

Développements limités

Exercice 1 : DL usuels et combinaisons linéaires

Donner le développement limité en 0 de chacune des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué.

1. $\operatorname{sh} x - \sin x$ à l'ordre 5.
2. $\operatorname{ch} x + \cos x$ à l'ordre 5.
3. $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ à l'ordre 3.
4. $\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 2.

Exercice 2 : Formule de Taylor-Young et tangente

1. Exprimer $\tan'$, $\tan''$ et $\tan'''$ en fonction de $\tan$.
2. En déduire, par la formule de Taylor-Young, le DL de $\tan$ à l'ordre 3 en 0. Justifier que c'est en fait un DL à l'ordre 4.
3. Retrouver ce résultat en calculant le quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ à l'ordre 3.

Exercice 3 : DL en un point quelconque

1. Donner le DL à l'ordre 2 de $\tan$ en $\frac{\pi}{4}$. On pourra écrire $x = \frac{\pi}{4} + h$ et utiliser la formule d'addition de la tangente.
2. Donner le DL à l'ordre 3 de $x \rightarrow x^x = e^{x \ln x}$ en 1.
3. Donner le DL à l'ordre 3 de $\ln x$ en 2.

Exercice 4 : DL et dérivabilité

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par $f(0) = g(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f admet un DL à l'ordre 1 en 0. En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
2. Montrer que f n'admet pas de DL à l'ordre 2 en 0.
3. Montrer que g admet un DL à l'ordre 2 en 0.
4. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que g' n'est pas dérivable en 0. Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 5 : Parité et unicité du développement limité

On pose $\varphi(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

1. Montrer que φ est continue en 0.
2. Montrer que $\psi : x \rightarrow \varphi(x) + \frac{x}{2}$ est paire.

- On admet que φ admet un DL à l'ordre 4 en 0. Justifier qu'il s'écrit $\varphi(x) = 1 - \frac{x}{2} + a x^2 + b x^4 + o(x^4)$.
- Déterminer a et b en utilisant l'égalité $\varphi(x) \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Exercice 6 : Primitivation de développements limités

- Donner le DL de Arctan à l'ordre 7 en 0 à partir de celui de $\frac{1}{1+t^2}$.
- Donner le DL de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 4 en 0, puis celui de Arcsin à l'ordre 5.
- Soit $F(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sur $] -1, 1[$. Calculer F' puis donner le DL de F à l'ordre 5 en 0.
- Soit $G(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$. Donner le DL de G à l'ordre 5 en 0.

Exercice 7 : Produits et ordre juste nécessaire

- Donner le DL à l'ordre 4 de $e^x \sin x$ en 0. À quel ordre suffit-il de développer e^x ?
- Donner le DL à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x} \ln(1+x)$ en 0, en précisant l'ordre utile de chaque facteur.
- Donner le DL à l'ordre 6 de $\sin^2 x (1 - \cos x)$ en 0.

Exercice 8 : Quotients : sécante et tangente

- Donner le DL à l'ordre 5 de $\frac{1}{\cos x}$ en 0.
- En déduire le DL à l'ordre 5 de $\tan x$ en 0.

3. Donner le DL à l'ordre 4 de $\frac{x}{\sin x}$ en 0, la fonction étant prolongée par 1 en 0.

Exercice 9 : Compositions

1. Donner le DL à l'ordre 4 de $e^{\sin x}$ en 0.
2. Donner le DL à l'ordre 4 de $\ln(\cos x)$ en 0.
3. Vérifier la cohérence du résultat précédent avec le DL de $\tan$ à l'ordre 3, en utilisant la primitivation.
4. Donner le DL à l'ordre 3 de $e^{\cos x}$ en 0.

Exercice 10 : Prévoir l'ordre nécessaire

1. Soit $f(x) = (1+x)^{1/x}$ pour $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. À quel ordre faut-il développer $\ln(1+x)$ pour obtenir le DL de f à l'ordre 2 en 0 ? Calculer ce DL.
2. Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$, prolongée par 1 en 0. Préciser les ordres utilisés pour le numérateur et le dénominateur.
3. Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $\frac{\sinh x - x}{x - \sin x}$, prolongée par continuité en 0.

Exercice 11 : Dérivées successives en 0 à partir d'un DL

1. Calculer $\text{Arctan}^{(7)}(0)$ et $\text{Arctan}^{(8)}(0)$.
2. Soit $g(x) = e^{x^2}$. Pour tout entier k , calculer $g^{(2k)}(0)$ et $g^{(2k+1)}(0)$.
3. Soit $h(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, puis calculer

$h^{(5)}(0)$ à l'aide de son DL à l'ordre 5.

Exercice 12 : Calcul de limites

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} e^{-x}.$

5. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$

Exercice 13 : Équivalents en 0 et en l'infini

Donner un équivalent simple de chacune des expressions suivantes.

1. $e^x - 1 - \ln(1+x) - x^2$ en 0.

2. $\tan x - \operatorname{Arctan} x$ en 0.

3. $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} - 1$ en $+\infty$.

4. $e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14 : Tangente et position relative

On pose $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Donner le DL à l'ordre 2 de f en 0.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0, et donner $f'(0)$.
3. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. Même question pour $g(x) = \ln(1 + x + x^2)$ en 0, en poussant le DL jusqu'au premier terme utile.

Exercice 15 : Asymptotes obliques et position

1. Soit $f(x) = (x+1)e^{1/x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, et préciser la position de la courbe dans chaque cas.
2. Même question pour $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : Nature d'un point critique

1. Soit $h(x) = x^2 e^x$. Déterminer les points critiques de h et leur nature à l'aide de h'' .
2. Soit $f(x) = 2\cos x + x^2$. Vérifier que 0 est un point critique où $f''(0) = 0$. Déterminer sa nature à l'aide d'un DL.
3. Soit $k(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Montrer que 0 est un point critique qui n'est pas un extremum local.
4. Pour quelles valeurs du réel λ la fonction $u_\lambda(x) = \cos x + \lambda x^2$ admet-elle un minimum

local en 0 ? un maximum local ?

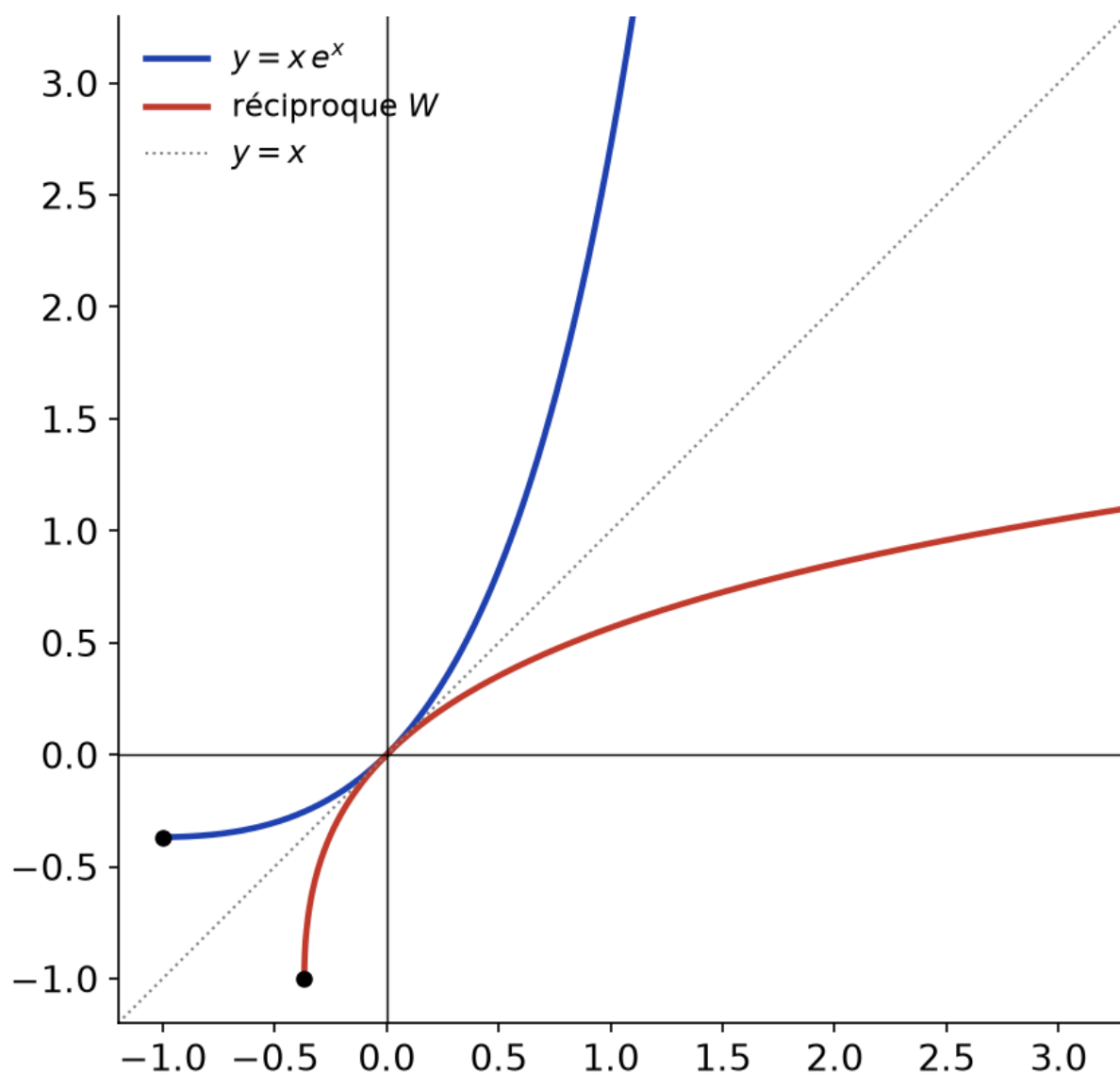
Exercice 17 : Approximation rationnelle du cosinus

On cherche deux réels a et b tels que la fraction $R(x) = \frac{1 + a x^2}{1 + b x^2}$ approche $\cos x$ le mieux possible au voisinage de 0.

1. Donner le DL de R à l'ordre 6 en 0 en fonction de a et b .
2. Déterminer a et b pour que $R(x) - \cos x = o(x^5)$.
3. Pour ces valeurs, donner un équivalent de $R(x) - \cos x$ en 0.
4. Comparer avec le polynôme de Taylor $T(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$: donner un équivalent de $T(x) - \cos x$ en 0 et conclure.

Exercice 18 : DL d'une bijection réciproque

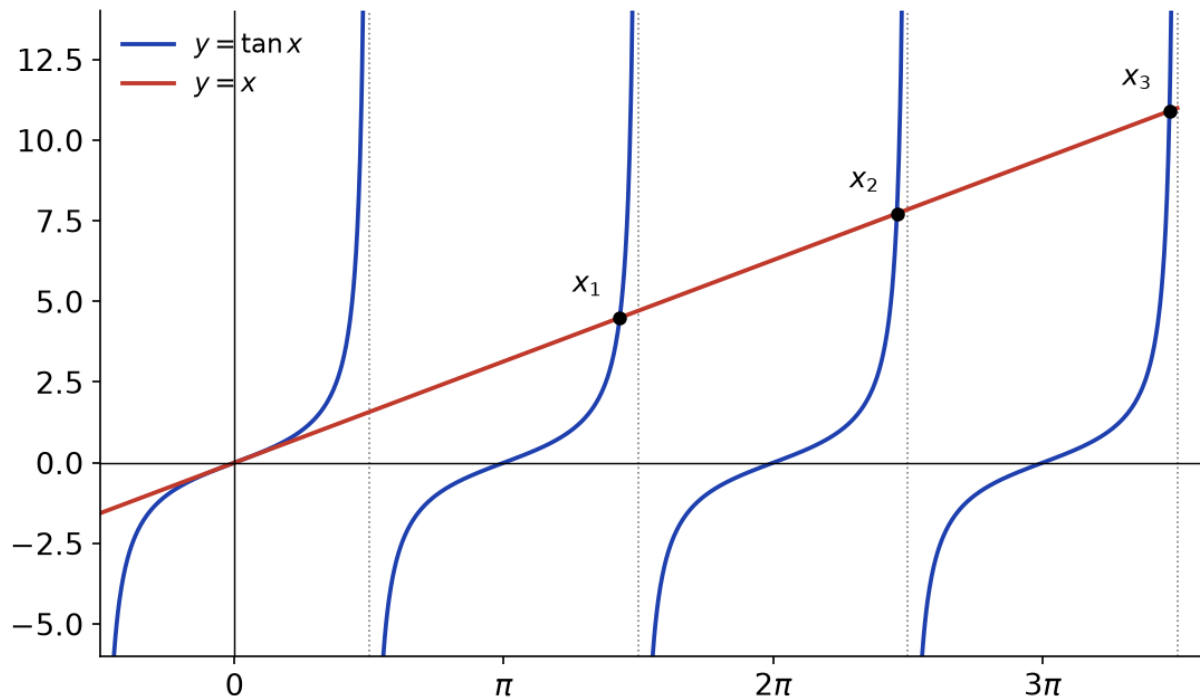
Soit $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x e^x$. La figure ci-dessous représente f et sa réciproque.



1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. On note W sa réciproque.
2. Justifier que W est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0. On admettra que la réciproque d'une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée ne s'annule pas est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. En déduire que W admet un DL à l'ordre 3 en 0, puis le calculer à l'aide de la relation $W(y) e^{W(y)} = y$.
4. En déduire $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{W(y) - y}{y^2}$.

Exercice 19 : Développement asymptotique d'une suite implicite

On considère l'équation $\tan x = x$. La figure ci-dessous montre les courbes de $\tan$ et de la droite $y = x$.



1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation admet une unique solution x_n dans $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, et que $x_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. En déduire que $x_n \sim n\pi$.
3. On pose $\varepsilon_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n$. Montrer que $\tan \varepsilon_n = \frac{1}{x_n}$, puis que $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n\pi}$.
4. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 20 : Problème : étude complète d'une courbe

On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité à droite et à gauche de f en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Décrire l'allure de la courbe en 0.
3. Soit $\psi(u) = 1 + (1+u)e^u$ pour u réel. Montrer que ψ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et l'exprimer à l'aide de $\psi(1/x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Donner le DL à l'ordre 3 en 0 de $t \rightarrow \frac{1}{1+e^t}$. On pourra remarquer que $\frac{1}{1+e^t} - \frac{1}{2}$ est une fonction impaire.
6. En déduire que la courbe de f admet la même asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, et préciser la position de la courbe par rapport à elle.
7. Tracer l'allure de la courbe de f .

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [développements limités, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#), [Dérivabilité et convexité](#)

- Chapitre précédent : [Relations de comparaison : domination, équivalents](#)
- Chapitre suivant : [Espaces vectoriels, familles libres et génératrices](#)
- Le même thème en L1 : [développements limités, exercices de maths en L1](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)