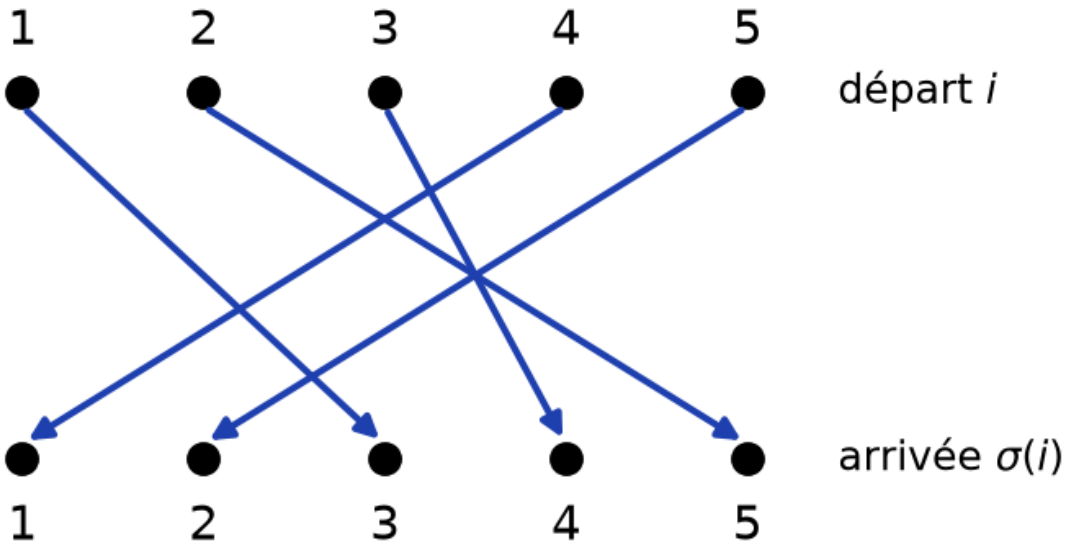
Déterminants

Exercice 1 : Signature de permutations

Dans S_5, on considère la permutation σ définie par $\sigma(1)=3$, $\sigma(2)=5$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=1$ et $\sigma(5)=2$, représentée ci-dessous. On considère aussi le cycle $\tau=(1,2,3,4,5)$.



1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. En déduire $\varepsilon(\sigma)$.

2. Compter les inversions de σ et retrouver $\varepsilon(\sigma)$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Vérifier que $\tau = (1,2)(2,3)(3,4)(4,5)$ et donner $\varepsilon(\tau)$.

4. Calculer $\sigma \circ \tau$, le décomposer en cycles disjoints et vérifier que $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\tau)$.

5. Donner sans calcul $\varepsilon(\sigma^{-1})$ et $\varepsilon(\sigma^2)$.

Exercice 2 : Déterminants d'ordre 2 et 3

Calculer les déterminants suivants, puis préciser lesquelles des matrices correspondantes sont inversibles.

$$D_1 = \left|[\text{ray?}] \begin{matrix} 2 \,\&\, 3 \\ 5 \,\&\, 7 \end{matrix},\right|, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & 6 \\ , & 7 & 8 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad D_4 = |\cos\theta \quad -\sin\theta \sin\theta \quad \text{constr}\theta|.$$

Exercice 3 : Calcul par opérations élémentaires

Calculer les déterminants suivants par la méthode du pivot, en justifiant chaque opération.

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & , & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & , & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 : Développement selon une ligne ou une colonne

1. Calculer, en choisissant judicieusement la ligne ou la colonne de développement,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & , & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$ en développant selon la première ligne.

3. Pour quelles valeurs de x la matrice correspondante est-elle inversible ?

Exercice 5 : Base ou non selon un paramètre

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $u_1 = (1, 1, m)$, $u_2 = (1, m, 1)$ et $u_3 = (m, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3)$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique, et le factoriser.

2. En déduire les valeurs de m pour lesquelles (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Pour chaque valeur exclue, donner une relation de dépendance linéaire explicite.

Exercice 6 : Résolution d'un système de Cramer

On considère le système

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

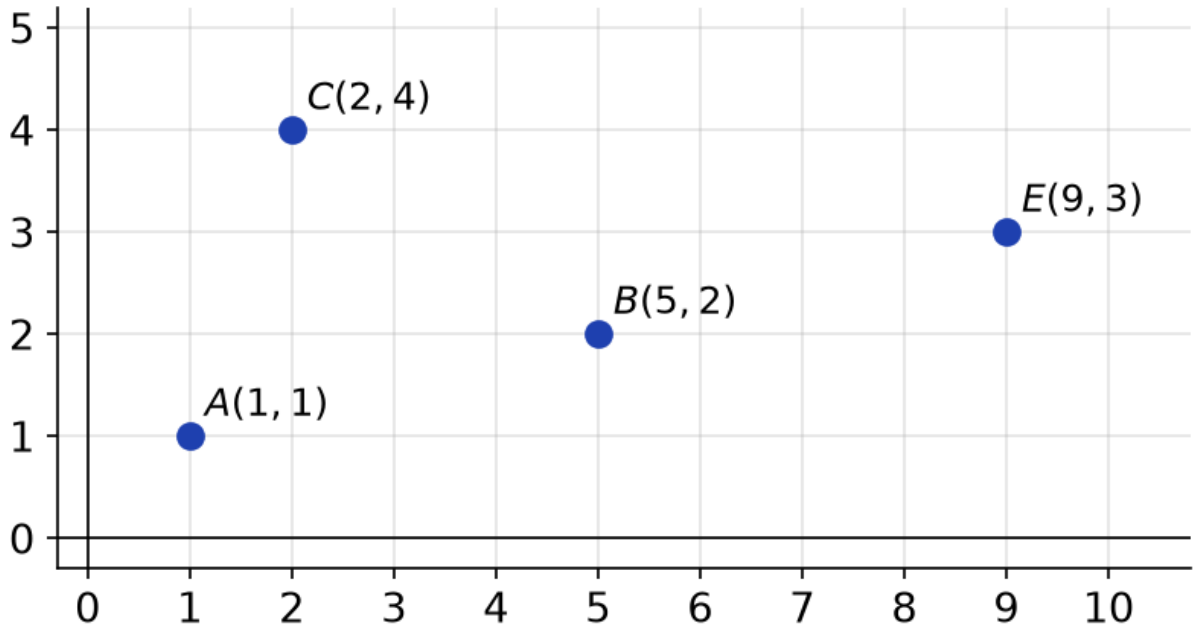
1. Montrer que c'est un système de Cramer.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Le résoudre à l'aide des formules de Cramer, puis vérifier la solution.

Exercice 7 : Aire d'un parallélogramme et d'un triangle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère les points $A(1,1)$, $B(5,2)$, $C(2,4)$ et $E(9,3)$, placés sur la figure ci-dessous.



1. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est-elle directe ?
2. Déterminer le point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme, puis son aire.
3. En déduire l'aire du triangle ABC.
4. Les points A, B et E sont-ils alignés ?

Exercice 8 : Formes bilinéaires alternées du plan

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et, pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

1. Soit φ une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$, puis que $\varphi = \varphi(e_1, e_2) \det_{\mathcal{B}}$, sans utiliser le théorème général du cours.

2. Les applications $f(x, y) = 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$ et $g(x, y) = x_1 y_1$ sont-elles des formes bilinéaires alternées ? Le cas échéant, écrire la forme comme multiple de $\det_{\mathcal{B}}$.

3. Montrer que toute forme trilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$ est nulle.

Exercice 9 : Propriétés algébriques du déterminant

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose A antisymétrique ($A^T = -A$) et n impair. Montrer que $\det A = 0$.

2. Vérifier ce résultat par un calcul direct pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que si n est impair, il n'existe aucune matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Donner un exemple pour $n = 2$.

4. Montrer qu'une matrice nilpotente ($A^p = 0$ pour un entier $p \geq 1$) a un déterminant nul.

5. Montrer que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice 10 : Déterminant de quelques endomorphismes

Calculer le déterminant de chacun des endomorphismes suivants et dire s'il est bijectif.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. $t : M \to M^T$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. $v : P \to P + P'$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. $w : P \to P(X+1)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$; on donnera sa matrice dans la base $(1, X, X^2)$.
4. La symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à un plan F, parallèlement à une droite G supplémentaire, puis la projection p sur F parallèlement à G.

Exercice 11 : Inverse par la comatrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det A$.
2. Calculer les neuf cofacteurs de A et écrire $\mathrm{com}(A)$.
3. En déduire A^{-1} et vérifier que $A\,A^{-1} = I_3$.

Exercice 12 : Système de Cramer à paramètre

Pour $m \in \mathbb{R}$, on étudie le système $mx + y = 2,\ x + my = 2$.

1. Pour quelles valeurs de m est-ce un système de Cramer ? Donner alors la solution.
2. Résoudre le système dans les cas restants.
3. Interpréter géométriquement les trois situations à l'aide des deux droites d'équations $mx + y = 2$ et $x + my = 2$.

Exercice 13 : Un déterminant tridiagonal

Pour $n \geq 1$, on note D_n le déterminant de taille n dont les coefficients diagonaux valent 2, ceux situés juste au-dessus et juste au-dessous de la diagonale valent -1, et tous les autres valent 0.

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. Montrer que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ pour $n \geq 3$, puis en déduire D_n.
3. On note Δ_n le déterminant tridiagonal de taille n de diagonale 1, de sur-diagonale 1 et de sous-diagonale -1. Établir une relation de récurrence et exprimer Δ_n à l'aide de la suite de Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Exercice 14 : Déterminant de Vandermonde numérique

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ de deux façons : par opérations élémentaires, puis en reconnaissant un déterminant de Vandermonde.
2. Pour $a, b, c \in \mathbb{K}$, montrer directement, par opérations sur les colonnes, que $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.
3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$.

Exercice 15 : Matrice à diagonale constante

Soit $n \geq 2$ et $a, b \in \mathbb{K}$. On note $A_n(a, b)$ la matrice de taille n dont les coefficients diagonaux valent a et tous les autres valent b.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Montrer que $\det A_n(a,b) = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$.
2. Retrouver le résultat pour $n=4$, $a=2$, $b=1$.
3. Soit J_n la matrice dont tous les coefficients valent 1. Déterminer les réels λ pour lesquels $J_n - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Exercice 16 : Matrices entières inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une matrice carrée à coefficients entiers.

1. Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que si A est inversible et $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A \in \{-1,1\}$.
3. Réciproquement, montrer que si $\det A = \pm 1$, alors A est inversible et A^{-1} est à coefficients entiers.
4. Appliquer aux matrices $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, en calculant leurs inverses.

Exercice 17 : Signature du retournement et matrice anti-diagonale

Pour $n \geq 2$, on note $\omega \in S_n$ la permutation définie par $\omega(i) = n+1-i$.

1. Compter les inversions de ω et en déduire $\varepsilon(\omega) = (-1)^{n(n-1)/2}$.
2. Écrire ω comme produit de $\lfloor n/2 \rfloor$ transpositions à supports disjoints. En déduire une seconde expression de $\varepsilon(\omega)$ et vérifier la cohérence pour $n = 2,3,4,5$.
3. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant de la matrice dont le coefficient $(i, n+1-i)$ vaut a_i pour tout i, tous les autres étant nuls.

Exercice 18 : Comatrice, déterminant et rang

Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On admet qu'une matrice de rang $r \geq 1$ possède une sous-matrice carrée de taille r inversible.

1. On suppose A inversible. Montrer que $\det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}$ et que $\operatorname{com}(A) = \det(A)\,(A^{-1})^T$.
2. Montrer que si $\operatorname{rg} A \leq n-2$, alors $\operatorname{com}(A) = 0$.
3. On suppose $\operatorname{rg} A = n-1$. Montrer que $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A) = 1$.
4. Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ en calculant $\operatorname{com}(A)$.
5. Pour $n = 2$, exprimer $\operatorname{com}(\operatorname{com} A)$ en fonction de A.

Exercice 19 : Déterminant triangulaire par blocs

Soient $p, q \geq 1$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\det\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B$ et $\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det A$.
2. Vérifier que $M = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ et en déduire $\det M = \det A \det B$.
3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

4. Montrer par un contre-exemple qu'en général
$$\det\left([\text{ray?}]\begin{matrix}A & B\\ C & D\end{matrix},\right) \neq \det A \det D - \det B \det C\ .$$

Exercice 20 : Problème : Vandermonde, interpolation et exponentielles

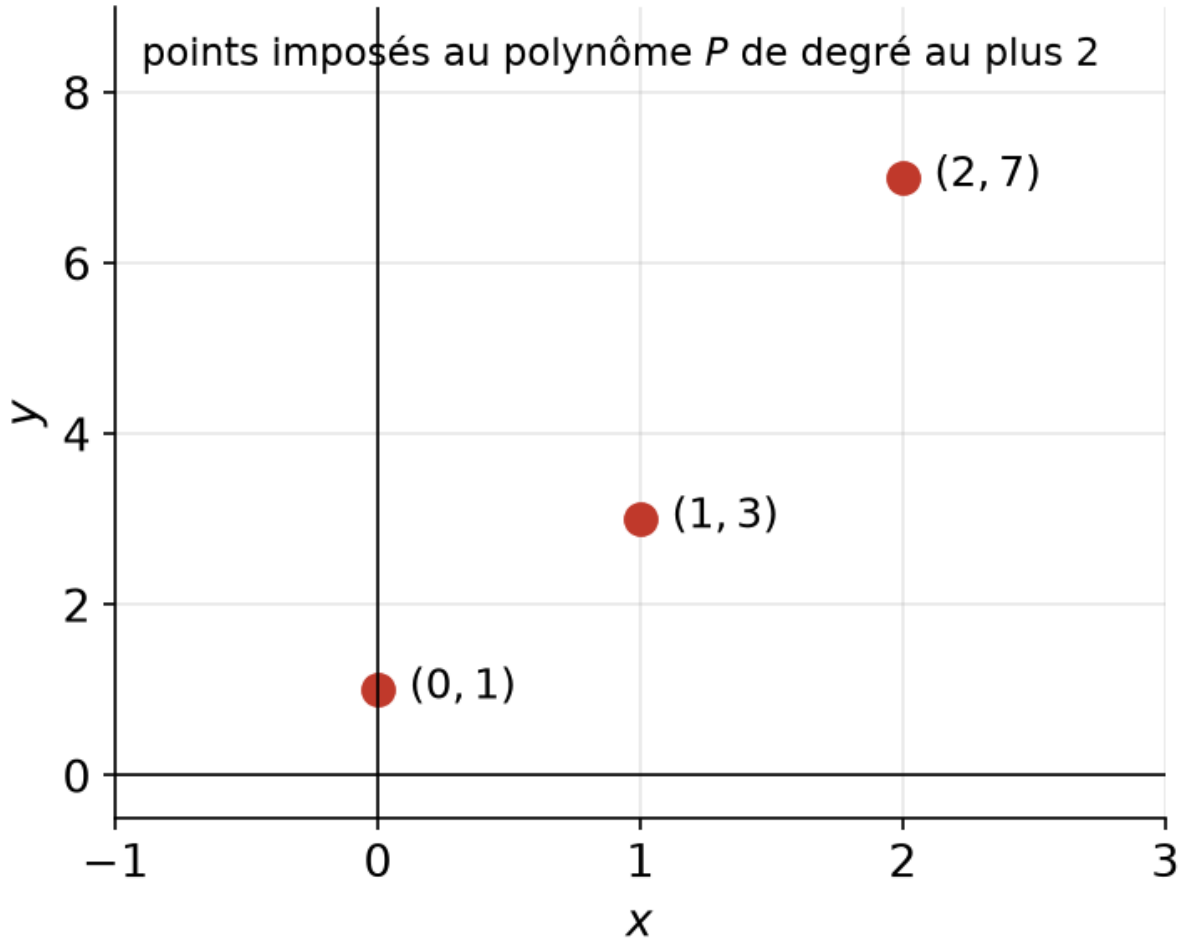
Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$, on note $V(a_1, \ldots, a_n) = \det(a_i^{j-1})_{1 \leq i,\, j \leq n}$.

Partie A : une autre preuve de la formule. On suppose $a_1, \ldots, a_{n-1}$ deux à deux distincts et, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$.

1. Que vaut $V(a_1, \ldots, a_n)$ si deux des a_i sont égaux ?
2. En développant selon la dernière ligne, montrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$, de coefficient en x^{n-1} égal à $V(a_1, \ldots, a_{n-1})$.
3. Déterminer $n-1$ racines de P, puis en déduire que
$$P(x) = V(a_1, \ldots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)\ .$$
4. En déduire par récurrence que $V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$, puis que
$$V(1, 2, \ldots, n) = \prod_{k=1}^{n-1} k!\ .$$

Partie B : interpolation. Soient $x_0, \ldots, x_d$ des réels deux à deux distincts et $y_0, \ldots, y_d$ des réels quelconques.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $P(x_k) = y_k$ pour tout k.
2. Déterminer le polynôme P de degré au plus 2 qui passe par les points $(0, 1)$, $(1, 3)$ et $(2, 7)$ représentés ci-dessous.



Partie C : indépendance des exponentielles. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts et $f_k : x \to e^{\lambda_k x}$.

1. On suppose que $\sum_{k=1}^{n} c_k f_k = 0$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant j fois puis en évaluant en 0, écrire un système linéaire vérifié par $(c_1, \ldots, c_n)$.
2. En déduire que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : déterminants, cours de maths en L1
- Les solutions : corrigé des exercices sur déterminants
- À maîtriser avant : Matrice d'une application linéaire et changement de base
- Chapitre précédent : Matrice d'une application linéaire et changement de base
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L1 et la licence de maths de L1 à L3