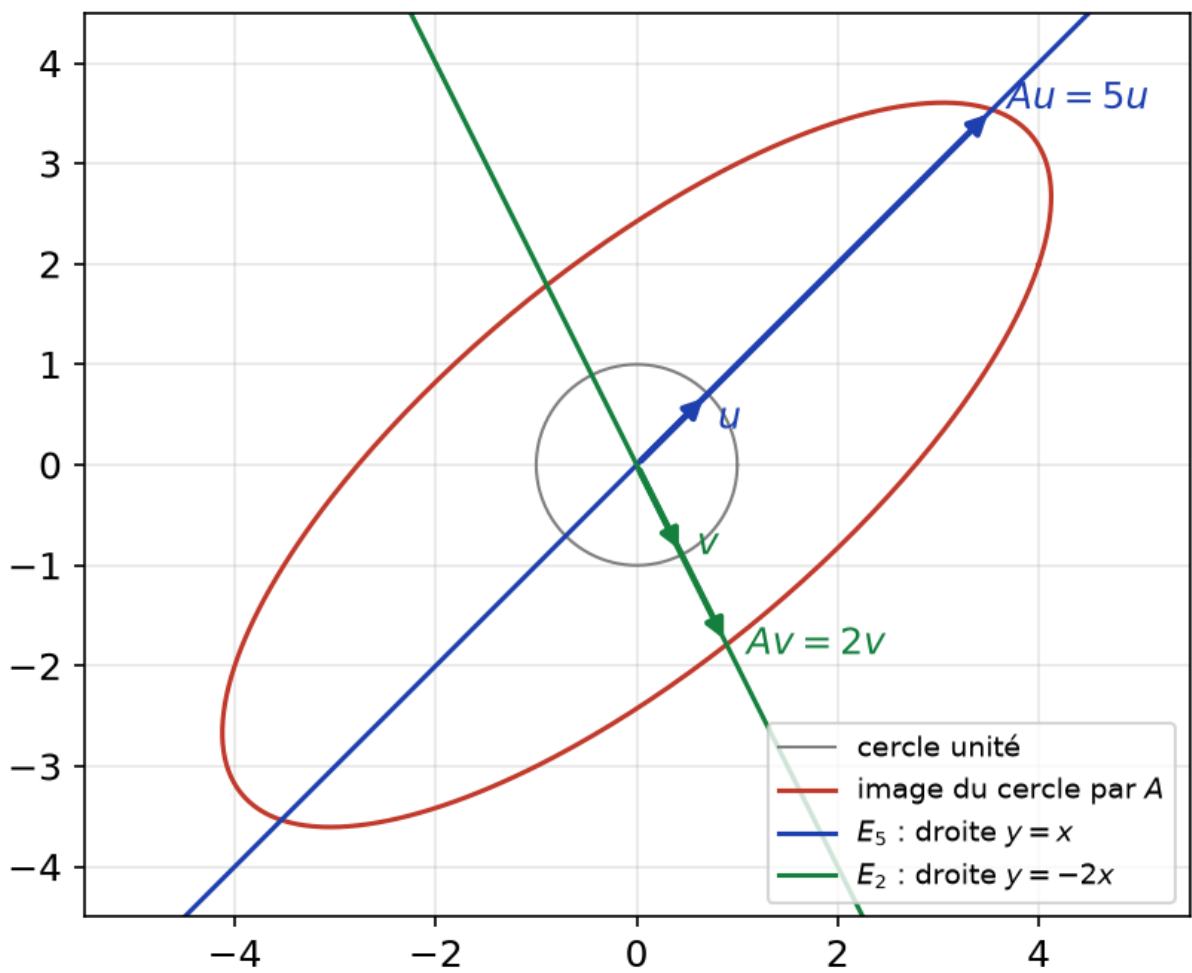


Diagonalisation

Corrigé de l'exercice 1 : Éléments propres d'une matrice d'ordre 2

1. Pour une matrice d'ordre 2, $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A$. Ici, $\text{tr}(A) = 7$ et $\det A = 12 - 2 = 10$. Donc $\chi_A(X) = X^2 - 7X + 10$. Le discriminant vaut $49 - 40 = 9$, d'où les racines $\frac{7 \pm 3}{2}$. **On obtient** $\chi_A = (X - 2)(X - 5)$ **et** $\text{Sp}(A) = \{2, 5\}$.
2. Pour $\lambda = 5$, on résout $(A - 5I_2)X = 0$, soit $-x + y = 0$ et $2x - 2y = 0$. Ainsi $y = x$. Pour $\lambda = 2$, on résout $(A - 2I_2)X = 0$, soit $2x + y = 0$ (les deux lignes sont identiques). Ainsi $y = -2x$. **Donc** $E_5(A) = \text{Vect}((1,1))$ **et** $E_2(A) = \text{Vect}((1,-2))$.
3. La matrice A est d'ordre 2 et possède deux valeurs propres distinctes. D'après le corollaire du critère de diagonalisabilité, elle est donc diagonalisable. On range les vecteurs propres en colonnes, dans l'ordre des valeurs propres choisies. **On peut prendre** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **et** $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, **avec** $A = PDP^{-1}$.

La figure ci-dessous montre les deux droites propres. De plus, l'image du cercle unité par A est une ellipse ; les vecteurs u et v , unitaires et dirigés selon les droites propres, sont simplement multipliés par 5 et par 2.



Point de méthode : vérifiez toujours un vecteur propre en calculant AX . Ici, $A(1,1) = (5,5)$ et $A(1,-2) = (2,-4)$.

Corrigé de l'exercice 2 : Reconnaître des vecteurs propres

- On calcule chaque produit. D'abord, $Mv_1 = (3,3,0) = 3v_1$, donc v_1 est propre pour 3. Ensuite, $Mv_2 = (1-2, 2-1, 0) = (-1,1,0) = -v_2$, donc v_2 est propre pour -1 . De plus, $Mv_3 = (0,0,3) = 3v_3$, donc v_3 est propre pour 3. En revanche, $Mv_4 = (1,2,0)$ n'est pas colinéaire à v_4 : ce n'est pas un vecteur propre. Enfin, $Mv_5 = (3,3,3) = 3v_5$.
Les vecteurs v_1, v_3, v_5 sont propres pour 3, v_2 est propre pour -1 , et v_4 n'est pas propre.
- La famille (v_1, v_2, v_3) est libre. En effet, v_3 n'a pas de composante dans le plan $z = 0$, où v_1 et v_2 sont non colinéaires. On dispose donc d'une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

Par définition, M est diagonalisable, et $M = PDP^{-1}$ avec $P = (v_1 | v_2 | v_3)$ et $D = \text{diag}(3, -1, 3)$. Le spectre est l'ensemble des coefficients de D . Ainsi $\text{Sp}(M) = \{-1, 3\}$.

3. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Donc

$\chi_M = \chi_D = (X - 3)^2(X + 1)$. On en tire $\text{tr}(M) = 3 + 3 - 1 = 5$, ce qui est bien $1 + 1 + 3$. De même, $\det M = 3 \cdot 3 \cdot (-1) = -9$. Par un calcul direct, $\det M = 3 \times (1 - 4) = -9$. On retrouve $\chi_M = (X - 3)^2(X + 1)$, $\text{tr}(M) = 5$ et $\det M = -9$.

Point de méthode : le vecteur $v_5 = v_1 + v_3$ est propre car v_1 et v_3 sont dans le même sous-espace propre $E_3(M)$, qui est un plan.

Corrigé de l'exercice 3 : Sous-espaces stables

1. Soit $x \in \ker v$. Alors $v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \ker v$. Soit ensuite $y \in \text{Im } v$, de la forme $y = v(z)$. Alors $u(y) = u(v(z)) = v(u(z))$, qui appartient à $\text{Im } v$. **Les sous-espaces $\ker v$ et $\text{Im } v$ sont stables par u .**

2. Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. Si P est constant, $P' = 0 \in \mathbb{R}_k[X]$. Sinon, $\deg P' = \deg P - 1 \leq k - 1$. Dans les deux cas, $D(P) \in \mathbb{R}_k[X]$. **Chaque $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par D .** On aurait aussi pu remarquer que $\mathbb{R}_k[X] = \ker D^{k+1}$, et que D commute avec D^{k+1} .

3. Une droite $\text{Vect}(x)$, avec $x \neq 0$, est stable si et seulement si x est vecteur propre. Or $\chi_R(X) = X^2 - 0 \cdot X + 1 = X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. Donc R n'a pas de valeur propre réelle. **Aucune droite de $\mathbb{R}^2$ n'est stable par R .** Géométriquement, R est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$: elle change la direction de tout vecteur non nul.

4. Les colonnes de la matrice donnent $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_1 + 2e_2$. Ces deux vecteurs appartiennent à $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Par linéarité, $f(F) \subset F$. **Le plan F est stable, et la matrice de l'endomorphisme induit dans (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.** On reconnaît le bloc supérieur gauche de la matrice de f .

Corrigé de l'exercice 4 : Spectre d'une matrice triangulaire et multiplicités

1. La matrice $XI_3 - T$ est triangulaire supérieure. Son déterminant est donc le produit de ses coefficients diagonaux. **Ainsi** $\chi_T = (X - 2)^2(X - 3)$ **et** $\text{Sp}(T) = \{2, 3\}$.
2. La valeur propre 3 est simple, donc $m(3) = 1$ et $\dim E_3(T) = 1$. Pour 2, on a $m(2) = 2$. Ensuite, $T - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux premières lignes ne sont pas proportionnelles, donc ce rang vaut 2. Par le théorème du rang, $\dim E_2(T) = 3 - 2 = 1$. Plus précisément, le système donne $y - z = 0$ et $y + z = 0$, soit $y = z = 0$. De même, $T - 3I_3$ conduit à $z = 0$ et $x = y$. **On obtient** $E_2(T) = \text{Vect}((1,0,0))$ **avec** $m(2) = 2$, **et** $E_3(T) = \text{Vect}((1,1,0))$ **avec** $m(3) = 1$.
3. On a $\dim E_2(T) = 1 < 2 = m(2)$. D'après le critère de diagonalisabilité, **T n'est pas diagonalisable**. Autrement dit, $\dim E_2 + \dim E_3 = 2 < 3$.

Corrigé de l'exercice 5 : Polynôme caractéristique et invariants

1. On calcule directement :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - a & -b \\ -c & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc = X^2 - (a + d)X + (ad - bc).$$

Comme $a + d = \text{tr}(A)$ **et** $ad - bc = \det A$, **on a bien**

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A.$$

2. Une matrice et sa transposée ont le même déterminant. Or $(XI_n - A)^T = XI_n - A^T$. Donc $\chi_{A^T} = \chi_A$, et **A et A^T ont le même spectre**. En revanche, les sous-espaces propres diffèrent en général. Par exemple, pour $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $E_1(N) = \text{Vect}((1,0))$, alors que $E_1(N^T) = \text{Vect}((0,1))$. **Les sous-espaces propres ne sont donc pas les mêmes en général, mais ils ont la même dimension**, car $\text{rg}(A - \lambda I_n) = \text{rg}(A^T - \lambda I_n)$.
3. On a $0 \in \text{Sp}(A)$ si et seulement si $\chi_A(0) = 0$. Or $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$. **Donc** **A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si**

$$0 \notin \text{Sp}(A).$$

4. Le polynôme χ_A est réel, unitaire, de degré 3, et admet les racines 1 et 2. Il s'écrit donc $(X-1)(X-2)(X-c)$ avec c réel. Le coefficient de X^2 vaut $-\text{tr}(A)$, d'où $1+2+c=6$, soit $c=3$. Ensuite, $\det A$ est le produit des racines, soit $1 \times 2 \times 3 = 6$. Enfin, A possède trois valeurs propres distinctes en dimension 3. **La troisième valeur propre est 3, $\det A = 6$, et A est diagonalisable.**

Corrigé de l'exercice 6 : Puissances d'une matrice d'ordre 2

1. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, de déterminant $-2 - 1 = -3$. Par la formule de l'inverse d'une matrice d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $PP^{-1} = I_2$.

2. Comme $A = PDP^{-1}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \text{diag}(5^n, 2^n)$. D'abord, $D^n P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n & 5^n \\ 2^n & -2^n \end{pmatrix}$. Ensuite, on multiplie à gauche par P :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1} & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Cette formule vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour $n = 0$, on trouve $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = I_2$. Pour $n = 1$, on trouve $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$. Pour $n = 3$, avec $5^3 = 125$ et $2^3 = 8$, on obtient $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & 117 \\ 234 & 141 \end{pmatrix}$. Ainsi $A^3 = \begin{pmatrix} 86 & 39 \\ 78 & 47 \end{pmatrix}$. Un calcul direct confirme ce résultat : $A^2 = \begin{pmatrix} 18 & 7 \\ 14 & 11 \end{pmatrix}$, puis $A^2 A = \begin{pmatrix} 86 & 39 \\ 78 & 47 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Diagonalisation d'une matrice d'ordre 3

1. On écrit $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$. On remplace C_1 par $C_1 + C_2 + C_3$: chaque coefficient de la première colonne devient $X - 2$. On factorise :

$$\chi_A(X) = (X - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix},$$

après $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. **Donc** $\chi_A = (X - 1)^2(X - 2)$. Contrôle : $\text{tr}(A) = 4 = 1 + 1 + 2$.

2. La matrice $A - I_3$ a ses trois lignes égales à $(-1, 1, 1)$. Elle est de rang 1, donc $\dim E_1(A) = 2$. Le sous-espace $E_1(A)$ est le plan d'équation $x = y + z$. Ensuite, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La deuxième ligne donne $z = x$ et la troisième $y = x$; la première est alors vérifiée. **On obtient** $E_1(A) = \text{Vect}((1,1,0), (1,0,1))$, **de dimension 2**, et $E_2(A) = \text{Vect}((1,1,1))$, **de dimension 1**.

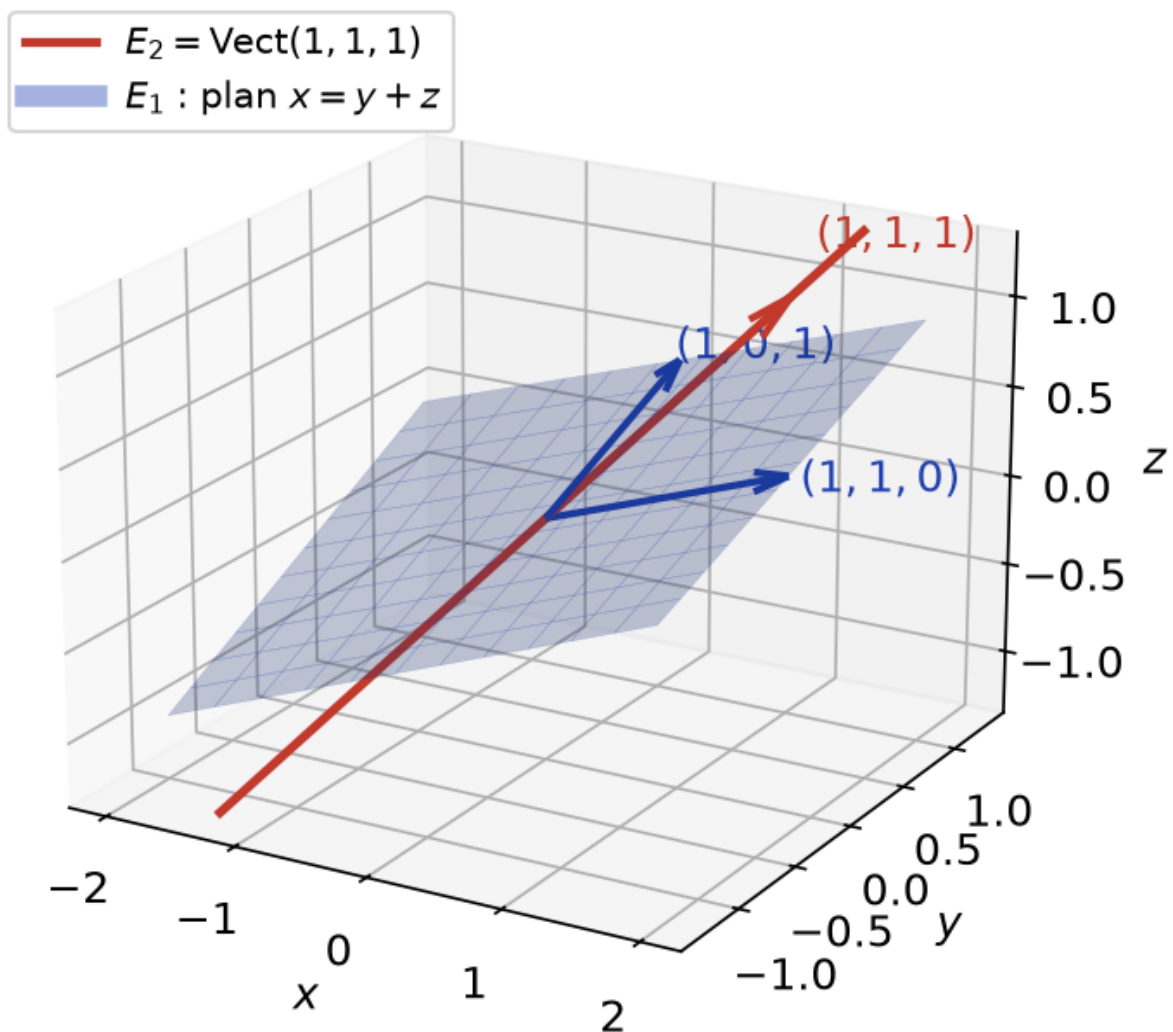
3. On a $\dim E_1(A) + \dim E_2(A) = 3$. D'après le critère, A est diagonalisable. **On prend** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $D = \text{diag}(1, 1, 2)$. Un calcul donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui servira à l'exercice 19.

4. Posons $Q = A - I_3$. Chaque colonne de Q est de la forme (q, q, q) , avec $q \in \{-1, 1\}$. Le produit d'une ligne $(-1, 1, 1)$ par une telle colonne vaut $q(-1 + 1 + 1) = q$. Donc $Q^2 = Q$. Comme I_3 et Q commutent, la formule du binôme de Newton s'applique :

$$A^n = (I_3 + Q)^n = I_3 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} Q^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right) Q = I_3 + (2^n - 1) Q.$$

Donc $A^n = I_3 + (2^n - 1)(A - I_3)$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$. Ce résultat est cohérent avec la diagonalisation : Q est le projecteur sur $E_2(A)$ parallèlement à $E_1(A)$.

La figure ci-dessous représente les deux sous-espaces propres trouvés : le plan $E_1(A)$ et la droite $E_2(A)$, qui lui est supplémentaire.



Corrigé de l'exercice 8 : Une matrice non diagonalisable

1. La deuxième colonne de $XI_3 - B$ est $(0, X - 2, 0)$. On développe selon cette colonne :

$$\chi_B(X) = (X - 2) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & X \end{vmatrix} = (X - 2)(X^2 - 3X + 2).$$

Or $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. **Donc** $\chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$.

2. Pour $\lambda = 2$, on a $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Les équations $x - z = 0$ et $2x - z = 0$ donnent $x = z = 0$, et y est libre. Pour $\lambda = 1$, on a

$B - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ainsi $z = 2x$, puis $2x + y - 2x = 0$, soit $y = 0$. On obtient $E_2(B) = \text{Vect}((0,1,0))$ et $E_1(B) = \text{Vect}((1,0,2))$.

3. Le polynôme χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$. Cependant, $\dim E_2(B) = 1 < 2 = m(2)$. Donc B n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sur $\mathbb{C}$, les valeurs propres et le rang de $B - 2I_3$ sont les mêmes. Par conséquent, B n'est pas non plus diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Point de méthode : changer de corps ne sert que si χ n'est pas scindé. Un défaut de dimension d'un sous-espace propre persiste sur $\mathbb{C}$.

Corrigé de l'exercice 9 : Diagonalisabilité selon un paramètre

- La matrice A_α est triangulaire supérieure. Donc $\chi_{A_\alpha} = (X - 1)^2(X - 2)$, $\text{Sp}(A_\alpha) = \{1, 2\}$, avec $m(1) = 2$ et $m(2) = 1$, quel que soit α .
- On a $A_\alpha - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\alpha \neq 0$, les deux premières lignes sont indépendantes, donc le rang vaut 2. Si $\alpha = 0$, les trois lignes valent $(0, 0, 1)$, donc le rang vaut 1. Ainsi $\text{rg}(A_\alpha - I_3) = 2$ si $\alpha \neq 0$, et 1 si $\alpha = 0$.
- La valeur propre simple 2 ne pose aucun problème. Pour 1, le théorème du rang donne $\dim E_1(A_\alpha) = 3 - \text{rg}(A_\alpha - I_3)$. Si $\alpha \neq 0$, cette dimension vaut $1 < m(1)$. Si $\alpha = 0$, elle vaut $2 = m(1)$. Donc A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha = 0$.
- Pour $\alpha = 0$, E_1 est défini par $z = 0$, donc $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Ensuite, $A_0 - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne $x = z$ et $y = z$. On prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, 1, 2)$, avec $A_0 = PDP^{-1}$. Vérification : $A_0(1,1,1) = (2,2,2)$.

Corrigé de l'exercice 10 : Diagonalisation sur R et sur C

1. On a $\text{tr}(B) = 0$ et $\det B = -1 + 2 = 1$. Donc $\chi_B = X^2 + 1$. Ce polynôme n'a pas de racine réelle. **Par conséquent, B n'a pas de valeur propre réelle et n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
2. Sur $\mathbb{C}$, $\chi_B = (X - i)(X + i)$ a deux racines distinctes. Donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour $\lambda = i$, la seconde ligne de $B - iI_2$ donne $x - (1 + i)y = 0$. On prend $y = 1$ et $x = 1 + i$. On vérifie la première ligne : $(1 - i)(1 + i) - 2 = 2 - 2 = 0$. Pour $\lambda = -i$, B étant réelle, on prend le vecteur conjugué. **Une base de vecteurs propres est $((1 + i, 1), (1 - i, 1))$, associés respectivement à i et à $-i$.**
3. Le calcul donne $B^2 = \begin{pmatrix} 1 - 2 & -2 + 1 \\ 1 - 1 & -2 + 1 \end{pmatrix} = -I_2$. On peut aussi le voir sur la diagonalisation, puisque $i^2 = (-i)^2 = -1$. Par récurrence, $B^{2k} = (-1)^k I_2$ et $B^{2k+1} = (-1)^k B$. **La suite des puissances est périodique de période 4 :**
 $I_2, B, -I_2, -B, I_2, \dots$

Corrigé de l'exercice 11 : Matrices de rang 1

1. La j -ième colonne de $A = UV^T$ vaut $v_j U$. Toutes les colonnes sont donc colinéaires à U , et l'une d'elles est non nulle puisque $V \neq 0$. Donc $\text{rg}(A) = 1$. De plus, le coefficient diagonal (i, i) vaut $u_i v_i$. **Ainsi $\text{tr}(A) = \sum_i u_i v_i = V^T U$.**
2. Par associativité, $A^2 = U(V^T U)V^T$. Or $V^T U$ est un scalaire, égal à $\text{tr}(A)$. **Donc $A^2 = \text{tr}(A) A$.**
3. Par le théorème du rang, $\dim \ker A = n - 1$, donc $\dim E_0(A) = n - 1 \geq 1$: 0 est valeur propre. Ensuite, $AU = U(V^T U) = \text{tr}(A)U$, avec $U \neq 0$. **Si $\text{tr}(A) \neq 0$, alors $\text{tr}(A)$ est une valeur propre non nulle, et U est un vecteur propre associé.**
4. Supposons $\text{tr}(A) \neq 0$. Alors $\dim E_0(A) + \dim E_{\text{tr}(A)}(A) \geq (n-1) + 1 = n$, donc A est diagonalisable. Supposons maintenant $\text{tr}(A) = 0$. Alors $A^2 = 0$. Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $0 = A^2 X = \lambda^2 X$, donc $\lambda = 0$. Le spectre est $\{0\}$, et $\dim E_0(A) = n - 1 < n$. **Donc A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.**
5. On a $J_n = UU^T$ avec $U = (1, \dots, 1)^T$, et $\text{tr}(J_n) = n \neq 0$. Le sous-espace $E_0(J_n)$ est l'hyperplan $x_1 + \dots + x_n = 0$, de base $(e_1 - e_k)_{2 \leq k \leq n}$. Le sous-

espace $E_n(J_n)$ est la droite engendrée par U . Ainsi $J_n = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$ et $P = (U | e_1 - e_2 | \dots | e_1 - e_n)$. Enfin, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et de trace nulle. **Elle n'est donc pas diagonalisable.**

Corrigé de l'exercice 12 : Éléments propres d'endomorphismes de polynômes

1. La linéarité découle de celle de la dérivation. De plus, si $\deg P \leq n$, alors $\deg P' \leq n - 1$, donc $\deg((X+1)P') \leq n$. **Ainsi u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**
2. Pour $k \geq 1$, $u(X^k) = (X+1)kX^{k-1} = kX^k + kX^{k-1}$, et $u(1) = 0$. La matrice est donc triangulaire supérieure, avec les coefficients $0, 1, \dots, n$ sur la diagonale et $1, 2, \dots, n$ juste au-dessus. **Le spectre de u est $\{0, 1, \dots, n\}$.** Il comporte $n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$. **Donc u est diagonalisable.**
3. Pour $k \geq 1$, on a $u((X+1)^k) = (X+1) \cdot k(X+1)^{k-1} = k(X+1)^k$, et c'est aussi vrai pour $k = 0$. Chaque $(X+1)^k$ est donc un vecteur propre pour la valeur propre k . Ces polynômes sont échelonnés en degré, donc forment une famille libre de $n + 1$ vecteurs. **La famille $(1, X+1, (X+1)^2, \dots, (X+1)^n)$ est une base de vecteurs propres de u .**
4. La matrice de D dans la base canonique est triangulaire supérieure stricte. Donc $\chi_D = X^{n+1}$ et $\text{Sp}(D) = \{0\}$. Si D était diagonalisable, sa matrice dans une base propre serait nulle, donc $D = 0$. Or $D(X) = 1 \neq 0$ (on a $n \geq 1$). **La dérivation D n'est donc pas diagonalisable.**

Corrigé de l'exercice 13 : La transposition dans les matrices carrées

1. Pour tous M, N et tout α réel, $(\alpha M + N)^T = \alpha M^T + N^T$. Donc τ est linéaire. De plus, $(M^T)^T = M$. **Ainsi $\tau \circ \tau = \text{id}$.**

- Si $\tau(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$, alors $M = \tau(\tau(M)) = \lambda^2 M$, donc $\lambda^2 = 1$. Ensuite, $\tau(M) = M$ signifie que M est symétrique, et $\tau(M) = -M$ qu'elle est antisymétrique. Ces deux ensembles sont non nuls car $n \geq 2$. **Donc** $\text{Sp}(\tau) = \{-1, 1\}$, $E_1(\tau) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(\tau) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Toute matrice s'écrit $M = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2}$, somme d'une symétrique et d'une antisymétrique. Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_1(\tau) + E_{-1}(\tau)$, et cette somme est directe. D'après le critère, τ est diagonalisable. Une matrice symétrique est déterminée par ses coefficients sur et au-dessus de la diagonale. **Ainsi** $\dim E_1(\tau) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim E_{-1}(\tau) = \frac{n(n-1)}{2}$. On vérifie que leur somme vaut n^2 .
- Dans une base propre, la matrice de τ est diagonale, avec $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients égaux à 1 et $\frac{n(n-1)}{2}$ égaux à -1 . D'une part, $\text{tr}(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$. D'autre part, le déterminant est le produit des coefficients diagonaux. **Donc** $\text{tr}(\tau) = n$ et $\det(\tau) = (-1)^{n(n-1)/2}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Projecteurs et symétries

- Si $p(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, alors $p(p(x)) = \lambda^2 x$ et aussi $p(x) = \lambda x$. Donc $\lambda^2 = \lambda$, soit $\lambda \in \{0, 1\}$. Ensuite, tout x s'écrit $x = p(x) + (x - p(x))$. Or $p(p(x)) = p(x)$, donc $p(x) \in \ker(p - \text{id}_E)$. De même, $p(x - p(x)) = p(x) - p(x) = 0$, donc $x - p(x) \in \ker p$. Ainsi $E = \ker p + \ker(p - \text{id}_E)$. La somme est directe, car ce sont deux sous-espaces propres pour des valeurs distinctes (ou l'un d'eux est nul). **Donc** $E = E_0(p) \oplus E_1(p)$, et p est diagonalisable.
- De même, $s(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$ entraîne $\lambda^2 = 1$. On écrit $x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$. Or $s(x + s(x)) = s(x) + x$ et $s(x - s(x)) = -(x - s(x))$. Le premier terme est dans $E_1(s)$, le second dans $E_{-1}(s)$. **Donc** $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$, et s est diagonalisable.
- On calcule $\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En divisant par 25, on obtient $P^2 = P$. Ensuite, $P(2,1) = \frac{1}{5}(10, 5) = (2,1)$ et $P(1,-2) = \frac{1}{5}(0, 0) = 0$. **Donc** $E_1(P) = \text{Vect}((2,1))$ et $E_0(P) = \text{Vect}((1,-2))$: P est la projection sur D parallèlement à D' .

4. On a $S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Comme $P^2 = P$, il vient $S^2 = 4P^2 - 4P + I_2 = I_2$. De plus, S vaut $2 - 1 = 1$ sur $E_1(P)$ et $0 - 1 = -1$ sur $E_0(P)$. **Donc** $E_1(S) = \text{Vect}((2,1))$ **et** $E_{-1}(S) = \text{Vect}((1,-2))$: **S est la symétrie par rapport à D parallèlement à D'** . Enfin, $Px = \frac{1}{5}(4 + 6, 2 + 3) = (2, 1)$ et $Sx = 2Px - x = (3, -1)$. **On obtient** $Px = (2,1)$ **et** $Sx = (3,-1)$, conformément à la figure de l'énoncé : $x = (2,1) + (-1, 2)$ se décompose sur $D \oplus D'$.

Corrigé de l'exercice 15 : Une famille d'exponentielles

- La fonction f_λ est non nulle et vérifie $f'_\lambda = \lambda f_\lambda$. Donc λ est valeur propre de D . Réciproquement, soit f telle que $f' = \lambda f$. On pose $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$. Alors $g'(x) = (f'(x) - \lambda f(x))e^{-\lambda x} = 0$. Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g est constante, égale à c . **Donc** $f = c f_\lambda$, **et** $E_\lambda(D) = \text{Vect}(f_\lambda)$ **pour tout réel** λ .
- Les fonctions $f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_p}$ sont des vecteurs propres de D associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Or les sous-espaces propres associés sont en somme directe, et ce théorème vaut aussi en dimension infinie (sa preuve n'utilise pas la dimension). **La famille** $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_p})$ **est donc libre**.
- On a $c_k''(x) = -k^2 \cos(kx)$, donc $D^2(c_k) = -k^2 c_k$. Chaque c_k est non nulle ($c_k(0) = 1$). C'est donc un vecteur propre de D^2 pour la valeur propre $-k^2$. Ces valeurs propres $0, -1, -4, \dots, -n^2$ sont deux à deux distinctes. **Par le même théorème appliqué à D^2 , la famille** $(c_0, \dots, c_n)$ **est libre**.

Corrigé de l'exercice 16 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

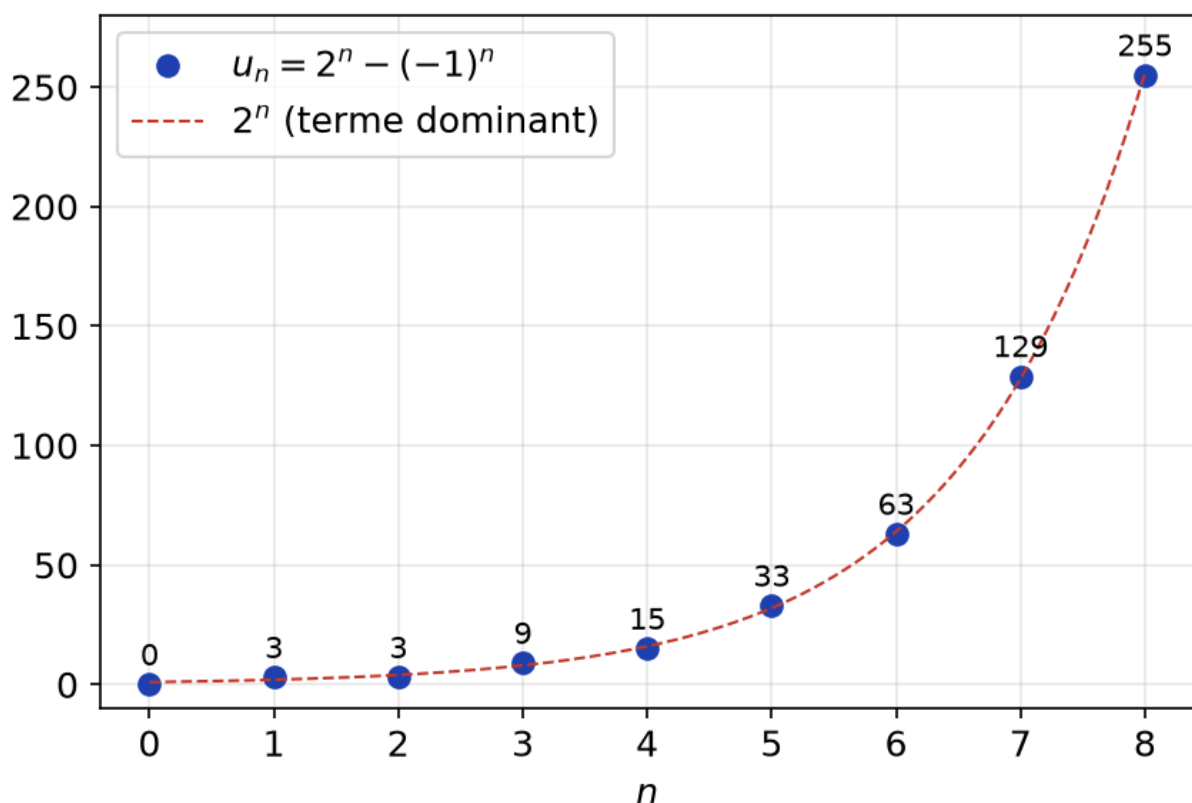
- La première coordonnée de X_{n+1} est u_{n+1} , la seconde est $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$. **Donc** $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- On a $\chi_C = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$. Pour une valeur propre λ , le vecteur $(1, \lambda)$ vérifie $C(1, \lambda) = (\lambda, 2 + \lambda) = (\lambda, \lambda^2) = \lambda(1, \lambda)$, puisque $\lambda^2 = \lambda + 2$. **Donc**

$$C = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(2, -1).$$

3. On décompose $X_0 = (0, 3)$ sur la base propre : $a(1, 2) + b(1, -1) = (0, 3)$ donne $a + b = 0$ et $2a - b = 3$, d'où $a = 1$ et $b = -1$. Donc $X_n = C^n X_0 = 2^n(1, 2) - (-1)^n(1, -1)$. En lisant la première coordonnée, **on obtient** $u_n = 2^n - (-1)^n$. Vérification : $u_0 = 0$, $u_1 = 3$, $u_2 = 3 = u_1 + 2u_0$, $u_3 = 9 = u_2 + 2u_1$.

4. Comme $\frac{(-1)^n}{2^n} \rightarrow 0$, on a $u_n = 2^n(1 - (-\frac{1}{2})^n)$. **Donc** $u_n \sim 2^n$ **quand** $n \rightarrow +\infty$.
La valeur propre de plus grand module impose la croissance.

La figure ci-dessous montre les premiers termes : ils suivent de très près la courbe de 2^n , à ± 1 près.



Corrigé de l'exercice 17 : Système de suites récurrentes

1. En A restent 80 % des habitants de A, et arrivent 30 % de ceux de B. De même pour B. **Ainsi**

$$x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{3}{10}y_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{7}{10}y_n, \text{ et } M = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/10 \\ 1/5 & 7/10 \end{pmatrix}.$$

2. On a $\text{tr}(M) = \frac{3}{2}$ et $\det M = \frac{28}{50} - \frac{3}{50} = \frac{1}{2}$. Donc

$$\chi_M = X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} = (X - 1)(X - \frac{1}{2}). \text{ Pour } 1, \text{ l'équation } -\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y = 0 \text{ donne } 2x = 3y. \text{ Pour } \frac{1}{2}, \text{ l'équation } \frac{3}{10}x + \frac{3}{10}y = 0 \text{ donne } y = -x. \text{ Donc}$$

$$\text{Sp}(M) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}, \text{ avec } V_1 = (3, 2) \text{ propre pour } 1 \text{ et } V_2 = (1, -1) \text{ propre pour } \frac{1}{2}.$$

3. On résout $aV_1 + bV_2 = (1, 0)$: $3a + b = 1$ et $2a - b = 0$, d'où $a = \frac{1}{5}$ et

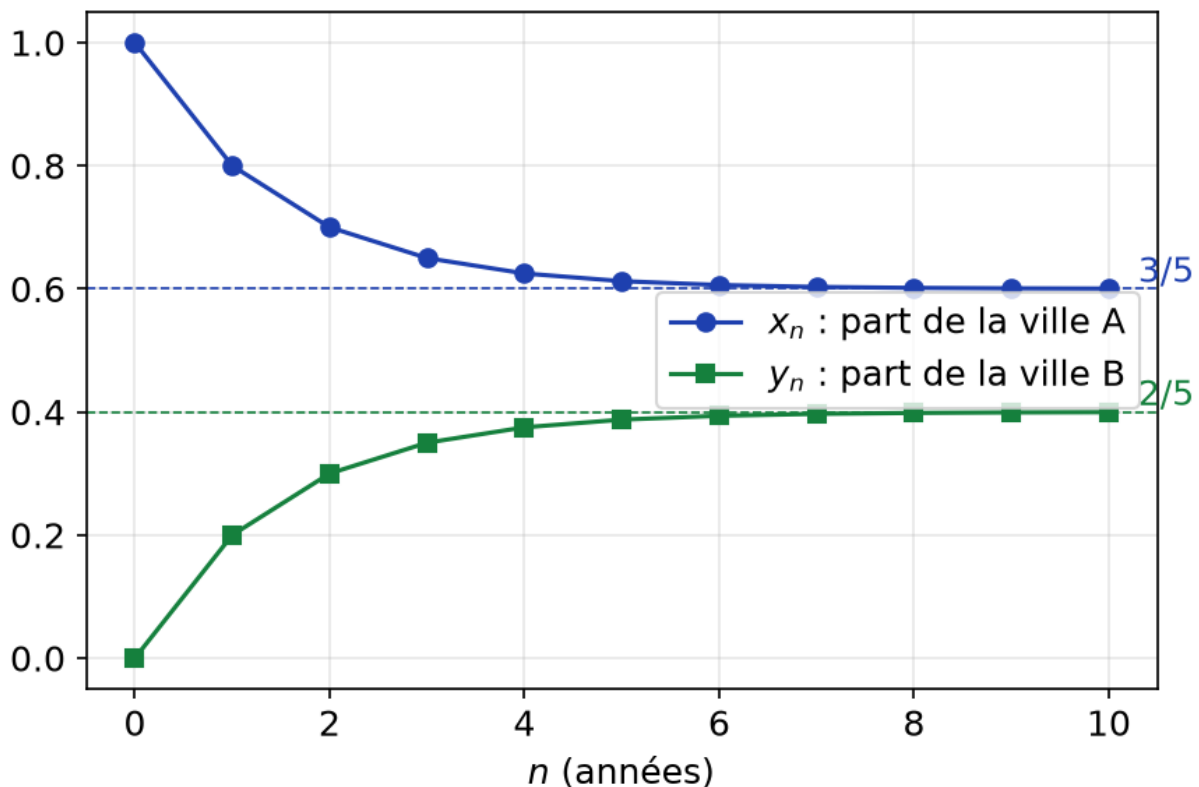
$$b = \frac{2}{5}. \text{ Donc } X_n = \frac{1}{5}V_1 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2. \text{ On obtient } x_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } y_n = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ qui tendent vers } \frac{3}{5} \text{ et } \frac{2}{5}. \text{ Vérification : } x_1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

4. Avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, de déterminant -5 , on a $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Ensuite, $M^n = P \text{diag}(1, 2^{-n})P^{-1}$, ce qui donne :

$$M^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot 2^{-n} & 3 - 3 \cdot 2^{-n} \\ 2 - 2 \cdot 2^{-n} & 2 + 3 \cdot 2^{-n} \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux colonnes de la limite valent $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$: quelle que soit la répartition initiale, la population se stabilise à 60 % en A et 40 % en B.

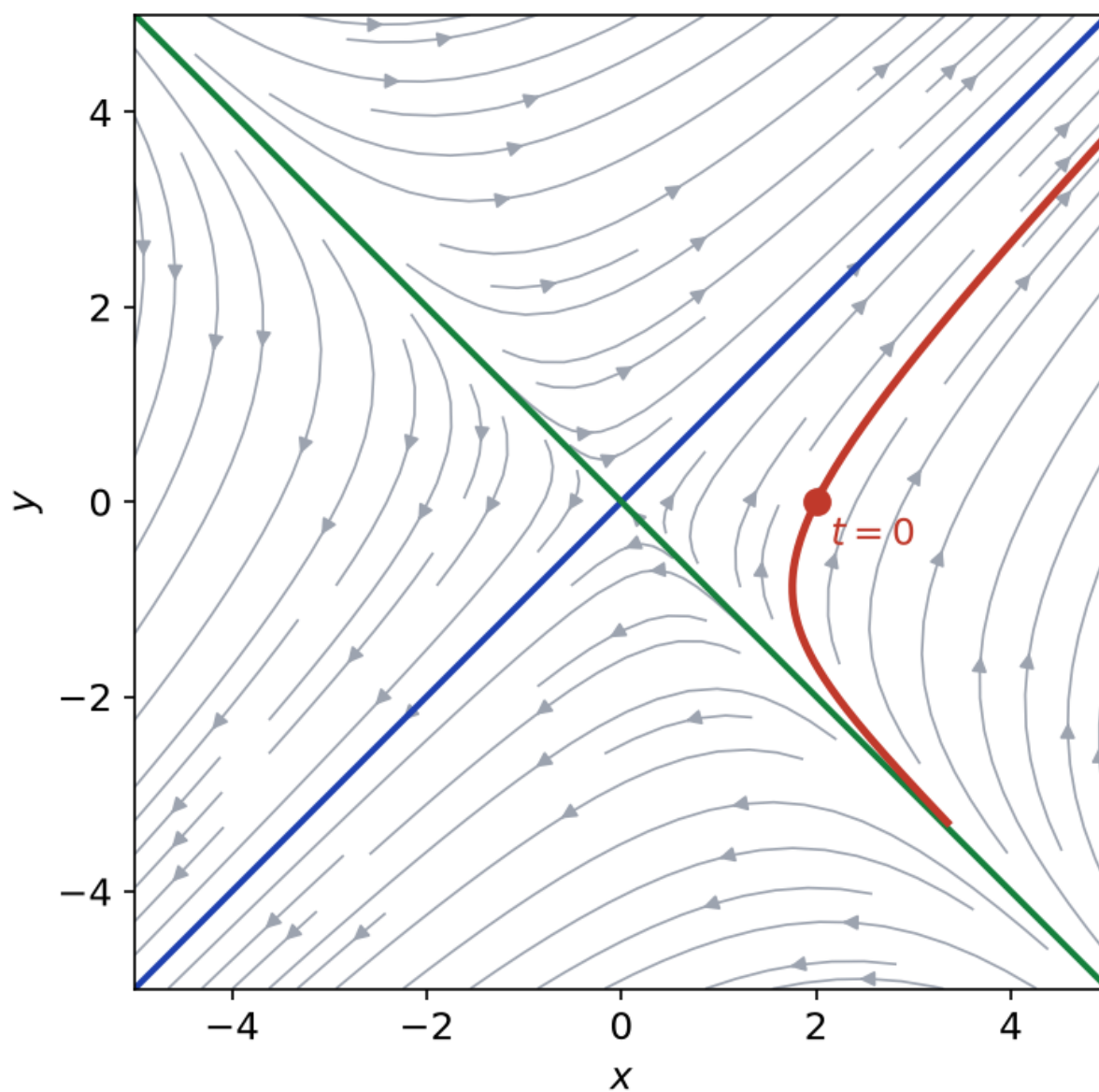
La figure ci-dessous illustre la convergence géométrique de raison $\frac{1}{2}$ vers cette répartition d'équilibre.



Corrigé de l'exercice 18 : Système différentiel d'ordre 2

- Le système s'écrit $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$. Ensuite, $A(1,1) = (3,3)$ et $A(1,-1) = (-1,1)$. Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(3, -1)$.
- D'après le théorème du cours sur les systèmes différentiels diagonalisables, **les solutions sont** $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$ et $y(t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}$, avec $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.
- En $t = 0$, on obtient $c_1 + c_2 = 2$ et $c_1 - c_2 = 0$, soit $c_1 = c_2 = 1$. Donc $x(t) = e^{3t} + e^{-t}$ et $y(t) = e^{3t} - e^{-t}$. Vérification : $x'(t) = 3e^{3t} - e^{-t}$, et $x + 2y = 3e^{3t} - e^{-t}$.
- Sur $[0, +\infty[$, e^{-t} est bornée alors que e^{3t} tend vers $+\infty$. La solution est bornée si et seulement si $c_1 = 0$. Or $c_1 = \frac{x(0) + y(0)}{2}$. **La solution est bornée sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $x(0) + y(0) = 0$** , c'est-à-dire si la condition initiale est sur la droite propre E_{-1} .

Le portrait de phase ci-dessous représente la solution de la question 3. Partie du point $(2, 0)$, elle s'approche d'abord de E_{-1} quand t décroît, puis s'aligne sur la direction de E_3 quand t croît.



- E_3 : droite $y = x$
- E_{-1} : droite $y = -x$
- solution avec $x(0) = 2, y(0) = 0$

Corrigé de l'exercice 19 : Système différentiel d'ordre 3

1. Les lignes de A sont $(0, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$ et $(-1, 1, 2)$. Le produit AX redonne exactement les seconds membres. **Le système s'écrit donc** $X' = AX$.
2. D'après l'exercice 7, A est diagonalisable avec $E_1 = \text{Vect}((1,1,0), (1,0,1))$ et $E_2 = \text{Vect}((1,1,1))$. **Les solutions sont les fonctions**
 $X(t) = ae^t(1,1,0) + be^t(1,0,1) + ce^{2t}(1,1,1)$, avec a, b, c réels.
3. On décompose $X(0) = (1,0,0)$: ses coordonnées dans la base propre sont données par la première colonne de P^{-1} , soit $(a, b, c) = (1, 1, -1)$. On le vérifie :
 $(1,1,0) + (1,0,1) - (1,1,1) = (1,0,0)$. **Donc** $x(t) = 2e^t - e^{2t}$ et
 $y(t) = z(t) = e^t - e^{2t}$. Vérification dans la première équation : $x'(t) = 2e^t - 2e^{2t}$, et
 $y + z = 2e^t - 2e^{2t}$.

Corrigé de l'exercice 20 : Chemins dans un graphe

1. On développe selon la première ligne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 1) + (-X) = X^3 - 2X.$$

Donc $\chi_A = X(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$. Ensuite, $A(1,0,-1) = (0,0,0)$,
 $A(1,\sqrt{2},1) = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ et $A(1,-\sqrt{2},1) = (-\sqrt{2}, 2, -\sqrt{2})$. **Les valeurs propres sont**
 $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, **de vecteurs propres** $(1,0,-1)$, $(1,\sqrt{2},1)$, $(1,-\sqrt{2},1)$.

2. La matrice possède trois valeurs propres distinctes en dimension 3. Elle est donc diagonalisable :
 $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(0, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Or $D^3 = \text{diag}(0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = 2D$.
Par conséquent, $A^3 = PD^3P^{-1} = 2PDP^{-1} = 2A$.

3. Par récurrence sur k , on obtient $A^{2k+1} = 2^k A$: c'est vrai pour $k = 0$, et
 $A^{2k+3} = A^{2k+1}A^2 = 2^k A^3 = 2^{k+1}A$. Ensuite, pour $k \geq 1$,
 $A^{2k} = A^{2k-1}A = 2^{k-1}A^2$. **Donc** $A^{2k+1} = 2^k A$ et $A^{2k} = 2^{k-1}A^2$, avec
 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. On a $A^{10} = 2^4 A^2$. Le coefficient $(1,3)$ de A^2 vaut 1 et le coefficient $(2,2)$ vaut 2. De plus, $A^7 = 2^3 A$, dont le coefficient $(1,2)$ vaut 8. **Il y a 16 chemins de longueur 10 de 1 à 3, 32 chemins de longueur 10 de 2 à 2, et 8 chemins de longueur 7 de 1 à 2.** Contrôle direct pour le dernier cas : partant de 1, on passe par 2 aux étapes 1, 3, 5 et 7 ; aux étapes 2, 4 et 6, on choisit librement 1 ou 3, soit $2^3 = 8$ chemins.

Corrigé de l'exercice 21 : Démonstration du critère de diagonalisabilité

- Pour $p = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons la propriété vraie pour $p - 1$ valeurs propres distinctes. Soient $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ tels que $x_1 + \dots + x_p = 0$. En appliquant $u - \lambda_p \text{id}_E$, on obtient $\sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$. Chaque terme appartient à $E_{\lambda_i}(u)$. Par hypothèse de récurrence, $(\lambda_i - \lambda_p) x_i = 0$, donc $x_i = 0$ puisque $\lambda_i \neq \lambda_p$. Il reste $x_p = 0$. **La somme des sous-espaces propres est donc directe.**
- Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de $E_{\lambda_1}(u)$, complétée en une base $\mathcal{B}$ de E . La matrice de u dans $\mathcal{B}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux. Donc $\chi_u = (X - \lambda_1)^d \chi_C$. **Par conséquent, $(X - \lambda_1)^d$ divise χ_u , d'où $d \leq m(\lambda_1)$; et $d \geq 1$ car λ_1 est valeur propre.**
- Si u est diagonalisable, une base propre se répartit entre les $E_{\lambda_i}(u)$, donc $E = \sum E_{\lambda_i}(u)$. Comme la somme est directe, $n = \sum \dim E_{\lambda_i}(u)$. Réciproquement, si $\sum \dim E_{\lambda_i}(u) = n$, la somme directe $\bigoplus E_{\lambda_i}(u)$ est de dimension n , donc égale à E . En concaténant des bases des $E_{\lambda_i}(u)$, on obtient une base de vecteurs propres. **Donc u est diagonalisable si et seulement si $\sum \dim E_{\lambda_i}(u) = n$.**
- D'après la question 2, $\sum_i \dim E_{\lambda_i}(u) \leq \sum_i m(\lambda_i) \leq n$. La seconde inégalité est une égalité si et seulement si χ_u est scindé. La première est une égalité si et seulement si $\dim E_{\lambda_i}(u) = m(\lambda_i)$ pour tout i , puisque chaque terme vérifie déjà $\dim E_{\lambda_i}(u) \leq m(\lambda_i)$. **Avec la question 3, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $\dim E_{\lambda_i}(u) = m(\lambda_i)$ pour tout i .**

Corrigé de l'exercice 22 : Endomorphismes qui commutent

1. Soit $x \in E_{\lambda_i}(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$. Donc $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$: chaque sous-espace propre de u est stable par v .
2. Comme u a n valeurs propres distinctes, chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est la droite $\text{Vect}(e_i)$. Cette droite est stable par v , donc $v(e_i) = \mu_i e_i$ pour un scalaire μ_i . Ainsi la matrice de v dans $(e_1, \dots, e_n)$ est diagonale. Réciproquement, si u et v sont diagonales dans la même base, leurs matrices commutent, donc $u \circ v = v \circ u$. **Les éléments de $\mathcal{C}(u)$ sont exactement les endomorphismes diagonaux dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.**
3. Les λ_i étant distincts, l'interpolation de Lagrange fournit un unique polynôme Q de degré au plus $n-1$ tel que $Q(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i . Pour chaque i , on a $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$, donc $Q(u)(e_i) = Q(\lambda_i)e_i = \mu_i e_i = v(e_i)$. Deux applications linéaires égales sur une base sont égales. **Donc $v = Q(u)$.**
4. L'application $\Phi : \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$, $Q \rightarrow Q(u)$, est linéaire. Son image est contenue dans $\mathcal{C}(u)$, car tout polynôme en u commute avec u , et elle contient $\mathcal{C}(u)$ d'après la question 3. Ainsi $\mathcal{C}(u) = \text{Im } \Phi$ est un sous-espace vectoriel. De plus, si $Q(u) = 0$, alors $Q(\lambda_i) = 0$ pour les n valeurs λ_i distinctes. Un polynôme de degré au plus $n-1$ ayant n racines est nul, donc Φ est injective. **Par conséquent, $\dim \mathcal{C}(u) = n$, et $(\text{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$, image de la base canonique, en est une base.**

Corrigé de l'exercice 23 : Racines carrées d'une matrice

1. On a $\chi_A = X^2 - 10X + 9 = (X-1)(X-9)$. Ensuite, $A(1,1) = (9,9)$ et $A(1,-1) = (1,-1)$. **Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \text{diag}(9, 1)$ et $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.**
2. Si $B^2 = A$, alors $AB = B^2B = B^3 = BB^2 = BA$. **Donc A et B commutent.**
3. Soit $X \in E_9(A)$. Alors $A(BX) = B(AX) = 9BX$, donc $BX \in E_9(A)$. De même pour $E_1(A)$. Ces deux sous-espaces sont des droites, donc $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont des vecteurs propres de B . **Par conséquent, $P^{-1}BP = \text{diag}(\beta_1, \beta_2)$ est diagonale.**

4. En élevant au carré, $\text{diag}(\beta_1^2, \beta_2^2) = P^{-1}AP = \text{diag}(9, 1)$. Donc $\beta_1 = \pm 3$ et $\beta_2 = \pm 1$. Réciproquement, ces quatre choix donnent bien $B^2 = A$. Le calcul général donne :

$$P \text{diag}(\beta_1, \beta_2) P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1 - \beta_2 & \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont exactement $\pm \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **et** $\pm \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérification : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Point de méthode : le fait que les valeurs propres de A soient simples est essentiel. Par exemple, I_2 admet une infinité de racines carrées, dont toutes les symétries.

Corrigé de l'exercice 24 : Problème : matrices compagnons et récurrences d'ordre 3

Partie A.

1. On développe $\chi_C(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -c_{11} & X - c_2 \end{vmatrix}$ selon la première colonne :

$$\chi_C(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 \\ -c_1 & X - c_2 \end{vmatrix} - c_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ X & -1 \end{vmatrix} = X(X^2 - c_2X - c_1) - c_0.$$

Donc $\chi_C(X) = X^3 - c_2X^2 - c_1X - c_0$.

2. Soit $v = (x, y, z)$ tel que $Cv = \lambda v$. Les deux premières lignes donnent $y = \lambda x$ et $z = \lambda y = \lambda^2 x$. Donc $v = x(1, \lambda, \lambda^2)$, et $\dim E_\lambda(C) \leq 1$. Comme λ est valeur propre, cette dimension vaut 1. On vérifie la troisième ligne : $c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 = \lambda^3$, puisque $\chi_C(\lambda) = 0$. **Donc** $E_\lambda(C) = \text{Vect}((1, \lambda, \lambda^2))$.

3. Si χ_C a trois racines réelles distinctes, C est diagonalisable d'après le corollaire du cours. Réciproquement, si C est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3. Or chacune vaut 1 d'après la question 2. Il y a donc trois valeurs propres réelles distinctes. **Ainsi** C **est diagonalisable dans** $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **si et seulement si** χ_C **a trois**

racines réelles distinctes.

Partie B.

1. La relation $u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}$ donne la troisième ligne de C . **Donc**
 $X_{n+1} = CX_n$ avec $c_0 = -2$, $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$.
2. On a $\chi_C = X^3 - 2X^2 - X + 2 = X^2(X - 2) - (X - 2) = (X - 2)(X - 1)(X + 1)$.
Les trois racines sont réelles et distinctes. D'après la partie A, $C = PDP^{-1}$ avec
 $D = \text{diag}(1, -1, 2)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
3. On décompose $X_0 = (3, 2, 6)$ sur les colonnes de P : $a + b + c = 3$,
 $a - b + 2c = 2$, $a + b + 4c = 6$. La différence des équations 3 et 1 donne $3c = 3$,
donc $c = 1$. Il reste $a + b = 2$ et $a - b = 0$, donc $a = b = 1$. Ainsi
 $X_n = V_1 + (-1)^n V_2 + 2^n V_3$, et la première coordonnée donne le résultat. **Donc**
 $u_n = 1 + (-1)^n + 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérification :
 $u_3 = 2 \times 6 + 2 - 2 \times 3 = 8$, et $1 - 1 + 8 = 8$.
4. Ici $c_0 = 1$, $c_1 = -3$, $c_2 = 3$. Donc $\chi_C = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X - 1)^3$. La
seule valeur propre est 1, de multiplicité 3, mais $\dim E_1 = 1$ d'après la partie A. **Cette matrice**
compagnon n'est donc pas diagonalisable.

Point de méthode : pour une récurrence linéaire d'ordre p dont le polynôme caractéristique a p
racines simples r_j , on peut écrire directement $u_n = \sum_j a_j r_j^n$ et identifier les a_j grâce aux
conditions initiales.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L2

- Le cours : [diagonalisation, cours de maths en L2](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L2 sur diagonalisation](#)
- Chapitre précédent : [Intégrales généralisées](#)
- Chapitre suivant : [Polynômes d'endomorphismes et trigonalisation](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L2 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L2](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)