

Développements limités

Corrigé de l'exercice 1 : Relations de comparaison

1. Pour $x > 0$, $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$. **L'affirmation est vraie.**
2. Le même quotient $\frac{1}{x}$ n'est pas borné quand $x \rightarrow 0$. En réalité, c'est x^3 qui est négligeable devant x^2 en 0 . **L'affirmation est fausse.**
3. Pour $x \neq 0$, $\left| \frac{x \sin x}{x} \right| = |\sin x| \leq 1$. Le quotient est donc borné. **L'affirmation est vraie.**
4. D'après les croissances comparées, $(\ln x)^\beta = o(x^\alpha)$ pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Avec $\beta = 10$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, **l'affirmation est vraie.**
5. Prenons $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$. D'une part, $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$, donc $f \sim g$.
D'autre part, $\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e \neq 1$. **L'affirmation est fausse** : on ne compose pas un équivalent par l'exponentielle.
6. On a $\frac{n^2 + (-1)^n n}{n^2} = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Or $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. **L'affirmation est vraie.**
7. On écrit $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n}{n}$. Chaque facteur est compris entre 0 et 1 , donc le produit est majoré par son premier facteur. Ainsi, $0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$, qui tend vers 0 . **L'affirmation est vraie.**

Corrigé de l'exercice 2 : Équivalents et limites

1. En 0 , $\sin(3x) \sim 3x$ et $\ln(1+2x) \sim 2x$, car $3x$ et $2x$ tendent vers 0 . De plus, $x \tan x \sim x^2$. Les équivalents passent au produit et au quotient, donc le quotient est équivalent à $\frac{6x^2}{x^2} = 6$. **La limite vaut 6.**
2. D'abord, $1 - \cos(2x) \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$. Ensuite, $x \arctan x \sim x^2$. Le quotient est donc équivalent à 2 . **La limite vaut 2.**
3. On utilise $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ avec $\alpha = \frac{1}{3}$. Comme $\sin x \sim x$, le quotient est équivalent à $\frac{x/3}{x}$. **La limite vaut $\frac{1}{3}$.**
4. On pose $t = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ . L'expression devient $\frac{e^t - 1}{t}$, et $e^t - 1 \sim t$. **La limite vaut 1.**
5. On multiplie par la quantité conjuguée : $u_n = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Or $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$. Ici, la somme de deux termes positifs équivalents ne pose pas de problème, car $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right) \rightarrow 1$. **Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.**

Point de méthode : les équivalents s'utilisent sans risque dans les produits et les quotients. Pour une somme, on revient à la définition en calculant le quotient.

Corrigé de l'exercice 3 : Développement limités usuels

1. On remplace x par $-x$ dans le développement de e^x , ce qui est permis car $-x \rightarrow 0$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$
2. On applique la formule de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$. Les coefficients valent $\frac{1}{2}$, puis

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}, \text{ puis } \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{16}.$$
Donc

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$
3. On remplace x par $-2x$ dans $\frac{1}{1-x}$: $\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + o(x^3)$.
4. On remplace x par $-x$ dans $\ln(1+x)$. Chaque terme $\frac{(-1)^{k+1}(-x)^k}{k}$ vaut $-\frac{x^k}{k}$. Ainsi,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4).$$

5. La fonction $\cosh$ est paire, et ses coefficients sont ceux de e^x d'indice pair. Le terme de degré 5 est nul, donc $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$.
6. On applique la formule avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et la variable $-x$. Le coefficient d'ordre 1 vaut $-\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}$. Celui d'ordre 2 vaut $\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$. Donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$.

Corrigé de l'exercice 4 : Développement limité en un point autre que 0

1. Avec $x = 1 + h$, on a $\ln x = \ln(1+h)$. Par conséquent,

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3).$$
2. Avec $x = 4 + h$, on factorise : $\sqrt{4+h} = 2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$. On utilise ensuite $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ avec $u = \frac{h}{4}$:
- $$\sqrt{4+h} = 2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128}\right) + o(h^2).$$
- Donc** $\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + o((x-4)^2)$.
3. On écrit $e^{1+h} = e \cdot e^h$. Ainsi, $e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \frac{e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.
4. La formule d'addition donne $\sin\left(\frac{\pi}{6} + h\right) = \frac{1}{2}\cos h + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h$. On remplace $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ et $\sin h = h + o(h^2)$. **On obtient**

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2\right).$$
5. D'après la question 2, la tangente en 4 a pour équation $y = 2 + \frac{x-4}{4}$, soit $y = \frac{x}{4} + 1$. De plus, l'écart entre la courbe et la tangente est équivalent à $-\frac{(x-4)^2}{64}$, qui est négatif. **La tangente est $y = \frac{x}{4} + 1$, et la courbe est localement en dessous.**

Corrigé de l'exercice 5 : Inégalité de Taylor-Lagrange et sinus

1. La fonction $\sin$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ses dérivées successives en 0 valent 0, 1, 0, -1, 0 jusqu'à l'ordre 4. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 en 0 est donc $x - \frac{x^3}{6}$. Par ailleurs, $\sin^{(5)} = \cos$, donc $|\sin^{(5)}| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4, avec $M = 1$, donne alors $\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$ pour tout réel x .
2. Pour $x = 0,1$, on obtient $\sin(0,1) \approx 0,1 - \frac{0,001}{6} = 0,0998333 \dots$. L'erreur est majorée par $\frac{(0,1)^5}{120} = \frac{10^{-5}}{120} \approx 8,3 \times 10^{-8}$. Ainsi, $\sin(0,1) \approx 0,0998333$ à moins de 10^{-7} près.
3. Pour $|x| \leq \frac{1}{2}$, on a $|x|^5 \leq \frac{1}{32}$. Par conséquent, l'erreur est au plus $\frac{1}{32 \times 120} = \frac{1}{3840}$. **L'erreur est inférieure à $\frac{1}{3840} \approx 2,6 \times 10^{-4}$ sur tout l'intervalle.** Cela explique pourquoi, sur la figure de l'énoncé, les deux courbes sont indiscernables dans la bande colorée.

Corrigé de l'exercice 6 : Limites par développements limités

1. On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. En divisant par x^3 , la limite vaut $\frac{1}{6}$.
2. De même, $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. La limite vaut $\frac{1}{2}$.
3. On réduit au même dénominateur : $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$. Le numérateur est équivalent à $\frac{x^2}{2}$. Le dénominateur est équivalent à $x \cdot x = x^2$. La limite vaut donc $\frac{1}{2}$.
4. Pour x proche de 0, $\cos x > 0$, et $(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)$. Or $\cos x = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc $\ln(\cos x) \sim u \sim -\frac{x^2}{2}$. L'exposant tend vers $-\frac{1}{2}$ et l'exponentielle est continue. La limite vaut $e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Corrigé de l'exercice 7 : Taylor avec reste intégral et logarithme

1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0, +\infty[$. On calcule $f'(t) = \frac{1}{1+t}$,
 $f''(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ et $f^{(3)}(t) = \frac{2}{(1+t)^3}$. Ainsi, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et
 $f''(0) = -1$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 donne :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \cdot \frac{2}{(1+t)^3} dt = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} dt.$$

C'est la formule demandée, valable pour tout $x \geq 0$.

2. Soit $x \geq 0$ et notons $R(x)$ l'intégrale. Pour $t \in [0, x]$, l'intégrande est positive, donc
 $R(x) \geq 0$. De plus, $(1+t)^3 \geq 1$, donc $\frac{(x-t)^2}{(1+t)^3} \leq (x-t)^2$. Par croissance de l'intégrale,

$$R(x) \leq \int_0^x (x-t)^2 dt = \frac{x^3}{3}. \text{ On obtient bien } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

3. Pour $x = 0,1$, le minorant vaut $0,1 - 0,005 = 0,095$. Le majorant vaut
 $0,095 + \frac{0,001}{3} = 0,095333\dots$. L'amplitude est $\frac{0,001}{3} \approx 3,3 \times 10^{-4}$, inférieure à
 4×10^{-4} . **Ainsi, $0,095 \leq \ln(1,1) \leq 0,09534$.**

4. On applique l'encadrement avec $x = \frac{1}{n}$, puis on retranche $\frac{1}{n}$ et on multiplie par $n^2 > 0$:

$$-\frac{1}{2} \leq n^2 \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right) \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}.$$

Le majorant tend vers $-\frac{1}{2}$. D'après le théorème des gendarmes, **la limite vaut $-\frac{1}{2}$.**

Point de méthode : le reste intégral donne des inégalités valables sur tout l'intervalle, et pas seulement au voisinage de 0. C'est son grand avantage sur la formule de Taylor-Young.

Corrigé de l'exercice 8 : Unicité, parité et contre-exemple

1. Écrivons $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$. Comme $-x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, on peut remplacer x par $-x$: $f(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k x^k + o(x^n)$. Or f est impaire, donc $f(-x) = -f(x) = \sum_{k=0}^n (-c_k) x^k + o(x^n)$. Par unicité de la partie régulière, $(-1)^k c_k = -c_k$ pour tout k . Pour k pair, cela donne $2c_k = 0$. **Les coefficients d'indice pair sont donc nuls.** Enfin, $f(0) = -f(0)$, donc $f(0) = 0$.

2.

1. Pour $x \neq 0$, $|g(x)| \leq |x|^3$, donc $\left| \frac{g(x)}{x^2} \right| \leq |x| \rightarrow 0$. Ainsi, $g(x) = o(x^2)$. **Le développement limité est** $g(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + o(x^2)$.
2. Sur $\mathbb{R}^*$, g est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables. On trouve $g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. En 0 , le taux d'accroissement vaut $\frac{g(x)}{x} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, de valeur absolue au plus x^2 . Il tend donc vers 0 . **Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(0) = 0$.**
3. Pour $x \neq 0$, $\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Le premier terme tend vers 0 . En revanche, $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0 . En effet, avec $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ et $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$, qui tendent vers 0 , il vaut 1 puis -1 . **Donc g' n'est pas dérivable en 0 : l'existence d'un $DL_2(0)$ n'entraîne pas la double dérivabilité.**

Corrigé de l'exercice 9 : Produit de développements limités

1. On part de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et de $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. On regroupe les produits par degré, jusqu'au degré 4 :

$$x^2 : \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad x^3 : \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3},$$

$$x^4 : \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}.$$

Donc $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$.

2. Le facteur $\ln(1+x)$ commence au degré 1. Il suffit donc de développer $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 et $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 :

$$\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^3 + o(x^3).$$

Or $\frac{8-6-3}{24} = -\frac{1}{24}$. **Donc** $\sqrt{1+x} \ln(1+x) = x - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$.

3. Les deux facteurs commencent au degré 1. Pour l'ordre 6, il suffit de les développer à l'ordre 5 : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$. Le terme en x^4 vaut $\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0$. Celui en x^6 vaut $\frac{1}{120} + \frac{1}{120} - \frac{1}{36} = \frac{3+3-10}{360} = -\frac{1}{90}$. **Donc** $\sin x \operatorname{sh} x = x^2 - \frac{x^6}{90} + o(x^6)$.

Point de méthode : chaque facteur qui commence au degré p permet de développer l'autre facteur p ordres plus bas. On gagne ainsi beaucoup de calculs inutiles.

Corrigé de l'exercice 10 : Composition de développements limités

1. On écrit $\cos x = 1 + u$ avec $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, qui tend vers 0. Comme $u = O(x^2)$, on a $u^3 = o(x^4)$, donc $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(x^4)$. De plus, $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$. Par conséquent, $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$. **Donc** $\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$.
2. On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, qui tend vers 0. Ensuite, $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(x^3)$, avec $u^2 = x^2 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$. En sommant : $1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. **Donc** $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

3. Ici, $e^x \rightarrow 1$, donc on ne peut pas composer directement $\ln(1+v)$ avec $v = e^x$. On factorise : $1 + e^x = 2(1+w)$ avec $w = \frac{e^x - 1}{2} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$. Ainsi, $\ln(1 + e^x) = \ln 2 + \ln(1+w)$, avec $w \rightarrow 0$. On calcule $w^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)$ et $w^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$. Alors :

$$\ln(1 + w) = \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right)x^3 + o(x^3).$$

Le coefficient de x^3 vaut $\frac{2-3+1}{24} = 0$. **Donc** $\ln(1+e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$.

Corrigé de l'exercice 11 : Développement limités d'un quotient

1. Comme on divise par x , il faut développer $e^x - 1$ à l'ordre 4 : $e^x - 1 = x(1+v)$ avec $v = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$. Donc $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + o(x^3)$. On calcule $v^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $v^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$. Le coefficient de x^2 vaut $-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Celui de x^3 vaut $-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{-1+4-3}{24} = 0$. **Ainsi**, $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^3)$.

2. On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, qui tend vers 0. Alors $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(x^4)$. On a $u^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$, $u^3 = x^3 + o(x^4)$ et $u^4 = x^4 + o(x^4)$. En regroupant :

$$\frac{1}{1 + \sin x} = 1 - x + x^2 + \left(\frac{1}{6} - 1\right)x^3 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)x^4 + o(x^4).$$

Donc $\frac{1}{1 + \sin x} = 1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

3. D'après la question précédente, $\frac{1}{1 + \sin x} - 1 + x = x^2 + o(x^2)$. **La limite vaut donc 1.**

Corrigé de l'exercice 12 : Intégration d'un développement limité

- On applique $(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + o(u^2)$ avec $u = -x^2$. On obtient $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$. Or $\arcsin$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée cette fonction, et $\arcsin 0 = 0$. Le théorème d'intégration des développements limités donne $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.
- Pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$. Donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ et s est bien définie. Ensuite, la dérivée de $x + \sqrt{1+x^2}$ vaut $1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$. En divisant par $x + \sqrt{1+x^2}$, on obtient $s'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Avec $u = x^2$, on a $s'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$. Comme $s(0) = \ln 1 = 0$, on intègre terme à terme : $s(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.
- Par différence, $\arcsin x - s(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. La limite vaut $\frac{1}{3}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Fonction définie par une intégrale

- La fonction $t \rightarrow e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, G est sa primitive nulle en 0. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$, avec $G'(x) = e^{-x^2}$. La relation de Chasles donne ensuite $\int_x^{2x} = \int_0^{2x} - \int_0^x$. Ainsi, $F(x) = G(2x) - G(x)$.
- On a $G'(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$, en remplaçant x par $-x^2$ dans e^x . Comme $G(0) = 0$, l'intégration donne $G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$.
- On remplace x par $2x$, qui tend vers 0 : $G(2x) = 2x - \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{10} + o(x^5)$. Par différence, les coefficients valent $2 - 1 = 1$, puis $-\frac{8}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$, puis $\frac{32}{10} - \frac{1}{10} = \frac{31}{10}$.
Donc $F(x) = x - \frac{7x^3}{3} + \frac{31x^5}{10} + o(x^5)$.
- La tangente en 0 a pour équation $y = x$. De plus, $F(x) - x \sim -\frac{7x^3}{3}$, de degré impair. Cet écart est positif pour $x < 0$ et négatif pour $x > 0$, au voisinage de 0. **La courbe traverse sa tangente $y = x$: l'origine est un point d'inflexion.**

Corrigé de l'exercice 14 : Limites plus délicates

1. On a $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Donc
 $\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Les équivalents seuls auraient donné $x - x$, sans conclusion. **La limite vaut $\frac{1}{2}$.**

2. On développe

$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$. Par conséquent :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1).$$

La limite vaut $\frac{1}{3}$.

3. On factorise : $e^{1/x} - e^{1/(x+1)} = e^{1/(x+1)}(e^\delta - 1)$, où $\delta = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\delta \rightarrow 0$, donc $e^\delta - 1 \sim \delta \sim \frac{1}{x^2}$. De plus, $e^{1/(x+1)} \rightarrow 1$. L'expression est donc équivalente à $x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$. **La limite vaut 1.**

4. On pose $t = \frac{1}{n}$. Alors $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{t} \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + o(t^2)$.

Ensuite, avec $w = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{3}$, on a

$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)$. Donc

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. **La limite vaut $\frac{11e}{24}$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Tangente et position de la courbe

1. Le trinôme $1 + x + x^2$ a pour discriminant $1 - 4 = -3 < 0$, et son coefficient dominant est positif. Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$. **Par composition avec $\ln$, f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.**

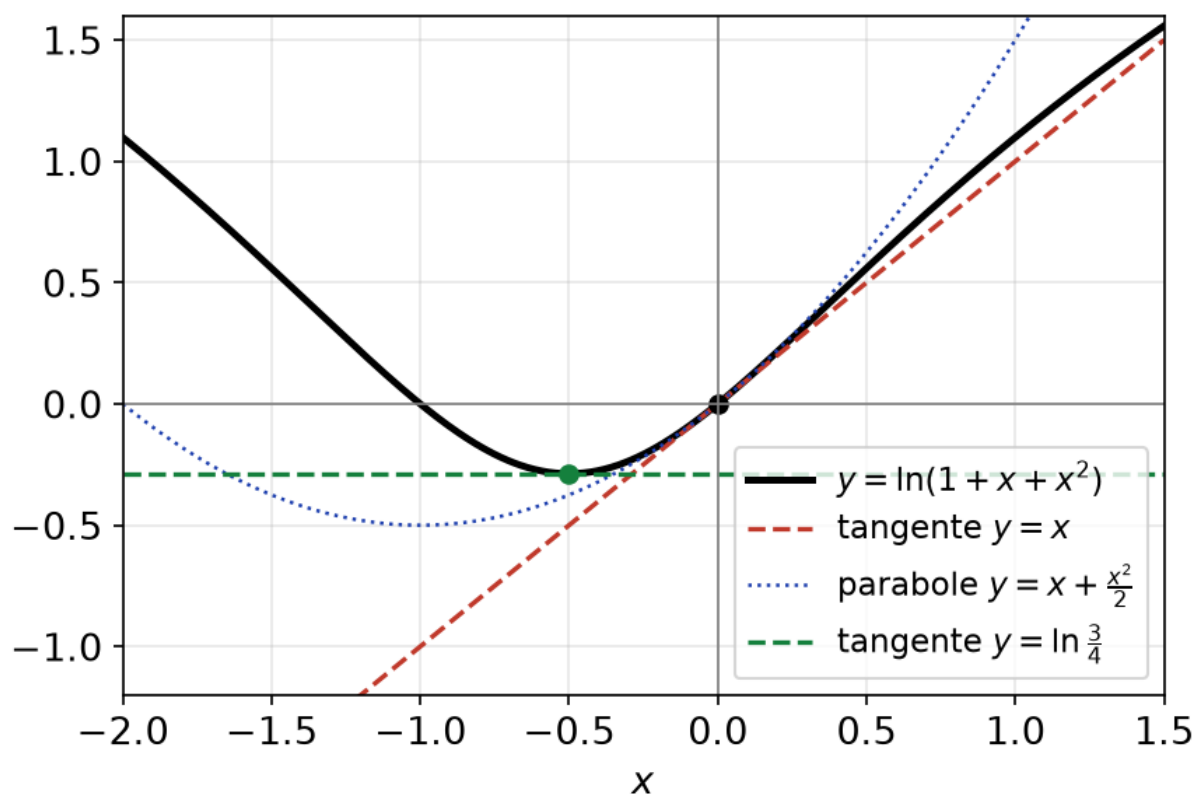
2. On pose $u = x + x^2$, qui tend vers 0. Alors $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(x^3)$. On a

$u^2 = x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ et $u^3 = x^3 + o(x^3)$. Donc le coefficient de x^2 vaut $1 - \frac{1}{2}$, et celui de x^3 vaut $-1 + \frac{1}{3}$. **Ainsi**, $f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$.

3. La tangente en 0 a pour équation $y = x$. L'écart vérifie $f(x) - x \sim \frac{x^2}{2}$, qui est positif pour $x \neq 0$. **La courbe est au-dessus de sa tangente $y = x$ au voisinage de 0.**

4. On pose $x = -\frac{1}{2} + h$. Alors $1 + x + x^2 = \frac{3}{4} + h^2 = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{4h^2}{3}\right)$. Donc $f\left(-\frac{1}{2} + h\right) = \ln\frac{3}{4} + \ln\left(1 + \frac{4h^2}{3}\right) = \ln\frac{3}{4} + \frac{4h^2}{3} + o(h^2)$. Le coefficient de h est nul : la tangente est horizontale, d'équation $y = \ln\frac{3}{4}$. L'écart est équivalent à $\frac{4h^2}{3} > 0$. **Le point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ est un minimum local, et même global puisque $1 + x + x^2 \geq \frac{3}{4}$.**

La figure ci-dessous reprend la courbe avec ses deux tangentes. On y voit la courbe au-dessus de $y = x$ près de l'origine, et au-dessus de la tangente horizontale en $-\frac{1}{2}$.



Corrigé de l'exercice 16 : Extremum local et point d'inflexion

1. On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$. Donc $f(x) = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, et $f(x) \sim \frac{x^4}{24}$. Ainsi, $f(x) > 0 = f(0)$ pour $x \neq 0$ assez proche de 0. **La fonction f admet en 0 un minimum local strict.**

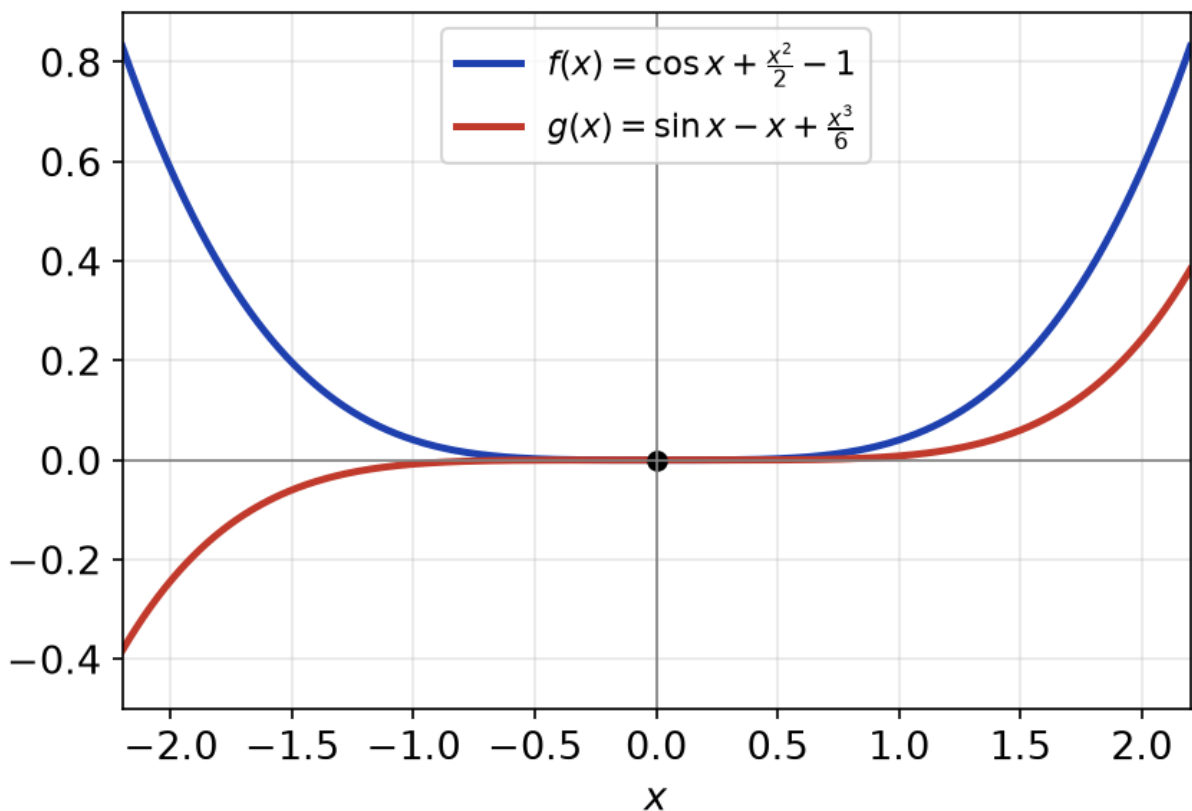
2. On calcule $g'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, donc $g'(0) = 0$. Pourtant, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, donc $g(x) \sim \frac{x^5}{120}$. Ce terme change de signe en 0. **La fonction g n'admet pas d'extremum en 0 : l'origine est un point d'inflexion à tangente horizontale.**

3. On a $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc $\varphi_a(x) = \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. La tangente en 0 est donc l'axe $y = 0$.

- Si $a > \frac{1}{2}$, $\varphi_a(x) \sim \left(a - \frac{1}{2}\right)x^2 > 0$: minimum local strict.
- Si $a < \frac{1}{2}$, le même équivalent est négatif : maximum local strict.
- Si $a = \frac{1}{2}$, $\varphi_a(x) \sim \frac{x^3}{3}$, qui change de signe : point d'inflexion.

Le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion si et seulement si $a = \frac{1}{2}$; sinon, c'est un extremum local.

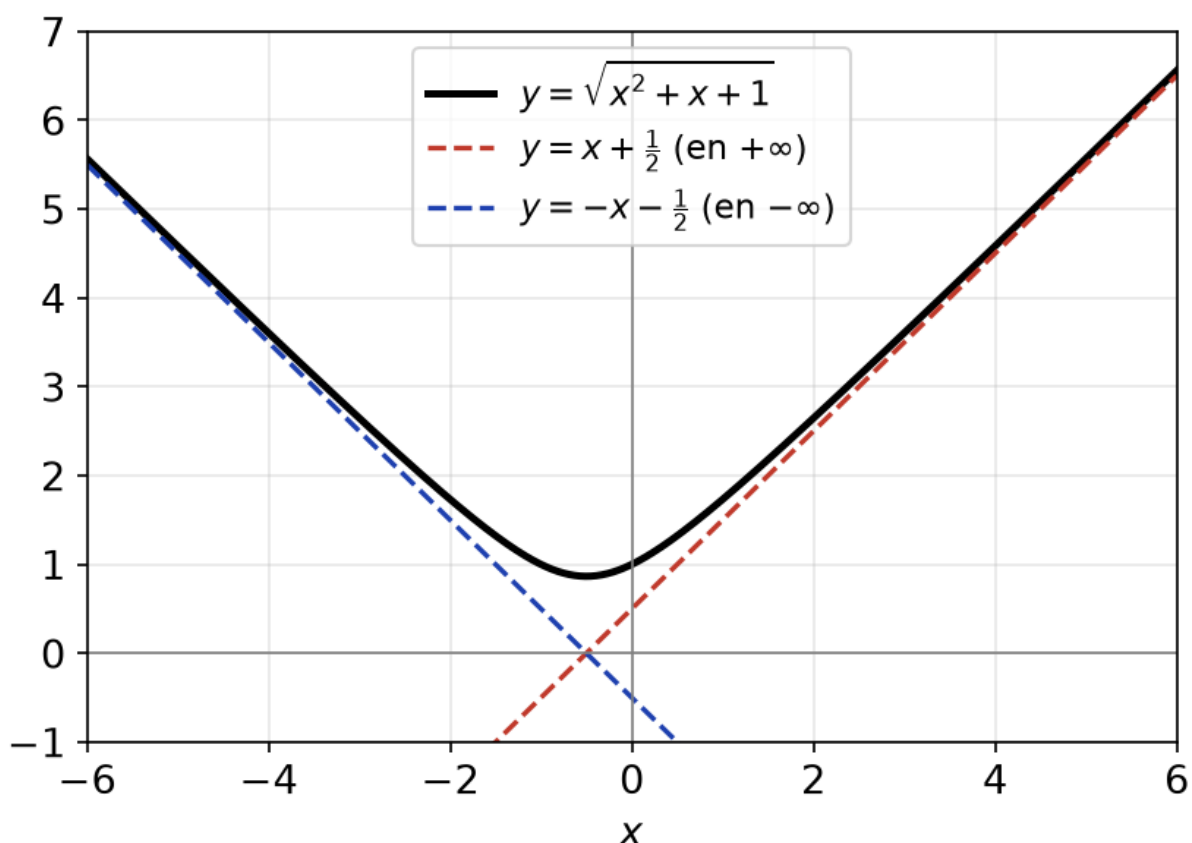
La figure ci-dessous compare f et g près de 0. La courbe de f reste au-dessus de l'axe, alors que celle de g le traverse en restant très plate.



Corrigé de l'exercice 17 : Asymptotes d'une racine carrée

1. Le trinôme $x^2 + x + 1$ a un discriminant égal à -3 . Il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $x > 0$, on factorise x^2 sous la racine : $f(x) = x\sqrt{1 + t + t^2}$ avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$.
On applique $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$ avec $u = t + t^2$. Comme $u^2 = t^2 + o(t^2)$, on obtient $\sqrt{1 + t + t^2} = 1 + \frac{t}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)t^2 + o(t^2)$. En multipliant par $x = \frac{1}{t}$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
3. Par conséquent, $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{3}{8x}$, qui tend vers 0 et reste positif. **La droite $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote en $+\infty$, et la courbe est au-dessus.**
4. Pour $x < 0$, on a $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Donc $f(x) = -x\sqrt{1 + t + t^2}$ avec $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^-$. Le même développement donne $f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Pour $x < 0$, le terme $-\frac{3}{8x}$ est positif. **La droite $y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote en $-\infty$, et la courbe est au-dessus.**

La figure ci-dessous montre les deux asymptotes. La courbe, qui ressemble à une branche d'hyperbole, reste au-dessus de chacune d'elles.



Point de méthode : en $-\infty$, l'oubli de $\sqrt{x^2} = -x$ est l'erreur la plus fréquente. Il conduit à une asymptote de pente fautive.

Corrigé de l'exercice 18 : Asymptote oblique et logarithme

- Il faut $x \neq 0$ et $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$. Un tableau de signes montre que ce quotient est positif si et seulement si $x < -1$ ou $x > 0$. **Donc** $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
- Pour $x > 0$, on écrit $f(x) = x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln x$. Le premier terme tend vers 0. Le second aussi, par croissances comparées. Donc $f(x) \rightarrow 0$ en 0^+ . Ensuite, quand $x \rightarrow -1^-$, $\frac{x+1}{x} \rightarrow 0^+$, donc le logarithme tend vers $-\infty$, tandis que $x^2 \rightarrow 1$. **Ainsi,**

$f \rightarrow 0$ en 0^+ et $f \rightarrow -\infty$ en -1^- : la droite $x = -1$ est asymptote verticale.

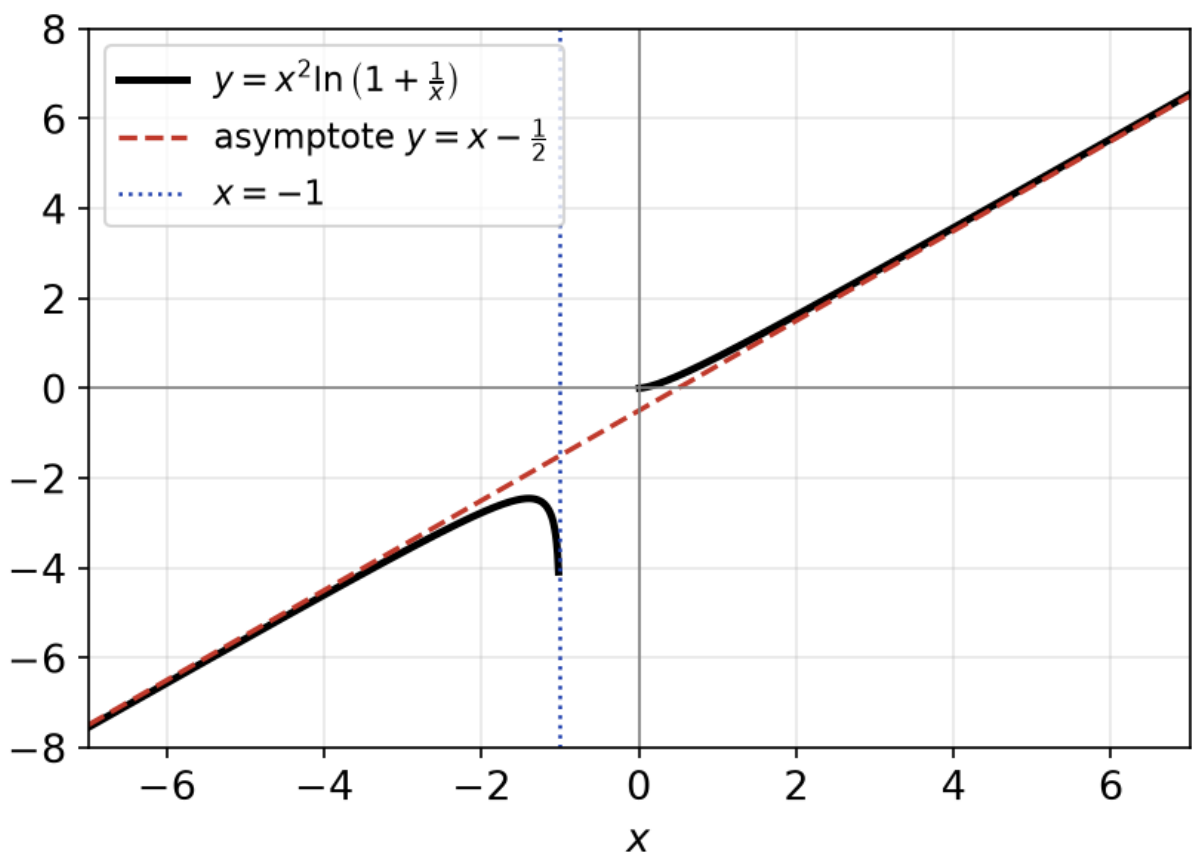
3. On pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$, aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$. Alors

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3). \text{ En multipliant par } x^2 = \frac{1}{t^2} :$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } \pm\infty.$$

4. Ainsi, $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{3x}$. Cet écart tend vers 0 dans les deux cas. Il est positif en $+\infty$ et négatif en $-\infty$. **La droite $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote des deux côtés ; la courbe est au-dessus en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$.**

La figure ci-dessous résume l'étude. On y voit les deux branches de la courbe, l'asymptote oblique commune et l'asymptote verticale $x = -1$.



Corrigé de l'exercice 19 : Le nombre e est irrationnel

1. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, et toutes ses dérivées valent 1 en 0. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n , entre 0 et 1, s'écrit donc

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt. \text{ Ainsi, } e - S_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

2. L'intégrande est continue et positive sur $[0, 1]$. Elle est même strictement positive sur $[0, 1[$. Son intégrale est donc strictement positive. De plus, pour $t \in [0, 1[$, on a $e^t < e$, donc la fonction continue $\frac{(1-t)^n}{n!}(e - e^t)$ est positive et non identiquement nulle. Par conséquent :

$$e - S_n < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = e \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}.$$

On a bien $0 < e - S_n < \frac{e}{(n+1)!}$.

3. Pour $n = 2$, $S_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. L'inégalité donne $e - \frac{5}{2} < \frac{e}{6}$, soit $\frac{5e}{6} < \frac{5}{2}$. Donc $e < 3$. Ensuite, $0 < e - S_n < \frac{3}{(n+1)!}$, qui tend vers 0. **Ainsi, $e < 3$ et $S_n \rightarrow e$.**
4. Soit $n \geq \max(q, 2)$. Comme $q \leq n$, q divise $n!$, donc $n!e = \frac{n!}{q}p$ est un entier. De même, $n!S_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ est une somme d'entiers. Donc N est un entier. D'après les questions 2 et 3, $0 < N < \frac{n!e}{(n+1)!} = \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leq 1$, car $n \geq 2$. Or aucun entier n'est strictement compris entre 0 et 1. **L'hypothèse est absurde : e est irrationnel.**

Point de méthode : ici, la stricte positivité du reste est essentielle. Seule la formule avec reste intégral la fournit directement.

Corrigé de l'exercice 20 : Développement asymptotique d'une

suite implicite

1. Posons $\psi(x) = x + \ln x$ sur $]0, +\infty[$. Elle est continue et strictement croissante, comme somme de deux fonctions strictement croissantes. De plus, $\psi(x) \rightarrow -\infty$ en 0^+ et $\psi(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, ψ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. **L'équation $\psi(x) = n$ a donc une unique solution $x_n = \psi^{-1}(n)$.**
2. La réciproque ψ^{-1} est strictement croissante, donc $x_n < x_{n+1}$. Supposons la suite majorée par un réel M . Alors $n = \psi(x_n) \leq \psi(M)$ pour tout n , ce qui est absurde. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. **Ainsi, (x_n) est croissante et tend vers $+\infty$.**
3. On a $\frac{n}{x_n} = 1 + \frac{\ln x_n}{x_n}$. Comme $x_n \rightarrow +\infty$, les croissances comparées donnent $\frac{\ln x_n}{x_n} \rightarrow 0$. **Donc $\frac{n}{x_n} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $x_n \sim n$.**
4. On écrit $x_n = n - \ln x_n$ et $\ln x_n = \ln n + \ln \frac{x_n}{n}$. Or $\frac{x_n}{n} \rightarrow 1$, donc $\ln \frac{x_n}{n} \rightarrow 0$ par continuité du logarithme. **Ainsi, $x_n = n - \ln n + o(1)$.**
5. D'après la question précédente, $\frac{x_n}{n} = 1 + u_n$ avec $u_n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, on a $u_n \sim -\frac{\ln n}{n}$, et $u_n \rightarrow 0$. Alors $\ln \frac{x_n}{n} = \ln(1 + u_n) \sim u_n \sim -\frac{\ln n}{n}$. En reportant dans $x_n = n - \ln n - \ln \frac{x_n}{n}$:
$$x_n = n - \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Point de méthode : on améliore le développement par étapes. À chaque étape, on réinjecte le résultat précédent dans l'équation qui définit la suite.

Corrigé de l'exercice 21 : Problème, étude complète de $(1+x)^{(1/x)}$

Partie A : comportement aux bornes.

1. Quand $x \rightarrow -1^+$, $\ln(1+x) \rightarrow -\infty$ et $\frac{1}{x} \rightarrow -1$. Le produit $\frac{\ln(1+x)}{x}$ tend donc vers

$+\infty$, et $f(x) \rightarrow +\infty$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 0$ par croissances comparées, donc $f(x) \rightarrow e^0 = 1$. **Ainsi, $f \rightarrow +\infty$ en -1^+ et $f \rightarrow 1$ en $+\infty$.**

2. Notons $v(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$. Alors $f(x) - 1 = e^{v(x)} - 1 \sim v(x)$. Par ailleurs, $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, et le second terme tend vers 0 alors que $\ln x \rightarrow +\infty$. Donc $\ln(1+x) \sim \ln x$, puis $v(x) \sim \frac{\ln x}{x}$. **Ainsi, $f(x) - 1 \sim \frac{\ln x}{x} > 0$: la courbe est au-dessus de son asymptote $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.**

Partie B : étude en 0.

1. Comme on divise par x , on développe $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 :
 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. **Donc $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$.**
2. On écrit $f(x) = e \cdot e^w$ avec $w = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$, qui tend vers 0. Alors
 $e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + o(x^2)$, avec $w^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$. Le coefficient de x^2 vaut $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24}$. **Donc $f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$.**
3. Le développement à l'ordre 0 montre que $f(x) \rightarrow e$ en 0 : on prolonge f par $f(0) = e$. Ce prolongement admet alors un $DL_1(0)$, donc il est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{e}{2}$. La tangente a pour équation $y = e - \frac{e}{2}x$. L'écart est équivalent à $\frac{11e}{24}x^2 > 0$. **La courbe est au-dessus de sa tangente $y = e - \frac{e}{2}x$ au voisinage de 0.**

Partie C : variations.

1. Sur D , $f = e^v$ avec v dérivable, donc $f' = v' f$. On calcule :

$$v'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

Donc $f'(x) = f(x) \frac{\varphi(x)}{x^2(1+x)}$.

2. La fonction φ est dérivable sur $] -1, +\infty[$, avec $\varphi'(x) = 1 - \ln(1+x) - 1 = -\ln(1+x)$. Cette dérivée est positive sur $] -1, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$. Donc φ croît puis décroît,

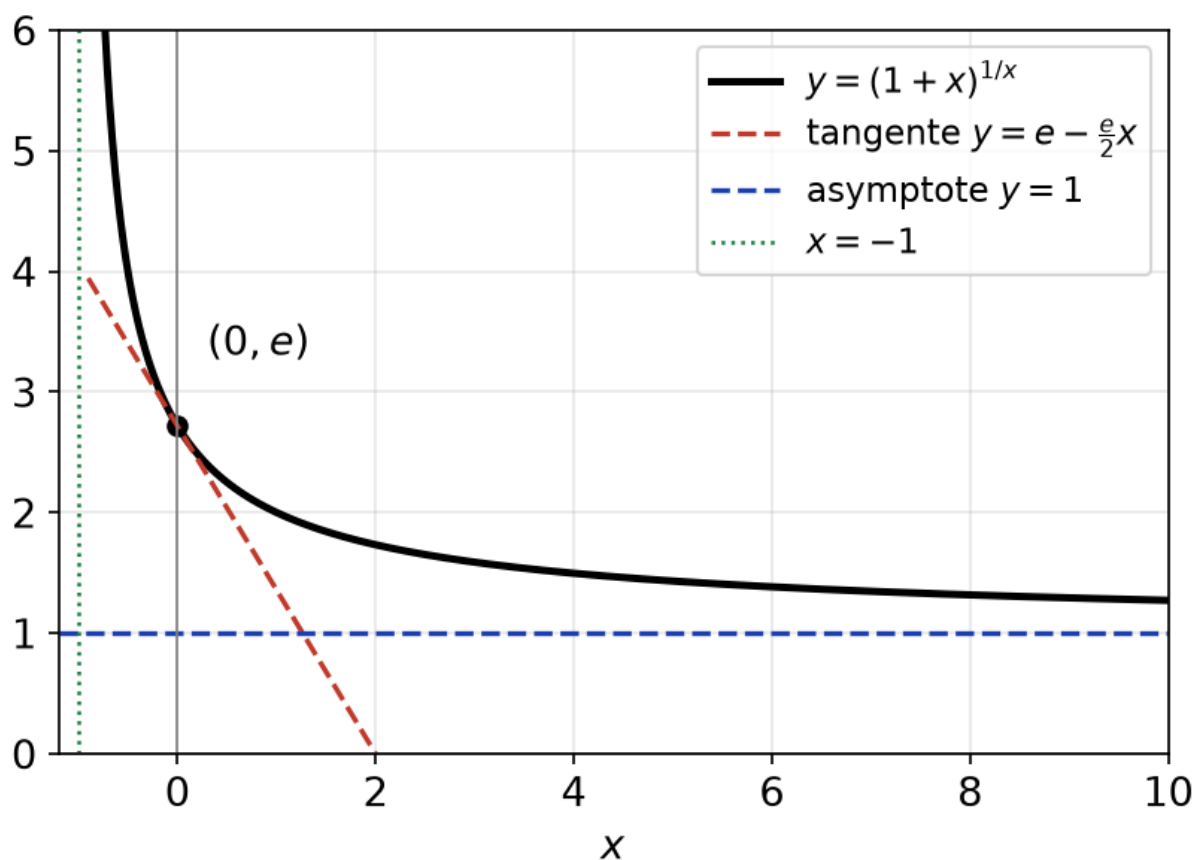
avec un maximum $\varphi(0) = 0$. De plus, φ' ne s'annule qu'en 0, donc la monotonie est stricte sur chaque intervalle. **Ainsi, $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$.**

3. Sur D , $f(x) > 0$, $x^2 > 0$ et $1+x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $\varphi(x)$, strictement négatif. **La fonction f est strictement décroissante sur $] -1, 0[$ et sur $] 0, +\infty[$.** Avec le prolongement continu $f(0) = e$, elle est même strictement décroissante sur $] -1, +\infty[$.

4. On développe :

$\varphi(x) = x - (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = x - x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc $\frac{\varphi(x)}{x^2(1+x)} \rightarrow -\frac{1}{2}$ et $f(x) \rightarrow e$. Par produit, $f'(x) \rightarrow -\frac{e}{2}$. Cette limite est égale à $f'(0)$, calculé en partie B. **Le prolongement de f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$.**

La figure ci-dessous synthétise le problème. On y lit la décroissance, l'asymptote verticale $x = -1$, l'asymptote horizontale $y = 1$ et la tangente en $(0, e)$.



Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [développements limités, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur développements limités](#)
- À maîtriser avant : [Dérivation et accroissements finis](#), [Intégrale de Riemann et calcul de primitives](#)
- Chapitre précédent : [Équations différentielles linéaires](#)
- Chapitre suivant : [Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)