

Développements limités

Exercice 1 : Relations de comparaison

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

1. $x^2 = o(x^3)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
2. $x^2 = o(x^3)$ quand $x \rightarrow 0$.
3. $x \sin x = O(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. $(\ln x)^{10} = o(\sqrt{x})$ quand $x \rightarrow +\infty$.
5. Si $f \sim g$ en $+\infty$, alors $e^f \sim e^g$ en $+\infty$.
6. $n^2 + (-1)^n n \sim n^2$ quand $n \rightarrow +\infty$.
7. $n! = o(n^n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2 : Équivalents et limites

À l'aide des équivalents usuels, déterminer un équivalent simple puis la limite demandée.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)\ln(1+2x)}{x \tan x}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x \arctan x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1}{\sin x} .$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) .$

5. Un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3 : Développements limités usuels

Écrire le développement limité en 0 à l'ordre indiqué, en partant des développements usuels.

1. e^{-x} à l'ordre 4 .

2. $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 .

3. $\frac{1}{1+2x}$ à l'ordre 3 .

4. $\ln(1-x)$ à l'ordre 4 .

5. $\operatorname{ch} x$ à l'ordre 5 .

6. $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 2 .

Exercice 4 : Développement limité en un point autre que 0

On pose $h = x - a$ et on développe en $h = 0$.

1. Développement limité de $\ln x$ en $a = 1$ à l'ordre 3 .

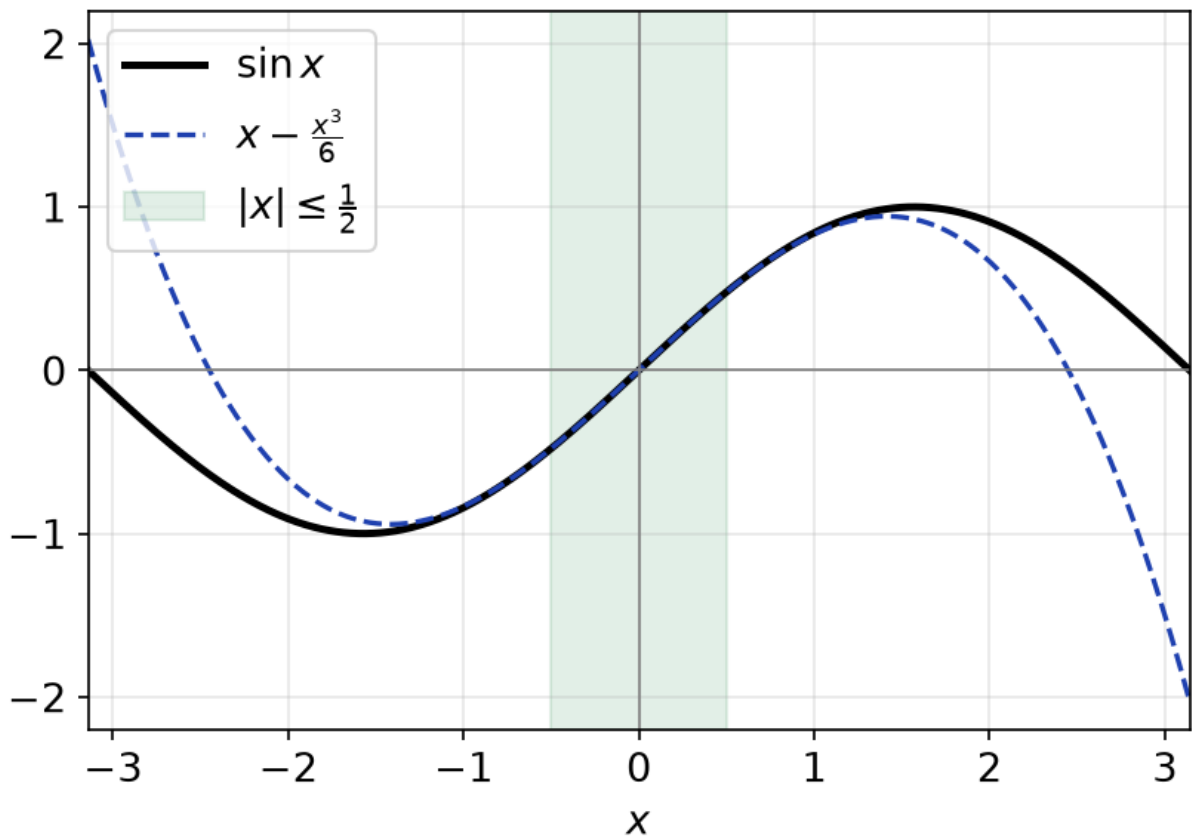
2. Développement limité de $\sqrt{x}$ en $a = 4$ à l'ordre 2 .

3. Développement limité de e^x en $a = 1$ à l'ordre 3 .

- Développement limité de $\sin x$ en $a = \frac{\pi}{6}$ à l'ordre 2.
- En déduire l'équation de la tangente à la courbe de $\sqrt{x}$ au point d'abscisse 4, et la position locale de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 5 : Inégalité de Taylor-Lagrange et sinus

La figure ci-dessous représente la fonction sinus et le polynôme $x - \frac{x^3}{6}$. La bande colorée correspond à $|x| \leq \frac{1}{2}$.



- Montrer que, pour tout réel x , $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$.
- En déduire une valeur approchée de $\sin(0,1)$ et majorer l'erreur commise.

3. Majorer l'erreur commise en remplaçant $\sin x$ par $x - \frac{x^3}{6}$ lorsque $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 6 : Limites par développements limités

Calculer les limites suivantes en 0.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Exercice 7 : Taylor avec reste intégral et logarithme

On considère $f : x \rightarrow \ln(1+x)$ sur $[0, +\infty[$.

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral de f en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
3. En déduire un encadrement de $\ln(1,1)$ d'amplitude inférieure à 4×10^{-4} .
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 8 : Unicité, parité et contre-exemple

1. Soit f une fonction impaire définie sur $\mathbb{R}$, admettant un développement limité à l'ordre n en 0 . Démontrer, à l'aide de l'unicité, que la partie régulière ne contient que des puissances impaires. Que vaut $f(0)$?
2. On définit g par $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.
 1. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 , et le préciser.
 2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g' .
 3. Montrer que g' n'est pas dérivable en 0 . Quelle conclusion en tirer ?

Exercice 9 : Produit de développements limités

Calculer les développements limités suivants en 0 , en choisissant au plus juste l'ordre de chaque facteur.

1. $e^x \cos x$ à l'ordre 4 .
2. $\sqrt{1+x} \ln(1+x)$ à l'ordre 3 .
3. $\sin x \operatorname{sh} x$ à l'ordre 6 .

Exercice 10 : Composition de développements limités

1. Développement limité de $\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4 .
2. Développement limité de $e^{\sin x}$ en 0 à l'ordre 3 .

3. Développement limité de $\ln(1 + e^x)$ en 0 à l'ordre 3 . On prendra garde au fait que e^x ne tend pas vers 0 .

Exercice 11 : Développements limités d'un quotient

1. Montrer que $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)$ quand $x \rightarrow 0$.
2. Calculer le développement limité de $\frac{1}{1 + \sin x}$ en 0 à l'ordre 4 .
3. En déduire la limite en 0 de $\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \sin x} - 1 + x \right)$.

Exercice 12 : Intégration d'un développement limité

1. Écrire le développement limité de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en 0 à l'ordre 4 . En déduire celui de $\arcsin x$ à l'ordre 5 .
2. Soit $s(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ pour $x \in \mathbb{R}$. Justifier que s est bien définie, puis calculer $s'(x)$.
3. En déduire le développement limité de s en 0 à l'ordre 5 .
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - s(x)}{x^3}$.

Exercice 13 : Fonction définie par une intégrale

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

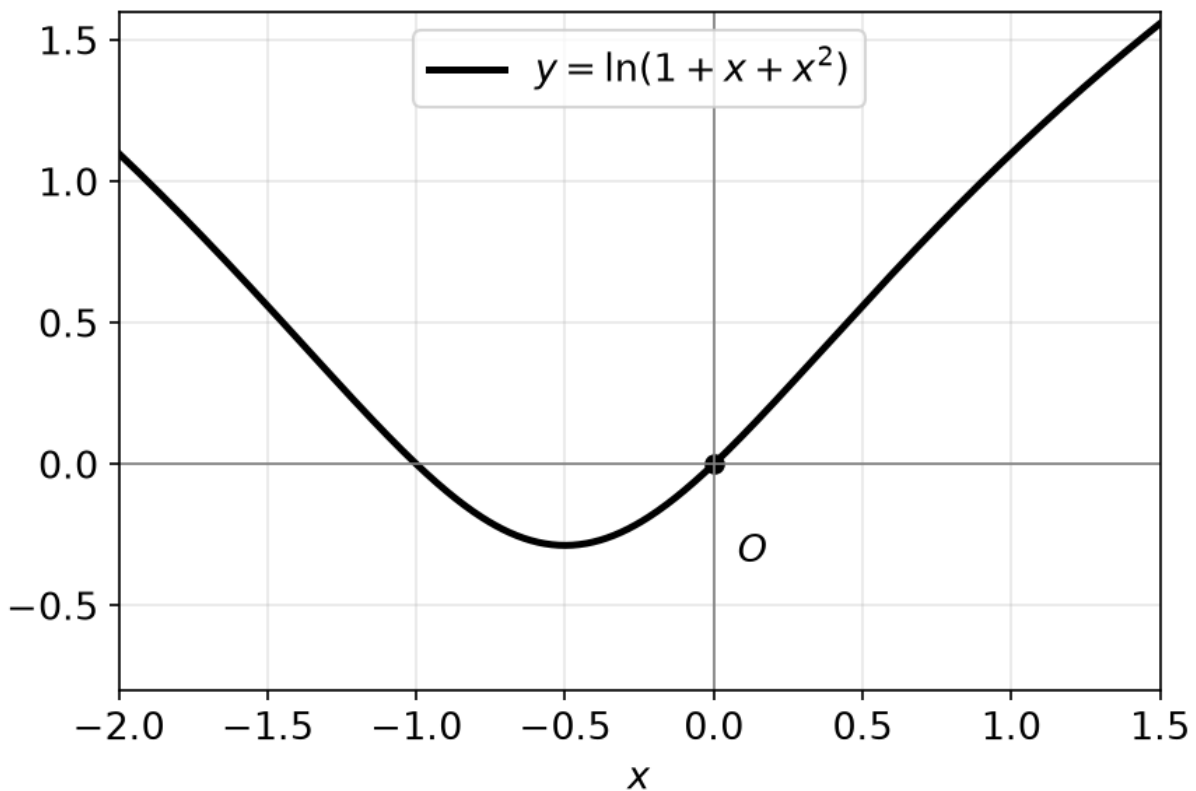
1. On note $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F(x) = G(2x) - G(x)$.
2. Déterminer le développement limité de G en 0 à l'ordre 5 .
3. En déduire le développement limité de F en 0 à l'ordre 5 .
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe de F en 0 et préciser la position de la courbe.

Exercice 14 : Limites plus délicates

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)})$.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e + \frac{e}{2n} \right)$.

Exercice 15 : Tangente et position de la courbe

Soit $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$. Sa courbe est tracée ci-dessous.



1. Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3 .
3. En déduire l'équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à elle au voisinage de 0 .
4. En écrivant $1 + x + x^2 = \frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$, étudier la courbe au voisinage du point d'abscisse $-\frac{1}{2}$. Quelle est la nature de ce point ?

Exercice 16 : Extremum local et point d'inflexion

1. Soit $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$. Montrer que f admet en 0 un minimum local strict.
2. Soit $g(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Vérifier que $g'(0) = 0$. La fonction g admet-elle un extremum local en 0 ?

3. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_a(x) = \ln(1+x) - x + a x^2$ sur $] -1, +\infty[$. Discuter, selon a , la nature du point de la courbe d'abscisse 0 : extremum local ou point d'inflexion.

Exercice 17 : Asymptotes d'une racine carrée

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Établir un développement asymptotique de f en $+\infty$ de la forme $\alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. En déduire une asymptote en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à elle.
4. Reprendre l'étude en $-\infty$.

Exercice 18 : Asymptote oblique et logarithme

Soit $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en -1^- .
3. Établir un développement asymptotique de f en $\pm\infty$ jusqu'au terme en $\frac{1}{x}$.
4. En déduire l'asymptote de la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$, et la position de la courbe par rapport à elle.

Exercice 19 : Le nombre e est irrationnel

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

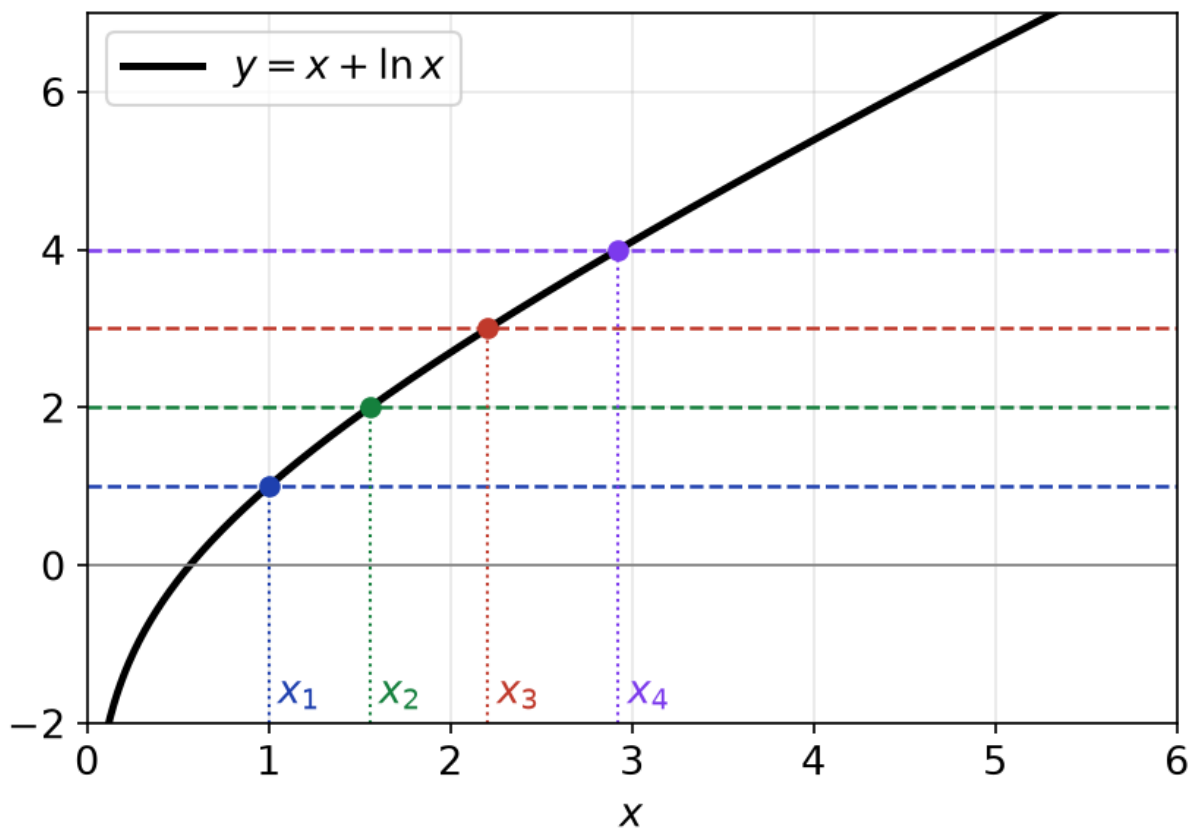
1. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $\exp$ entre 0 et 1, montrer

$$\text{que } e - S_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

2. En déduire que $0 < e - S_n < \frac{e}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En appliquant cet encadrement pour $n = 2$, montrer que $e < 3$. Que vaut la limite de S_n ?
4. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls. Soit $n \geq \max(q, 2)$.
Montrer que $N = n!(e - S_n)$ est un entier vérifiant $0 < N < 1$. Conclure.

Exercice 20 : Développement asymptotique d'une suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x + \ln x = n$, d'inconnue $x > 0$. La figure ci-dessous montre la courbe de $x \rightarrow x + \ln x$ et les droites $y = n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.



1. Montrer que l'équation admet une unique solution, notée x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n$.
4. Montrer que $x_n = n - \ln n + o(1)$.
5. Montrer que $x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 21 : Problème, étude complète de $(1+x)^{1/x}$

On définit $f(x) = (1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ sur $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

Partie A : comportement aux bornes.

1. Déterminer les limites de f en -1^+ et en $+\infty$.
2. Montrer que $f(x) - 1 \sim \frac{\ln x}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$. En déduire la position de la courbe par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Partie B : étude en 0.

1. Déterminer le développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que $f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$.
3. Montrer que f se prolonge par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable en 0, et donner la tangente en 0 avec la position de la courbe.

Partie C : variations.

1. Montrer que, pour $x \in D$, $f'(x) = f(x) \frac{\varphi(x)}{x^2(1+x)}$ avec $\varphi(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.
2. Étudier les variations de φ sur $] -1, +\infty[$ et en déduire son signe.
3. En déduire les variations de f sur D .
4. À l'aide d'un développement limité de φ , montrer que $f'(x) \rightarrow -\frac{e}{2}$ quand $x \rightarrow 0$. Que peut-on en conclure pour le prolongement de f ?

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [développements limités, cours de maths en L1](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur développements limités](#)
- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#), [Intégrale de Riemann et calcul de primitives](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)