

Déterminants

I. Le groupe symétrique et la signature

Le déterminant repose sur un objet combinatoire : les permutations. Nous commençons donc par elles. Dans tout le chapitre, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Permutations et transpositions

Définition :

On appelle **permutation** de $\{1, \dots, n\}$ toute bijection de cet ensemble dans lui-même. L'ensemble de ces permutations, muni de la composition, est un groupe noté S_n : c'est le **groupe symétrique**. Il possède $n!$ éléments et n'est pas commutatif dès que $n \geq 3$.

Parmi les permutations, certaines sont particulièrement simples. Elles servent de briques élémentaires.

Définition :

Soit $i \neq j$ dans $\{1, \dots, n\}$. La **transposition** $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ échange i et j et fixe tous les autres éléments. Plus généralement, si $a_1, \dots, a_p$ sont distincts, le **cycle** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ envoie a_1 sur a_2 , a_2 sur a_3 , et ainsi de suite jusqu'à a_p , qui est envoyé sur a_1 . Les autres éléments sont fixes. L'entier p est la longueur du cycle.

Théorème :

Toute permutation de S_n est un produit (une composée) de transpositions. En particulier, le cycle

$(a_1, a_2, \dots, a_p)$ s'écrit $(a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_{p-1}, a_p)$, la composition se lisant de droite à gauche.

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 1$, l'identité est le produit vide. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$ et prenons $\sigma \in S_n$. Si $\sigma(n) = n$, alors σ induit une permutation de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, et l'hypothèse de récurrence conclut. Sinon, posons $\tau = (n, \sigma(n))$. Ainsi $\tau \circ \sigma$ fixe n , donc c'est un produit de transpositions. Enfin $\sigma = \tau \circ (\tau \circ \sigma)$, car $\tau \circ \tau = \text{id}$. La formule pour un cycle se vérifie en suivant l'image de chaque a_k .

2. Signature d'une permutation

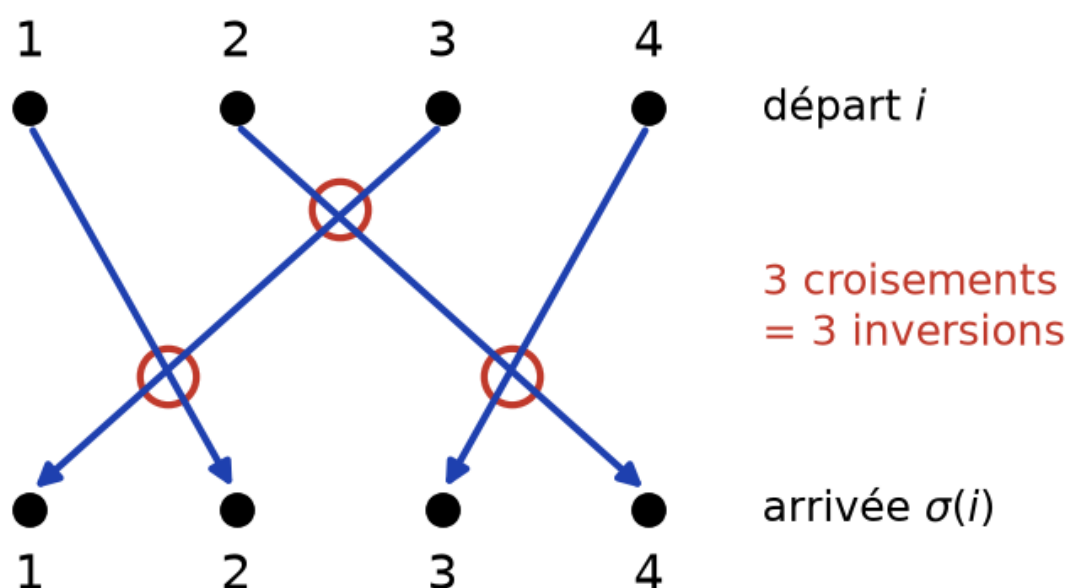
La décomposition en transpositions n'est pas unique. En revanche, la parité du nombre de transpositions ne dépend que de la permutation. C'est l'objet de la signature.

Définition :

Une **inversion** de $\sigma \in S_n$ est un couple (i, j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Si $N(\sigma)$ désigne le nombre d'inversions, la **signature** de σ est $\epsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$. On dit que σ est paire si $\epsilon(\sigma) = 1$, impaire sinon.

Pour compter les inversions, un dessin aide beaucoup. On relie chaque i de la ligne du haut à $\sigma(i)$ sur la ligne du bas. Chaque croisement de deux flèches correspond alors à une inversion, comme le

montre la figure ci-dessous pour σ définie par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 3$.



Exemple :

Pour cette permutation, les inversions sont $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 4)$. Donc $N(\sigma) = 3$ et $\varepsilon(\sigma) = -1$. D'ailleurs, σ est le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ de longueur 4, produit de trois transpositions.

Théorème :

Pour tous $\sigma, \sigma' \in S_n$, on a $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma')$. Autrement dit, ε est un morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$. De plus, toute transposition a pour signature -1 , et un cycle de longueur p a pour signature $(-1)^{p-1}$.

Démonstration :

D'abord, on vérifie que $\varepsilon(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$. En effet, σ permute les paires $\{i, j\}$, donc le produit des numérateurs vaut, au signe près, celui des dénominateurs. De plus, un facteur est négatif exactement pour une inversion.

Ensuite, on écrit $\varepsilon(\sigma \circ \sigma')$ comme le produit de $\prod_{i < j} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)}$ et de $\varepsilon(\sigma')$. Le quotient $\frac{\sigma(b) - \sigma(a)}{b - a}$ est symétrique en a et b . Par conséquent, lorsque $\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)\}$ parcourt toutes les paires, le premier produit vaut $\varepsilon(\sigma)$.

Enfin, pour $\tau = (i, j)$ avec $i < j$, les inversions sont (i, j) , les (i, k) et les (k, j) avec $i < k < j$. Il y en a $2(j - i - 1) + 1$, nombre impair. La formule pour un cycle découle alors de sa décomposition en $p - 1$ transpositions.

Méthode :

Pour calculer la signature d'une permutation, on la décompose en cycles à supports disjoints en suivant les images successives de chaque élément. On multiplie ensuite les signatures $(-1)^{p-1}$ des cycles. Le comptage des inversions reste une vérification commode pour les petites valeurs de n .

II. Formes n -linéaires alternées

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Nous cherchons une fonction de n vecteurs qui mesure un « volume orienté ». Elle doit être linéaire en chaque vecteur et s'annuler sur une famille liée. Ces exigences conduisent à la notion suivante.

1. Définitions et premières propriétés

Définition :

Une application $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une **forme n -linéaire** si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, les autres étant fixées. Elle est **alternée** si $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès que deux des vecteurs x_i sont égaux.

Propriété :

Soit φ une forme n -linéaire alternée sur E .

- Elle est antisymétrique : échanger deux vecteurs change φ en son opposé.
- Pour toute $\sigma \in S_n$, $\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
- Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, alors $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$.
- La valeur de φ ne change pas si l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

Démonstration :

Développons $\varphi(\dots, x + y, \dots, x + y, \dots) = 0$ par bilinéarité. Les termes en (x, x) et (y, y) sont nuls, donc $\varphi(\dots, x, \dots, y, \dots) = -\varphi(\dots, y, \dots, x, \dots)$. Ensuite, on écrit σ comme un produit de transpositions : chacune multiplie la valeur par -1 , d'où le facteur $\varepsilon(\sigma)$.

Si la famille est liée, un vecteur, disons x_k , est combinaison linéaire des autres. En développant par linéarité en la k -ième place, chaque terme contient deux vecteurs égaux, donc il est nul. Le dernier point s'obtient de la même façon.

2. Le théorème fondamental

Le résultat central du chapitre affirme que ces formes sont toutes proportionnelles. C'est lui qui permet de définir le déterminant sans aucune recette de calcul.

Théorème :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Il existe une unique forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ telle que $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. Si $x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i$ pour tout j , elle est donnée par la formule

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j)j}.$$

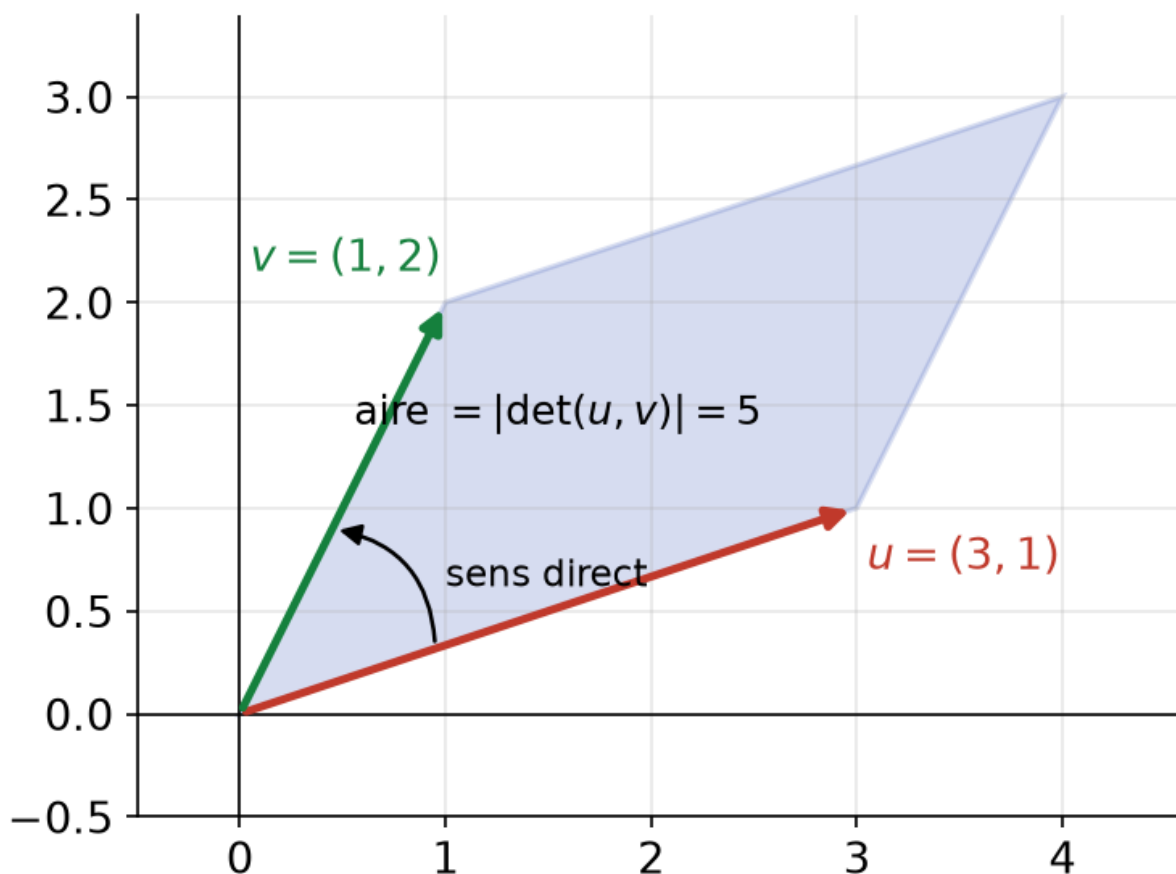
De plus, toute forme n -linéaire alternée φ sur E vérifie $\varphi = \varphi(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$. L'espace de ces formes est donc une droite vectorielle.

Démonstration :

Analyse. Soit φ une forme n -linéaire alternée. Par linéarité en chaque variable, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est la somme, sur toutes les applications f de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, des termes $x_{f(1)1} \cdots x_{f(n)n} \varphi(e_{f(1)}, \dots, e_{f(n)})$. Si f n'est pas injective, deux vecteurs sont égaux et le terme est nul. Il reste donc les permutations σ , pour lesquelles $\varphi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \varphi(e_1, \dots, e_n)$. Cela donne la formule annoncée et l'unicité.

Synthèse. La formule définit bien une forme n -linéaire, car chaque produit contient exactement une coordonnée de chaque x_j . Elle vaut 1 sur $\mathcal{B}$, car seul $\sigma = \text{id}$ donne un terme non nul. Enfin, supposons $x_k = x_l$ avec $k \neq l$ et notons $\tau = (k, l)$. L'application $\sigma \rightarrow \sigma \circ \tau$ associe à chaque permutation paire une permutation impaire, avec le même produit. Les termes se compensent donc deux à deux, et la forme est alternée.

En dimension 2, la formule donne $\det_{\mathcal{B}}(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Géométriquement, dans le plan muni de sa base canonique, c'est l'aire orientée du parallélogramme construit sur u et v . La figure ci-dessous l'illustre pour $u = (3, 1)$ et $v = (1, 2)$: on trouve $3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$.



Remarque :

Le signe indique l'orientation. Ici $\det(u, v) = 5 > 0$: on passe de u à v en tournant dans le sens direct. En revanche, $\det(v, u) = -5$. En dimension 3, de même, la valeur absolue du déterminant est le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

III. Déterminants d'une famille, d'un endomorphisme, d'une matrice

1. Déterminant d'une famille de vecteurs

Le nombre $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant de la famille dans la base $\mathcal{B}$. Il dépend de la base, mais de façon très contrôlée.

Proposition :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.
Par ailleurs, une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Démonstration :

La forme $\det_{\mathcal{B}'}$ est n -linéaire alternée, donc le théorème fondamental donne la première égalité. En l'appliquant à $\mathcal{B}'$, on obtient $1 = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Si la famille est liée, son déterminant est nul. Si c'est une base $\mathcal{B}'$, le produit précédent vaut 1, donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $(2, 3)$ et $(4, 6)$ ont pour déterminant $2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$: ils sont colinéaires. En revanche, $(1, 2)$ et $(3, 5)$ donnent $5 - 6 = -1$, donc ils forment une base.

2. Déterminant d'un endomorphisme

Soit u un endomorphisme de E . L'application $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$ est encore n -linéaire alternée. Elle est donc proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$, et le coefficient ne dépend pas de la base choisie.

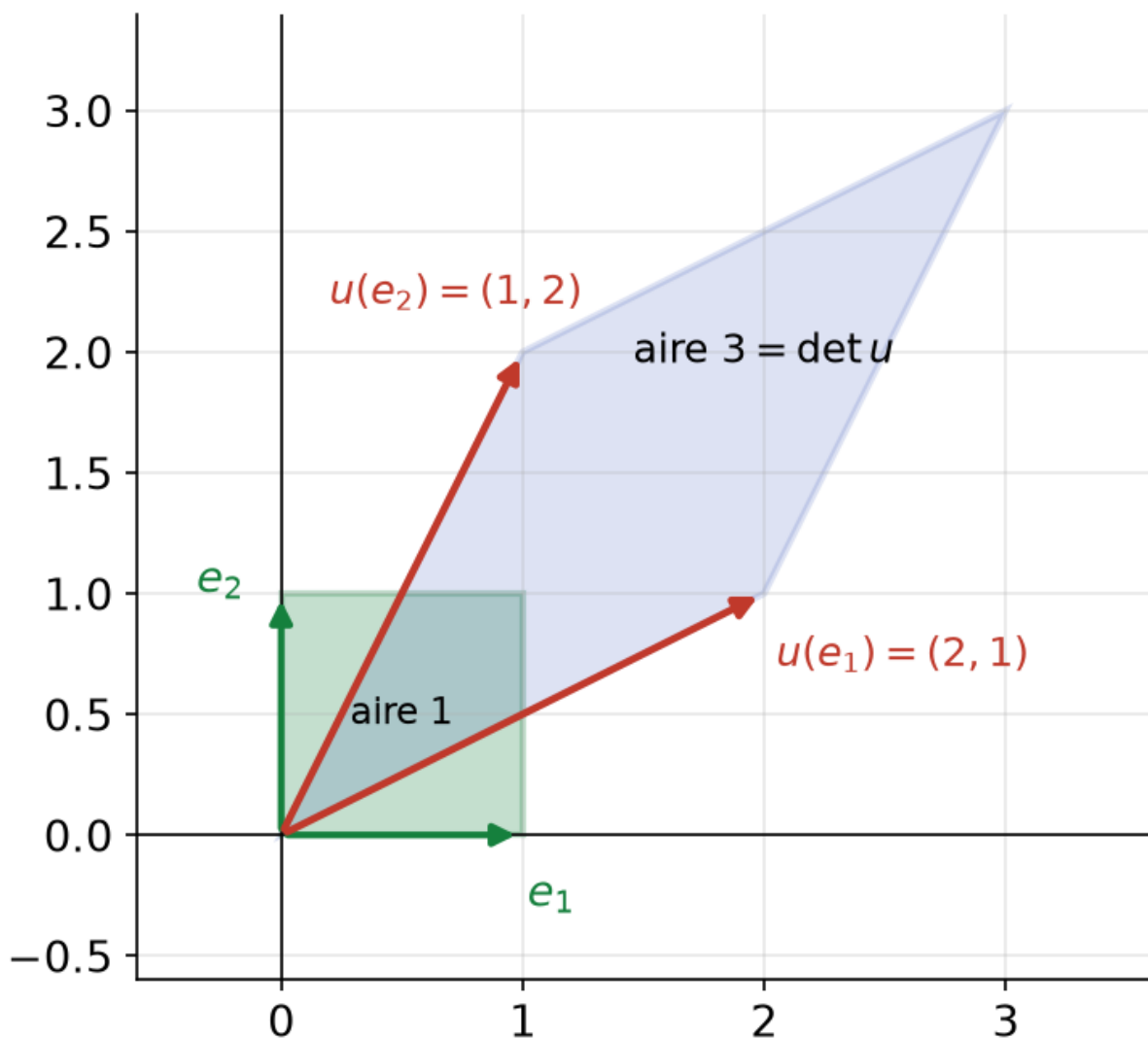
Définition :

Le **déterminant de** u est l'unique scalaire $\det u$ tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ et tous vecteurs

$$x_1, \dots, x_n,$$

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det u \cdot \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

En particulier, $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. Dans le plan, $\det u$ est donc le facteur par lequel u multiplie les aires orientées. Comme le montre la figure ci-dessous, l'endomorphisme de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ transforme le carré unité en un parallélogramme d'aire 3.



Théorème :

Soient u et v deux endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\text{id}_E) = 1$ et $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$.
- $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$.
- u est bijectif si et seulement si $\det u \neq 0$, et alors $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$.

Démonstration :

Pour le produit, on applique deux fois la définition :

$\det_B(u(v(e_1)), \dots) = \det u \cdot \det_B(v(e_1), \dots) = \det u \cdot \det v$. Ensuite, u est bijectif si et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base. D'après la proposition précédente, cela équivaut à $\det u \neq 0$. Enfin, $\det u \cdot \det(u^{-1}) = \det(\text{id}_E) = 1$.

3. Déterminant d'une matrice

Définition :

Le déterminant de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant de ses colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j) j}.$$

On le note aussi en remplaçant les parenthèses de la matrice par des barres verticales.

Pour $n = 2$, on retrouve $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Pour $n = 3$, la somme comporte six termes, trois positifs et trois négatifs. Au-delà, la formule devient vite inutilisable : S_n compte $n!$ éléments. Elle sert donc surtout aux démonstrations.

Théorème :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- $\det(A^T) = \det A$.
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.
- Si A est la matrice de u dans une base quelconque, alors $\det A = \det u$.

Démonstration :

Le déterminant de A est celui de l'endomorphisme canoniquement associé. Les deux premiers points et le troisième viennent donc du théorème sur les endomorphismes. Pour la transposée, on

écrit $\det(A^T) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_j a_{j, \sigma(j)}$. On pose $i = \sigma(j)$ dans le produit : il devient

$\prod_i a_{\sigma^{-1}(i), i}$. Or $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, et $\sigma \rightarrow \sigma^{-1}$ est une bijection de S_n . Par conséquent, la somme vaut $\det A$.

Attention :

Le déterminant n'est pas linéaire : en général $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. Par exemple, $\det(I_2 + I_2) = 4$, alors que $\det I_2 + \det I_2 = 2$.

IV. Calcul pratique d'un déterminant

Grâce à l'égalité $\det(A^T) = \det A$, tout ce qui vaut pour les colonnes vaut aussi pour les lignes. On dispose alors de deux outils : les opérations élémentaires et le développement.

1. Opérations élémentaires et matrices triangulaires

Propriété :

- Échanger deux lignes (ou deux colonnes) change le déterminant en son opposé.
- Multiplier une ligne par λ multiplie le déterminant par λ .
- Ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes ne change pas le déterminant.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Démonstration :

Les trois premiers points traduisent le caractère n -linéaire alterné. Pour une matrice triangulaire supérieure, $a_{\sigma(j)j} = 0$ dès que $\sigma(j) > j$. Or la seule permutation vérifiant $\sigma(j) \leq j$ pour tout j est l'identité. Il ne reste donc que le produit diagonal.

Méthode :

Pour calculer un déterminant par la méthode du pivot, on fait apparaître des zéros sous la diagonale par des opérations $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$, qui ne changent rien. On note chaque échange de lignes (facteur -1) et chaque facteur mis en évidence. Enfin, on multiplie les coefficients diagonaux. Il est souvent utile d'ajouter d'abord toutes les colonnes à la première.

Exemple :

Avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

la dernière étape étant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

2. Développement selon une ligne ou une colonne

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. Le **mineur** Δ_{ij} est le déterminant de la matrice A_{ij} obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j . Le **cofacteur** de a_{ij} est $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Le signe $(-1)^{i+j}$ se répartit en damier, en commençant par un signe plus en haut à gauche. La figure ci-dessous le rappelle pour $n = 4$.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
$i = 1$	+	-	+	-
$i = 2$	-	+	-	+
$i = 3$	+	-	+	-
$i = 4$	-	+	-	+

signe du cofacteur : $(-1)^{i+j}$

Théorème :

Pour tout indice de colonne j et tout indice de ligne i ,

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \text{ et } \det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}.$$

La première formule est le développement selon la colonne j , la seconde selon la ligne i .

Démonstration :

La colonne j vaut $\sum_i a_{ij} e_i$. Par linéarité, $\det A = \sum_i a_{ij} D_{ij}$, où D_{ij} est le déterminant de A dont la colonne j est remplacée par e_i . Amenons cette colonne en première position par $j - 1$ échanges de colonnes voisines. De même, amenons la ligne i en tête par $i - 1$ échanges. On obtient un facteur $(-1)^{i+j}$ et une matrice de première colonne e_1 , qui contient A_{ij} en bas à droite.

Dans la formule du déterminant de cette matrice, seules comptent les permutations qui fixent 1. Elles s'identifient à S_{n-1} , avec la même signature. Ainsi $D_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} = C_{ij}$. Le développement selon une ligne s'en déduit par transposition.

Exemple :

On développe selon la deuxième colonne, qui contient deux zéros :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 5 = 20.$$

3. Deux déterminants remarquables

Certains déterminants dépendent de n . On les calcule alors par récurrence, en combinant les deux outils précédents.

Méthode :

Pour un **déterminant tridiagonal** D_n , de diagonale a , de sur-diagonale b et de sous-diagonale c , on développe selon la première ligne, puis on développe le second mineur selon sa première colonne. On obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre 2

$$D_n = a D_{n-1} - bc D_{n-2}.$$

On calcule alors D_1 et D_2 , puis on résout la récurrence avec l'équation caractéristique $r^2 = ar - bc$.

Définition :

Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, le **déterminant de Vandermonde** est $V(a_1, \dots, a_n) = \det(a_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$. Sa ligne i est $(1, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{n-1})$.

Théorème :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

En particulier, $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.

Démonstration :

On effectue $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$ pour j allant de n à 2. Cela ne change pas le déterminant. Le coefficient de la ligne i et de la colonne $j \geq 2$ devient $a_i^{j-2}(a_i - a_1)$, et la première ligne devient $(1, 0, \dots, 0)$. On développe alors selon cette ligne. Puis on met $a_i - a_1$ en facteur dans chaque ligne $i \geq 2$. Il vient

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=2}^n (a_i - a_1) \cdot V(a_2, \dots, a_n),$$

et une récurrence sur n conclut, puisque $V(a) = 1$.

V. Comatrice et formules de Cramer

1. Comatrice et formule de l'inverse

Définition :

La **comatrice** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\text{com}(A) = (C_{ij})$ de ses cofacteurs.

Théorème :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T A = \det(A) I_n.$$

Par conséquent, si A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T$.

Démonstration :

Le coefficient (i, k) de $A \text{com}(A)^T$ vaut $\sum_j a_{ij} C_{kj}$. Si $i = k$, c'est le développement de $\det A$ selon la ligne i . Si $i \neq k$, c'est le développement selon la ligne k de la matrice obtenue en remplaçant la ligne k de A par sa ligne i . Cette matrice a deux lignes égales, donc son déterminant est nul. L'autre produit se traite de même avec les colonnes.

Exemple :

Pour $n = 2$, on obtient la formule bien connue : si $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Formules de Cramer

Un système linéaire de n équations à n inconnues, de matrice A inversible, est appelé **système de Cramer**. Il admet une unique solution, et le déterminant permet de l'exprimer directement.

Théorème :

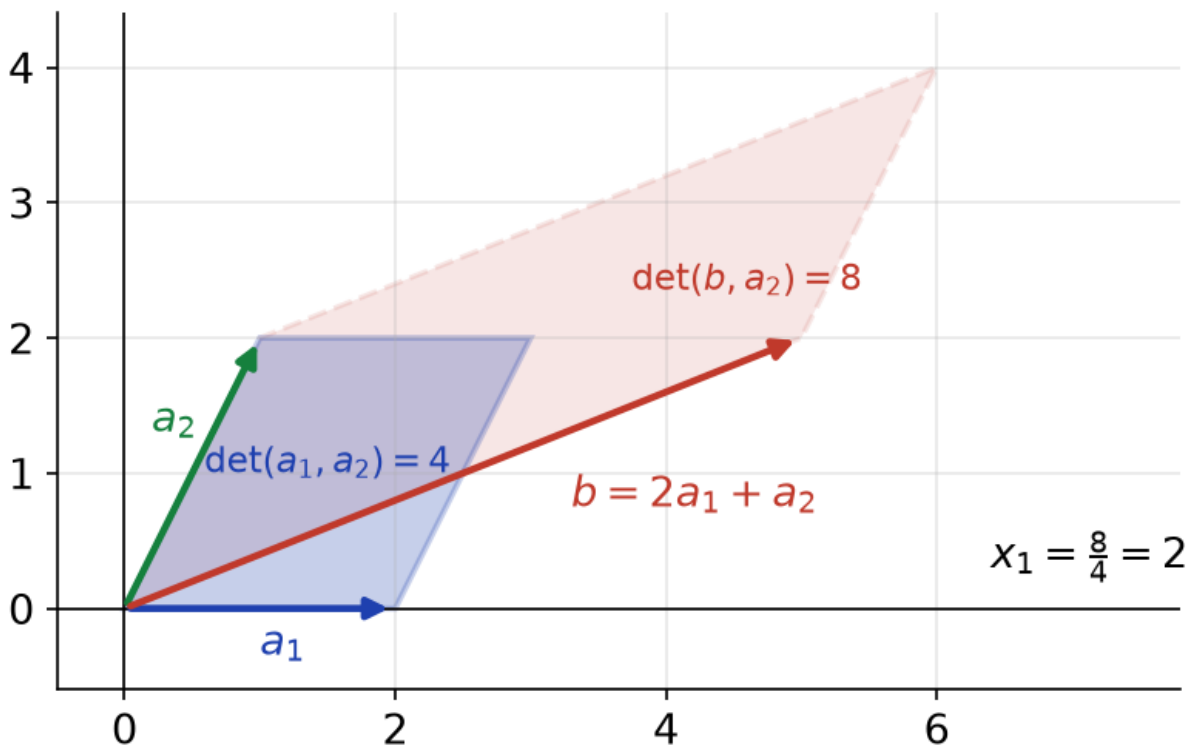
Soit A inversible, de colonnes $C_1, \dots, C_n$, et $B \in \mathbb{K}^n$. L'unique solution de $AX = B$ est donnée par

$$x_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A} \text{ pour } 1 \leq j \leq n.$$

Démonstration :

L'égalité $AX = B$ s'écrit $B = \sum_k x_k C_k$. On remplace C_j par cette expression dans le numérateur. Par linéarité, on obtient $\sum_k x_k \det(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n)$, où C_k occupe la place j . Pour $k \neq j$, la colonne C_k apparaît deux fois, donc le terme est nul. Il reste $x_j \det A$.

Géométriquement, en dimension 2, remplacer a_1 par $b = x_1 a_1 + x_2 a_2$ multiplie l'aire orientée par x_1 . La figure ci-dessous le montre avec $a_1 = (2, 0)$, $a_2 = (1, 2)$ et $b = (5, 2)$: les aires valent 4 et 8, donc $x_1 = 2$.



Exemple :

Réolvons $2x + y = 5$ et $x + 3y = 5$. Le déterminant du système vaut $6 - 1 = 5$, donc c'est un système de Cramer. Ensuite, $x = \frac{5 \times 3 - 1 \times 5}{5} = 2$ et $y = \frac{2 \times 5 - 5 \times 1}{5} = 1$.

Remarque :

Les formules de Cramer ont surtout un intérêt théorique. Par exemple, elles montrent que la solution dépend continûment des coefficients. En pratique, dès que $n \geq 3$, la méthode du pivot demande beaucoup moins de calculs.

Ce qu'il faut retenir

- Toute permutation est un produit de transpositions, et la signature ε est un morphisme de S_n

dans $\{-1, 1\}$.

- Un cycle de longueur p a pour signature $(-1)^{p-1}$; une transposition a pour signature -1 .
- En dimension n , les formes n -linéaires alternées forment une droite, engendrée par $\det_B$.
- Une famille de n vecteurs est une base si et seulement si son déterminant dans une base est non nul.
- $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(A^T) = \det A$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
- On calcule par opérations élémentaires (pivot) ou par développement selon une ligne ou une colonne, avec les signes $(-1)^{i+j}$.
- Un déterminant tridiagonal vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 ; le Vandermonde vaut $\prod_{i < j} (a_j - a_i)$.
- $A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n$, d'où $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{com}(A)^T$, puis les formules de Cramer.

Questions fréquentes sur déterminants

Pourquoi le déterminant d'une matrice non carrée n'existe-t-il pas ?

Le déterminant est défini à partir des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n , évaluées sur n vecteurs. Une matrice à n lignes et p colonnes fournit p vecteurs de dimension n : il faut $p = n$ pour que la construction ait un sens. D'ailleurs, seule une matrice carrée peut être inversible, ce que le déterminant sert à tester.

Faut-il calculer un déterminant avec la règle de Sarrus ou en développant ?

La règle de Sarrus ne vaut que pour les matrices de taille 3 et ne se généralise pas. Au-delà, on combine les opérations élémentaires, qui créent des zéros, et le développement selon la ligne ou la colonne qui en contient le plus. Pour une matrice de grande taille, la méthode du pivot est de loin la plus rapide.

Est-ce que $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?

Non, le déterminant n'est pas linéaire en la matrice : il est seulement linéaire par rapport à chaque colonne séparément. Par exemple, $\det(2I_2) = 4$ alors que $\det(I_2) + \det(I_2) = 2$. En revanche, il est multiplicatif : $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

À quoi sert la signature d'une permutation dans ce chapitre ?

Elle donne le signe de chaque terme dans la formule générale du déterminant. Elle explique aussi pourquoi échanger deux colonnes change le signe, puisqu'une transposition a pour signature -1. Enfin, elle permet de calculer directement le déterminant d'une matrice de permutation ou d'une matrice anti-diagonale.

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur déterminants](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur déterminants](#)
- À maîtriser avant : [Matrice d'une application linéaire et changement de base](#)
- Chapitre précédent : [Matrice d'une application linéaire et changement de base](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)