Développements limités

Corrigé de l'exercice 1 : DL usuels et combinaisons linéaires

1. On a $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Par différence, les termes en x et en x^5 disparaissent. **Ainsi** $\operatorname{sh} x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^5)$.

2. De même, $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Les termes en x^2 se compensent. **Donc** $\operatorname{ch} x + \cos x = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^5)$.

3. D'une part, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. D'autre part, $\frac{x}{1+x} = x(1 - x + x^2 + o(x^2)) = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$. Par conséquent, $\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

4. On applique $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha\, u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)$. Avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $u = x$, on obtient $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. Avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -x$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$. **La différence vaut** $-\frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Point de méthode : pour $(1+u)^\alpha$, calculez toujours $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ à part : c'est là que se glissent les erreurs de signe.

Corrigé de l'exercice 2 : Formule de Taylor-Young et tangente

1. La fonction $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan' = 1 + \tan^2$. En dérivant, $\tan'' = 2\tan \cdot \tan' = 2\tan + 2\tan^3$. Enfin, $\tan''' = (2 + 6\tan^2)(1 + \tan^2)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. En 0, on obtient $\tan(0) = 0$, $\tan'(0) = 1$, $\tan''(0) = 0$ et $\tan'''(0) = 2$. La formule de Taylor-Young s'applique, car $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^3$:

$$\tan x = x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

De plus, $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^4$, donc elle admet un DL à l'ordre 4. Comme elle est impaire, le coefficient de x^4 est nul. **Ainsi** $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

3. On a $\cos x = 1 - u$ avec $u = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Donc $\frac{1}{\cos x} = 1 + u + o(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Ensuite :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3).$$

On retrouve bien $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Corrigé de l'exercice 3 : DL en un point quelconque

1. Posons $x = \frac{\pi}{4} + h$. La formule d'addition donne $\tan x = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h}$, car $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Or $\tan h = h + o(h^2)$. Ainsi $\frac{1}{1 - \tan h} = 1 + \tan h + \tan^2 h + o(h^2) = 1 + h + h^2 + o(h^2)$. Par conséquent :

$$\tan x = (1 + h)(1 + h + h^2) + o(h^2) = 1 + 2h + 2h^2 + o(h^2).$$

Donc $\tan x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$. On vérifie d'ailleurs que $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $\tan''\left(\frac{\pi}{4}\right)/2 = 2$.

2. Posons $x = 1 + h$. D'abord, $v = x\ln x = (1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}\right) + o(h^3) = h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)$. Ensuite, $v^2 = h^2 + h^3 + o(h^3)$ et $v^3 = h^3 + o(h^3)$. Comme $v \to 0$, on compose avec l'exponentielle :

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(h^3) = 1 + h + h^2 + \frac{h^3}{2} + o(h^3).$$

Ainsi $x^x = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2} + o\left((x-1)^3\right)$.

3. Posons $x = 2 + h$. Alors $\ln x = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)$. En composant avec $u = \frac{h}{2}$, on obtient $\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\left((x-2)^3\right)$.

Point de méthode : pour un DL en $a \neq 0$, posez toujours $x = a + h$ et travaillez avec $h \to 0$. Vous retrouvez alors les DL usuels en 0, sans calcul de dérivées successives.

Corrigé de l'exercice 4 : DL et dérivabilité

1. Pour $x \neq 0$, on a $|f(x)| \leq x^2$. Ainsi $[\big|?]\frac{f(x)}{x}[\big|?] \leq |x| \to 0$, donc $f(x) = o(x)$. Autrement dit, $f(x) = 0 + 0 \cdot x + o(x)$: c'est un DL à l'ordre 1. D'après la caractérisation par le DL d'ordre 1, f **est dérivable en 0 et** $f'(0) = 0$**.**

2. Supposons que $f(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + o(x^2)$. Par troncature et unicité, $a_0 = a_1 = 0$. Alors $\frac{f(x)}{x^2} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tendrait vers a_2. Or, pour $x_n = \frac{1}{n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, on a $\sin(1/x_n) = 0$ et $\sin(1/y_n) = 1$. La caractérisation séquentielle interdit donc toute limite. **Ainsi** f **n'admet pas de DL à l'ordre 2 en 0.**

3. Pour $x \neq 0$, $[\big|?]\frac{g(x)}{x^2}[\big|?] = |x \sin(1/x)| \leq |x|$. Donc $g(x) = o(x^2)$. **C'est un DL à l'ordre 2 :** $g(x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$**.**

4. Sur $\mathbb{R}^*$, g est dérivable comme produit et composée, avec $g'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x)$. En 0, g admet un DL d'ordre 1 (tronquer le précédent), donc $g'(0) = 0$. Ensuite, pour $x \neq 0$:

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = 3x\, \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le premier terme tend vers 0. Le second n'a pas de limite, par le même argument séquentiel qu'à la question 2 avec $\cos$. **Donc** g' **n'est pas dérivable en 0.** En conclusion, un DL à l'ordre 2 n'entraîne pas la double dérivabilité.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Corrigé de l'exercice 5 : Parité et unicité du développement limité

1. On sait que $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ en 0 (taux d'accroissement de l'exponentielle). Par passage à l'inverse, $\varphi(x) \to 1 = \varphi(0)$. **Donc φ est continue en 0.**

2. Pour $x \neq 0$, on multiplie numérateur et dénominateur par e^x :

$$\psi(-x) = \frac{-x}{e^{-x}-1} - \frac{x}{2} = \frac{x\,e^x}{e^x-1} - \frac{x}{2}.$$

   Ainsi $\psi(x) - \psi(-x) = \frac{x - x\,e^x}{e^x-1} + x = -x + x = 0$. De plus, l'égalité est claire en 0. **Donc ψ est paire.**

3. La fonction $\psi = \varphi + \frac{x}{2}$ admet un DL à l'ordre 4. Comme elle est paire, ce DL ne contient que des puissances paires : $\psi(x) = c_0 + a\,x^2 + b\,x^4 + o(x^4)$. En outre, $c_0 = \psi(0) = 1$. **Par conséquent,** $\varphi(x) = 1 - \frac{x}{2} + a\,x^2 + b\,x^4 + o(x^4)$**.**

4. On a $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Le produit avec φ vaut 1. On développe et on identifie par unicité :

   - coefficient de x^2 : $\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + a = 0$, donc $a = \frac{1}{12}$;
   - coefficient de x^3 : $\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{a}{2} = 0$, ce qui est cohérent ;
   - coefficient de x^4 : $\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{a}{6} + b = 0$.

   Au dénominateur commun 720, la dernière relation donne $\frac{6 - 15 + 10}{720} + b = 0$. **Ainsi $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{1}{720}$, et $\varphi(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$.**

Point de méthode : la parité divise ici le travail par deux, car elle annule d'avance les coefficients de x^3 dans ψ.

Corrigé de l'exercice 6 : Primitivation de développements limités

1. On a $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + o(t^6)$. La fonction Arctan est dérivable, de dérivée $\frac{1}{1+t^2}$, et vaut 0 en 0. Le théorème de primitivation donne
$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$.

2. Avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a $(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2)$. En posant $u = -x^2$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$. Or Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$. **Par primitivation,**
$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.

3. Pour $|x| < 1$, $F(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, donc $F'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$. Ainsi $F'(x) = 2 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$. Comme $F(0) = 0$,
$F(x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + o(x^5)$.

4. Soit $E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Alors $E'(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$, et $E(0) = 0$. Donc $E(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$. Ensuite, $G(x) = E(2x) - E(x)$, et $o\big((2x)^5\big) = o(x^5)$. On calcule :
$$G(x) = (2x - x) - \frac{8x^3 - x^3}{3} + \frac{32x^5 - x^5}{10} + o(x^5).$$
Ainsi $G(x) = x - \frac{7x^3}{3} + \frac{31x^5}{10} + o(x^5)$.

Corrigé de l'exercice 7 : Produits et ordre juste nécessaire

1. Le facteur $\sin x$ commence par x. Il suffit donc de connaître e^x à l'ordre 3, puisque $x \cdot o(x^3) = o(x^4)$. On écrit $\sin x = x\big(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\big)$, puis :
$$e^x \sin x = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4).$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Donc $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$, et e^x à l'ordre 3 suffit.

2. Le facteur $\ln(1+x)$ commence par x. Il faut donc $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 et $\frac{\ln(1+x)}{x}$ à l'ordre 2, c'est-à-dire $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. On obtient :

$$x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) = x\left(1 + 0 \cdot x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^2\right) + o(x^3).$$

Or $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{8-6-3}{24} = -\frac{1}{24}$. **Ainsi** $\sqrt{1+x}\,\ln(1+x) = x - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.

3. Chaque facteur commence par x^2. On écrit donc $\sin^2 x = x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$ et $1 - \cos x = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right)$. Le produit donne $x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$. **Ainsi** $\sin^2 x\,(1 - \cos x) = \frac{x^4}{2} - \frac{5x^6}{24} + o(x^6)$.

Point de méthode : quand les deux facteurs commencent par une puissance de x, factorisez-les d'abord. Le gain est net : ici, chaque facteur ne sert qu'à l'ordre 4 au lieu de l'ordre 6.

Corrigé de l'exercice 8 : Quotients : sécante et tangente

1. On pose $u = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Alors $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$ et $u^3 = O(x^6) = o(x^5)$. Donc :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(x^5) = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^5).$$

Ainsi $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)$.

2. On multiplie par $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Le coefficient de x^3 vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Celui de x^5 vaut $\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{25 - 10 + 1}{120} = \frac{2}{15}$. **Donc** $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

3. On écrit $\frac{\sin x}{x} = 1 - v$ avec $v = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)$. Ensuite, $v^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4)$. Donc :

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + v + v^2 + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{6} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120}\right)x^4 + o(x^4).$$

Or $\frac{1}{36}-\frac{1}{120}=\frac{10-3}{360}$. **Ainsi** $\frac{x}{\sin x}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+o(x^4)$.

Corrigé de l'exercice 9 : Compositions

1. Posons $u=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, qui tend vers 0. On a $u^2=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$, $u^3=x^3+o(x^4)$ et $u^4=x^4+o(x^4)$. En reportant dans le DL de l'exponentielle à l'ordre 4 :

$$e^u=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4).$$

Donc $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$.

2. On pose $u=\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$. Comme $u=O(x^2)$, il suffit de $\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)$. Or $u^2=\frac{x^4}{4}+o(x^4)$. **Ainsi** $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$.

3. Sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la fonction $x\to\ln(\cos x)$ est dérivable, de dérivée $-\tan x=-x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. Elle vaut 0 en 0. Par primitivation, $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)$. **On retrouve exactement le résultat de la question 2.**

4. Ici $\cos x\to 1\neq 0$: on ne compose pas directement. On écrit $e^{\cos x}=e\cdot e^w$ avec $w=\cos x-1=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$. Comme $w^2=O(x^4)=o(x^3)$, on a $e^w=1+w+o(x^3)$. **Donc** $e^{\cos x}=e-\frac{e}{2}x^2+o(x^3)$.

Point de méthode : avant de composer, vérifiez toujours que la fonction intérieure tend vers 0. Sinon, recentrez comme à la question 4, en factorisant la valeur limite.

Corrigé de l'exercice 10 : Prévoir l'ordre nécessaire

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. On écrit $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$. Le quotient par x fait perdre un ordre. Pour avoir l'exposant à l'ordre 2, il faut donc $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. On obtient $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. Ensuite, $f(x) = e \cdot e^w$ avec $w = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. Comme $w^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$, on a $e^w = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$. **Ainsi** $(1+x)^{1/x} = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$.

2. Le numérateur et le dénominateur commencent par x. On simplifie par x, ce qui fait perdre un ordre à chacun. Il faut donc $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 et $\sin x$ à l'ordre 3. On obtient :

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + o(x^2).$$

   Donc $\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

3. Ici, les deux termes commencent par $\frac{x^3}{6}$. Pour un quotient à l'ordre 2, il faut donc aller jusqu'à l'ordre 5. On a $\operatorname{sh} x - x = \frac{x^3}{6}\left(1 + \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right)$, car $\frac{1}{120} \cdot 6 = \frac{1}{20}$. De même, $x - \sin x = \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2)\right)$. Par conséquent :

$$\frac{\operatorname{sh} x - x}{x - \sin x} = \left(1 + \frac{x^2}{20}\right)\left(1 + \frac{x^2}{20}\right) + o(x^2).$$

   Le prolongement vaut 1 en 0 et son DL est $1 + \frac{x^2}{10} + o(x^2)$.

Point de méthode : dans un quotient dont le numérateur et le dénominateur s'annulent, comptez l'ordre du terme prépondérant commun. Il faut ensuite développer chaque morceau d'autant d'ordres en plus.

Corrigé de l'exercice 11 : Dérivées successives en 0 à partir d'un DL

1. La fonction Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après Taylor-Young et l'unicité du DL, le coefficient de x^k vaut $\operatorname{Arctan}^{(k)}(0)/k!$. Le coefficient de x^7 est $-\frac{1}{7}$, donc $\operatorname{Arctan}^{(7)}(0) = -\frac{7!}{7} = -6!$. De plus, la fonction est impaire, donc le coefficient de x^8 est nul. **Ainsi** $\operatorname{Arctan}^{(7)}(0) = -720$ **et** $\operatorname{Arctan}^{(8)}(0) = 0$.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par composition, $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^{2n+1})$, car le terme suivant est en x^{2n+2}. Par identification des coefficients, $\frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \frac{1}{k!}$. **Donc** $g^{(2k)}(0) = \frac{(2k)!}{k!}$ **et** $g^{(2k+1)}(0) = 0$.

3. Le polynôme $1 - x - x^2$ vaut 1 en 0 et ne s'annule pas au voisinage de 0. Ainsi h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0, comme inverse d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas. Par Taylor-Young, $h(x) = \sum_{k=0}^{5} c_k\, x^k + o(x^5)$. Or $(1 - x - x^2)\, h(x) = 1$. Par produit et unicité, $c_0 = 1$, $c_1 - c_0 = 0$ et $c_k = c_{k-1} + c_{k-2}$ pour $2 \leq k \leq 5$. On trouve successivement $1, 1, 2, 3, 5, 8$. **Donc** $h^{(5)}(0) = 5! \times 8 = 960$.

Point de méthode : pour une dérivée d'ordre élevé en un point, un DL obtenu par opérations est bien plus rapide que la dérivation directe.

Corrigé de l'exercice 12 : Calcul de limites

1. On réduit au même dénominateur : $\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$. Le dénominateur est équivalent à x^4. Ensuite, $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$. Le numérateur vaut donc $\frac{x^4}{3} + o(x^4)$. **La limite vaut** $\frac{1}{3}$.

2. On a $\tan x - \sin x = \left(x + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. **La limite vaut** $\frac{1}{2}$.

3. Pour $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, on écrit $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)$. D'après l'exercice 9, $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. L'exposant tend donc vers $-\frac{1}{2}$. Par continuité de l'exponentielle, **la limite vaut** $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

4. On écrit la quantité sous la forme $\exp\left(x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x\right)$. Avec $h = \frac{1}{x} \to 0$, on a $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$. Donc $x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x = x - \frac{1}{2} + o(1) - x$. **La limite vaut** $e^{-1/2}$.

5. Pour $n \geq 1$, $n \sin\frac{1}{n} > 0$. Avec $h = \frac{1}{n}$, on a $\frac{\sin h}{h} = 1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)$. Donc

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$\ln\left(\frac{\sin h}{h}\right) = -\frac{h^2}{6} + o(h^2)$. Par conséquent, $n^2 \ln\left(n \sin \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6} + o(1)$. **La limite vaut** $e^{-1/6}$.

Point de méthode : devant une forme 1^∞, passez systématiquement à l'exponentielle. La limite de l'exposant se calcule ensuite par un DL du logarithme.

Corrigé de l'exercice 13 : Équivalents en 0 et en l'infini

1. On a $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. La différence vaut $x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. **Donc** $e^x - 1 - \ln(1+x) - x^2 \sim -\frac{x^3}{6}$.

2. Par les DL usuels à l'ordre 3, $\tan x - \operatorname{Arctan} x = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) x^3 + o(x^3)$. **Ainsi** $\tan x - \operatorname{Arctan} x \sim \frac{2x^3}{3}$.

3. Pour $x > 1$, on factorise par $x = |x|$ et on pose $h = \frac{1}{x}$. Avec $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$, on obtient :

$$\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} = x\left(h + \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right) = 1 + \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

   En effet, les termes en h^2 se compensent. **Donc** $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} - 1 \sim \frac{1}{8x^2}$.

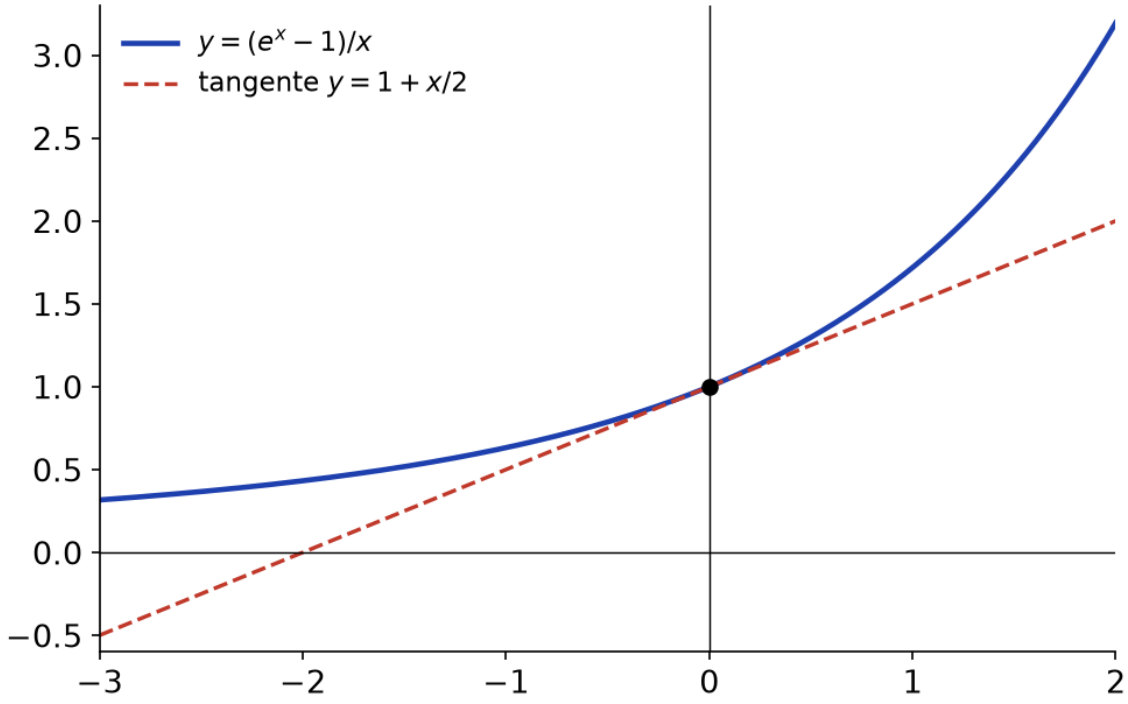
4. On a $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. **Donc** $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2n}$.

Corrigé de l'exercice 14 : Tangente et position relative

1. On a $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. En divisant par x, on perd un ordre. **Ainsi** $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, cette égalité restant vraie en 0.

2. Le DL d'ordre 0 donne $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$: f est continue en 0. Ensuite, la troncature à l'ordre 1 donne $f(x) = f(0) + \frac{x}{2} + o(x)$. **Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.**

3. La tangente en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{2}$. De plus, $f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sim \frac{x^2}{6}$, qui est positif pour $x \neq 0$. **La courbe est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0**, comme le montre la figure ci-dessous.



4. On pose $u = x + x^2 \to 0$. Alors $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, et $u^2 = x^2 + o(x^2)$. Donc $g(x) = x + x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. La tangente en 0 est $y = x$, et $g(x) - x \sim \frac{x^2}{2} > 0$. **La courbe de g est au-dessus de la droite $y = x$ près de 0.**

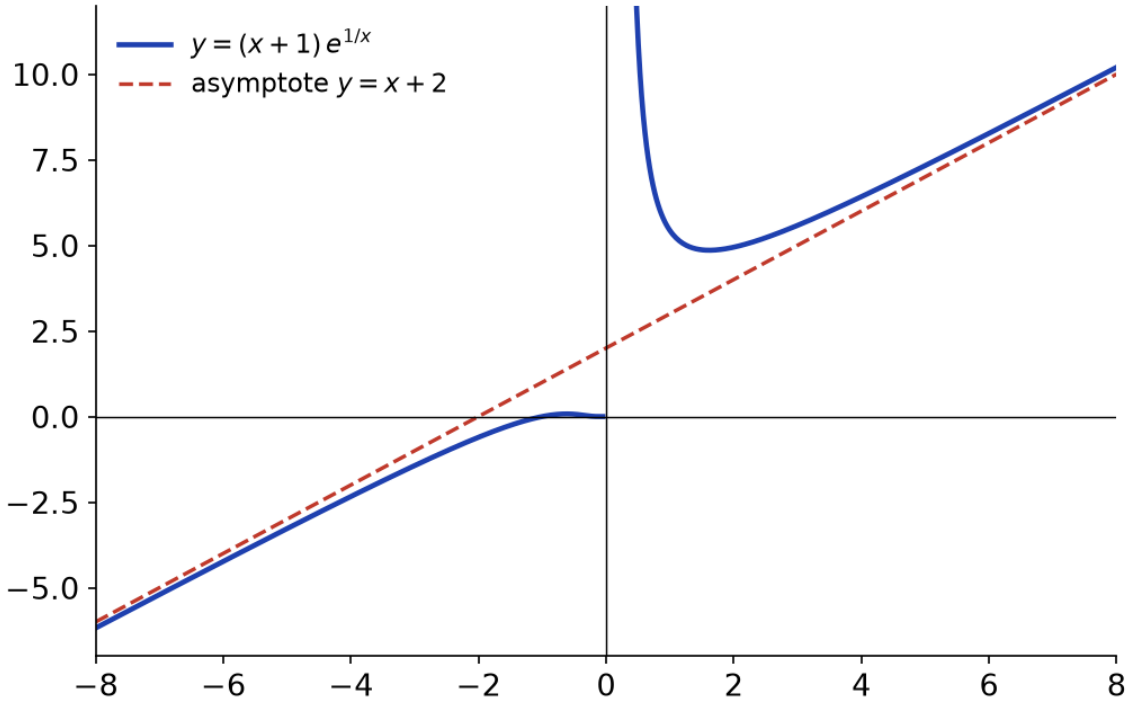
Corrigé de l'exercice 15 : Asymptotes obliques et position

1. Posons $h = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 en $\pm\infty$. On a $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$. D'une part, $x\, e^{1/x} = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. D'autre part, $e^{1/x} = 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. En sommant :

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Ainsi $f(x)-(x+2)\sim\frac{3}{2x}$. **La droite $y=x+2$ est asymptote en $\pm\infty$; la courbe est au-dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.** La figure ci-dessous confirme cette étude.



2. Pour $x\neq 0$, $x^3+3x^2=x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)$. Comme la racine cubique est multiplicative sur $\mathbb{R}$, on a $g(x)=x\left(1+\frac{3}{x}\right)^{1/3}$, quel que soit le signe de x . Avec $\alpha=\frac{1}{3}$, $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}=-\frac{1}{9}$. Donc $(1+3h)^{1/3}=1+h-\frac{1}{9}\cdot 9h^2+o(h^2)=1+h-h^2+o(h^2)$. Par conséquent :

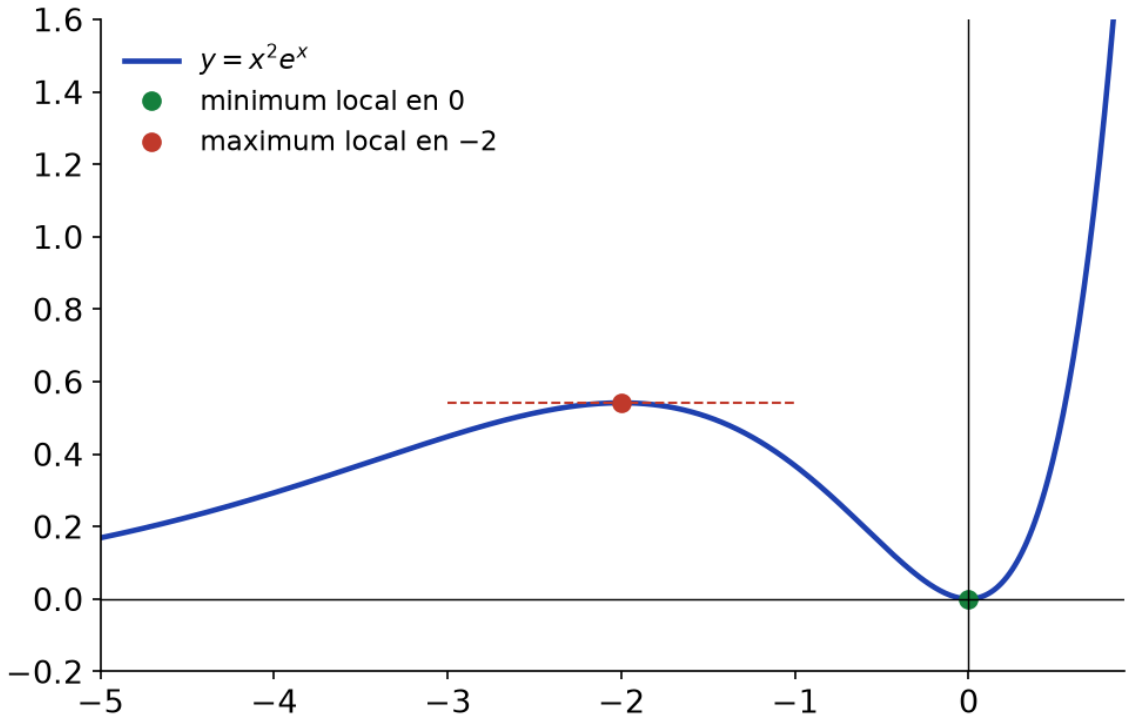
$$g(x)=x+1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y=x+1$ est asymptote en $\pm\infty$; la courbe est en dessous en $+\infty$ et au-dessus en $-\infty$.

Point de méthode : le terme en $\frac{1}{x}$ change de signe entre $+\infty$ et $-\infty$; il faut donc conclure séparément des deux côtés.

Corrigé de l'exercice 16 : Nature d'un point critique

1. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $h'(x) = (x^2+2x)\,e^x = x(x+2)\,e^x$. Les points critiques sont donc 0 et -2. Ensuite, $h''(x) = (x^2+4x+2)\,e^x$. Ainsi $h''(0) = 2 > 0$ et $h''(-2) = -2e^{-2} < 0$. D'après la condition suffisante d'ordre 2, h **admet un minimum local strict en 0 et un maximum local strict en** -2**, de valeur** $4e^{-2}$**.** La figure ci-dessous situe ces deux points.



2. On a $f'(x) = -2\sin x + 2x$ et $f''(x) = 2 - 2\cos x$. Donc $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$: le critère d'ordre 2 ne conclut pas. On pousse le DL : $f(x) = 2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + x^2 + o(x^4) = 2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$. Ainsi $f(x) - f(0) \sim \frac{x^4}{12}$, qui est strictement positif pour $x \neq 0$. **Donc 0 est un minimum local strict de** f**.**

3. On a $k'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}$, donc $k'(0) = 0$. Par ailleurs, $k(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, d'où $k(x) - k(0) \sim \frac{x^3}{3}$. Cette quantité change de signe en 0. **Donc 0 est un point critique qui n'est pas un extremum local.**

4. On a $u_\lambda(x) = 1 + (\lambda - \frac{1}{2})x^2 + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, et $u'_\lambda(0) = 0$. Trois cas se présentent.
   - Si $\lambda > \frac{1}{2}$, $u_\lambda(x) - 1 \sim (\lambda - \frac{1}{2})x^2 > 0$: minimum local strict.
   - Si $\lambda < \frac{1}{2}$, $u_\lambda(x) - 1 \sim (\lambda - \frac{1}{2})x^2 < 0$: maximum local strict.
   - Si $\lambda = \frac{1}{2}$, $u_\lambda(x) - 1 \sim \frac{x^4}{24} > 0$: minimum local strict.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Un extremum strict d'un type exclut l'autre type. **Il y a minimum local si et seulement si $\lambda \geq \frac{1}{2}$, et maximum local si et seulement si $\lambda < \frac{1}{2}$.**

Point de méthode : lorsque $f''(a) = 0$, le critère d'ordre 2 est muet. Il faut alors chercher le premier terme non nul du DL : un exposant pair donne un extremum, un exposant impair n'en donne pas.

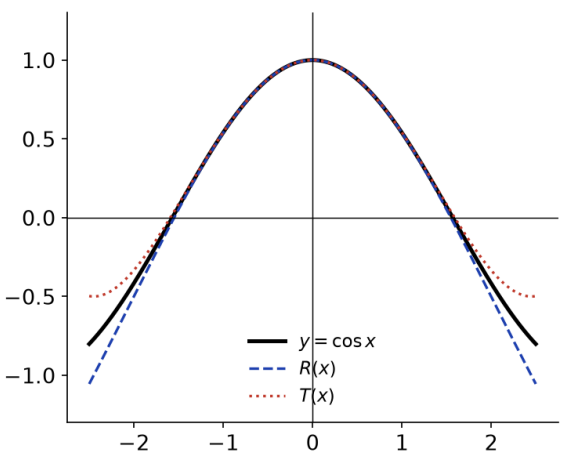
Corrigé de l'exercice 17 : Approximation rationnelle du cosinus

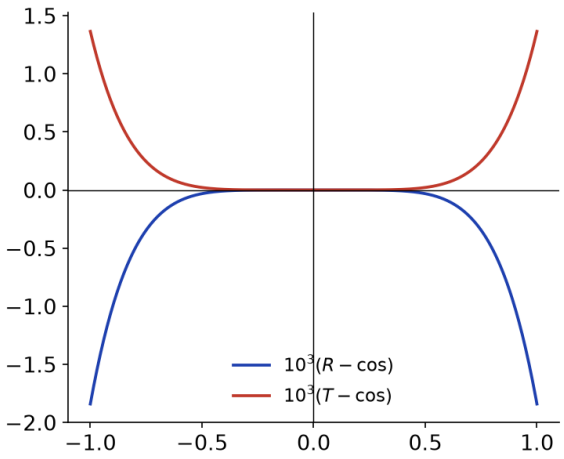
1. On a $\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$. En multipliant par $1 + ax^2$:
$$R(x) = 1 + (a-b)x^2 + b(b-a)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6).$$
C'est le DL cherché.

2. D'autre part, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$. Les termes impairs étant nuls, $R(x) - \cos x = o(x^5)$ équivaut à l'égalité des coefficients de x^2 et x^4. On obtient $a - b = -\frac{1}{2}$, puis $b(b-a) = \frac{b}{2} = \frac{1}{24}$. **Donc $b = \frac{1}{12}$ et $a = -\frac{5}{12}$.**

3. Le coefficient de x^6 de R vaut $b^2(a-b) = \frac{1}{144} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{288}$. Ainsi le coefficient de x^6 de $R - \cos$ vaut $-\frac{1}{288} + \frac{1}{720} = \frac{-5+2}{1440} = -\frac{1}{480}$. **Donc $R(x) - \cos x \sim -\frac{x^6}{480}$.**

4. On a directement $T(x) - \cos x = \frac{x^6}{720} + o(x^6)$, donc $T(x) - \cos x \sim \frac{x^6}{720}$. Les deux approximations sont du même ordre 6. Cependant, la constante de T est plus petite : près de 0, le polynôme de Taylor est un peu meilleur. De plus, près de 0, R approche $\cos$ par défaut tandis que T l'approche par excès, comme le montre la figure ci-dessous.





Point de méthode : pour ajuster des paramètres, écrivez le DL général, puis annulez les coefficients un par un, du plus bas degré au plus haut. Le premier coefficient qu'on ne peut plus annuler fournit l'équivalent de l'erreur.

Corrigé de l'exercice 18 : DL d'une bijection réciproque

1. La fonction f est dérivable et $f'(x) = (1+x)\,e^x$. Cette dérivée est strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et nulle en -1 seulement. Donc f est continue et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$. De plus, $f(-1) = -e^{-1}$ et $f(x) \to +\infty$. Par le théorème de la bijection, f **réalise une bijection de** $[-1, +\infty[$ **sur** $J = [-e^{-1}, +\infty[$**.**

2. La restriction de f à $]-1, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, bijective sur $]-e^{-1}, +\infty[$, de dérivée qui ne s'annule pas. D'après le résultat admis, W **est de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **sur** $]-e^{-1}, +\infty[$**, qui est un voisinage de 0.**

3. Par Taylor-Young, W admet un DL à l'ordre 3 en 0. Comme $f(0) = 0$, on a $W(0) = 0$, donc $W(y) = py + qy^2 + ry^3 + o(y^3)$. Ensuite, $W(y) = O(y)$, donc $W\,e^W = W + W^2 + \frac{W^3}{2} + o(y^3)$. Or $W^2 = p^2\,y^2 + 2pq\,y^3 + o(y^3)$ et $W^3 = p^3\,y^3 + o(y^3)$. L'égalité $W\,e^W = y$ et l'unicité du DL donnent :

$$p = 1, \quad q + p^2 = 0, \quad r + 2pq + \frac{p^3}{2} = 0.$$

Ainsi $q = -1$ et $r = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. **Donc** $W(y) = y - y^2 + \frac{3}{2}\,y^3 + o(y^3)$**.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. On a $\frac{W(y)-y}{y^2} = -1 + \frac{3}{2}y + o(y)$. **La limite vaut** -1**.** Cela traduit le fait que la courbe de W est sous sa tangente $y = x$ en 0, comme sur la figure de l'énoncé.

Corrigé de l'exercice 19 : Développement asymptotique d'une suite implicite

1. Sur $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, posons $\phi(x) = \tan x - x$. Alors $\phi'(x) = \tan^2 x \geq 0$, et ϕ' ne s'annule qu'en $n\pi$. Donc ϕ est strictement croissante sur I_n. De plus, ϕ tend vers $-\infty$ à gauche et vers $+\infty$ à droite. Par le théorème de la bijection, ϕ s'annule une seule fois sur I_n, en un point x_n. Enfin, $\phi(n\pi) = -n\pi < 0$, donc $x_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

2. On a $1 \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{1}{2n}$. Par encadrement, $\frac{x_n}{n\pi} \to 1$. **Ainsi** $x_n \sim n\pi$**.**

3. On a $\varepsilon_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Par π-périodicité, $\tan x_n = \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n) = \frac{1}{\tan \varepsilon_n}$. Comme $\tan x_n = x_n$, on obtient $\tan \varepsilon_n = \frac{1}{x_n}$. Donc $\varepsilon_n = \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x_n}) \to 0$. Puisque $\operatorname{Arctan} u \sim u$ en 0, $\varepsilon_n \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$**.**

4. D'abord, $\operatorname{Arctan} u = u + O(u^3)$, donc $\varepsilon_n = \frac{1}{x_n} + O(\frac{1}{n^3})$. Ensuite, $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{n})$, d'où :

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi\, n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Enfin, $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon_n$. **Donc** $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi\, n^2} + O(\frac{1}{n^3})$**.**

Point de méthode : on améliore un développement asymptotique en le réinjectant dans l'équation ; chaque passage gagne un ordre.

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : étude complète d'une courbe

1. Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. En 0, on a $0 < \frac{1}{1+e^{1/x}} < 1$, donc $|f(x)| \leq |x|$. Ainsi $f(x) \to 0 = f(0)$. **Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.**

2. Pour $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{1+e^{1/x}}$. Quand $x \to 0^+$, $e^{1/x} \to +\infty$ et le taux tend vers 0. Quand $x \to 0^-$, $e^{1/x} \to 0$ et le taux tend vers 1. **Donc $f'_d(0) = 0$, $f'_g(0) = 1$, et f n'est pas dérivable en 0.** La courbe présente un point anguleux, avec deux demi-tangentes : $y = 0$ à droite et $y = x$ à gauche.

3. La fonction ψ est dérivable et $\psi'(u) = (2+u)\,e^u$. Elle décroît donc sur $]-\infty, -2]$ et croît sur $[-2, +\infty[$. Son minimum vaut $\psi(-2) = 1 - e^{-2} > 0$. **Ainsi $\psi > 0$ sur $\mathbb{R}$.**

4. Pour $x \neq 0$, la dérivée de $x \to \frac{1}{1+e^{1/x}}$ vaut $\frac{e^{1/x}}{x^2\,(1+e^{1/x})^2}$. Par la formule du produit :

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}} + \frac{e^{1/x}}{x\,(1+e^{1/x})^2} = \frac{\psi(1/x)}{(1+e^{1/x})^2}.$$

Donc $f' > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Comme f est continue en 0, **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

5. Posons $q(t) = \frac{1}{1+e^t} - \frac{1}{2}$. Alors $q(-t) = \frac{e^t}{1+e^t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^t} = -q(t)$: q est impaire. Ainsi $\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{2} + \alpha\,t + \beta\,t^3 + o(t^3)$. On multiplie par $1 + e^t = 2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ et on identifie à 1. Le coefficient de t donne $\frac{1}{2} + 2\alpha = 0$, donc $\alpha = -\frac{1}{4}$. Celui de t^3 donne $\frac{1}{12} + \frac{\alpha}{2} + 2\beta = 0$, donc $2\beta = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$. **Ainsi $\frac{1}{1+e^t} = \frac{1}{2} - \frac{t}{4} + \frac{t^3}{48} + o(t^3)$.**

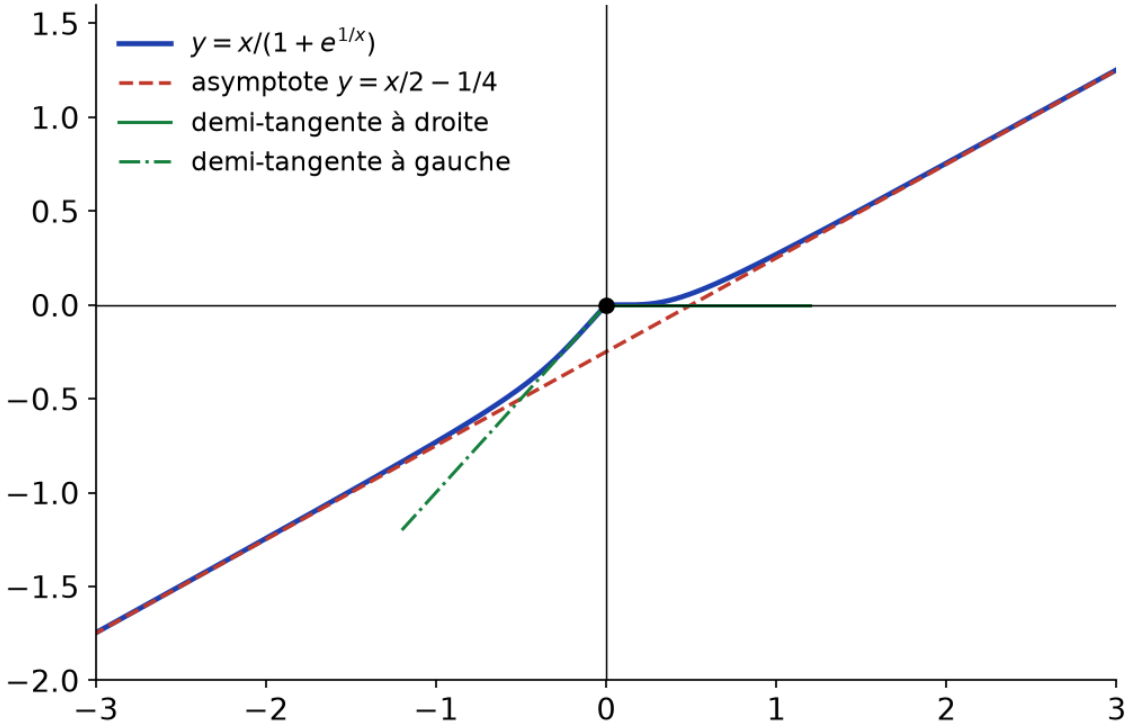
6. Avec $t = \frac{1}{x} \to 0$ en $\pm\infty$, on obtient :

$$f(x) = x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{48x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Donc $f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \sim \frac{1}{48x^2} > 0$. **La droite $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$, et la courbe est au-dessus des deux côtés.**

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

7. La courbe est croissante, passe par l'origine avec un point anguleux, puis rejoint son asymptote par au-dessus. La figure ci-dessous résume l'étude.



Point de méthode : une étude complète s'organise toujours de la même façon : domaine, continuité, dérivabilité aux points délicats, variations, puis comportement en l'infini. Le DL n'intervient qu'aux endroits où il est vraiment utile.

Revenir aux énoncés des exercices

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : développements limités, cours de maths sup
- Les énoncés : exercices de maths sup sur développements limités
- À maîtriser avant : Relations de comparaison : domination, équivalents, Dérivabilité et convexité

- Chapitre précédent : Relations de comparaison : domination, équivalents
- Chapitre suivant : Espaces vectoriels, familles libres et génératrices
- Le même thème en L1 : développements limités, exercices de maths en L1
- Tester vos connaissances : QCM de maths sup par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths sup et les chapitres de maths spé

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.