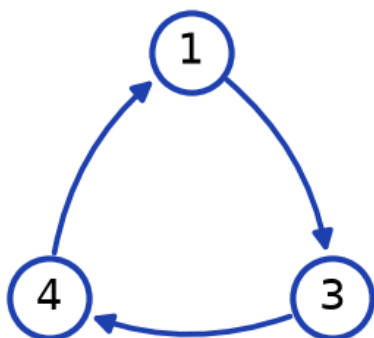


Déterminants

Corrigé de l'exercice 1 : Signature de permutations

1. On suit les images successives. D'abord $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, ce qui donne le cycle $(1, 3, 4)$. Ensuite $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, ce qui donne la transposition $(2, 5)$. Ainsi $\sigma = (1, 3, 4)(2, 5)$, et ces deux cycles commutent car leurs supports sont disjoints. De plus, $(1, 3, 4) = (1, 3)(3, 4)$. Donc $\sigma = (1, 3)(3, 4)(2, 5)$ est un produit de trois transpositions. Par conséquent, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$. La figure ci-dessous représente cette décomposition.



cycle de longueur 3 : signature +1 transposition : signature -1

2. La suite des images est $(3, 5, 4, 1, 2)$. On compte, pour chaque terme, les termes plus petits situés après lui. Le 3 précède 1 et 2 : deux inversions. Le 5 précède 4, 1 et 2 : trois inversions. Le 4 précède 1 et 2 : deux inversions. Enfin, le 1 précède 2 : aucune inversion. Au total, $N(\sigma) = 7$, nombre impair. On retrouve donc $\varepsilon(\sigma) = -1$.
3. On applique la composée de droite à gauche. L'image de 1 : $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ le fixent, puis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ l'envoie sur 2. L'image de 2 : il est fixé deux fois, puis $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ l'envoie sur 3, que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fixe. De même, 3 est envoyé sur 4 et 4 sur 5. Enfin, 5 devient successivement 4, 3, 2 puis 1. On retrouve bien τ . C'est un produit de quatre transpositions, donc $\varepsilon(\tau) = 1$.
4. On calcule $\sigma \circ \tau(k) = \sigma(\tau(k))$: $1 \rightarrow \sigma(2) = 5$, $2 \rightarrow \sigma(3) = 4$, $3 \rightarrow \sigma(4) = 1$, $4 \rightarrow \sigma(5) = 2$ et $5 \rightarrow \sigma(1) = 3$. En suivant les orbites, $1 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ et $2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$. Donc $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ & 2 & 4 \end{pmatrix}$, de signature $(+1)(-1) = -1$. On a bien $\varepsilon(\sigma) \varepsilon(\tau) = (-1) \times 1 = -1$.
5. La signature est un morphisme. Ainsi $\varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\text{id}) = 1$, donc $\varepsilon(\sigma^{-1}) = -1$. De même, $\varepsilon(\sigma^2) = (-1)^2 = 1$.

Point de méthode : la décomposition en cycles disjoints est la voie la plus rapide ; le comptage des inversions sert de contrôle.

Corrigé de l'exercice 2 : Déterminants d'ordre 2 et 3

1. D'abord, $D_1 = 2 \times 7 - 5 \times 3 = 14 - 15$, donc $D_1 = -1$.

2. On développe D_2 selon la première ligne :

$$D_2 = 1 \times (5 \times 10 - 6 \times 8) - 2 \times (4 \times 10 - 6 \times 7) + 3 \times (4 \times 8 - 5 \times 7).$$

Cela donne $2 - 2 \times (-2) + 3 \times (-3) = 2 + 4 - 9$, donc $D_2 = -3$.

3. On développe D_3 selon la première ligne, qui contient un zéro :

$$D_3 = 2 \times (3 \times 4 - 1 \times 2) - (-1) \times (1 \times 4 - 1 \times 0) = 2 \times 10 + 4.$$

Ainsi $D_3 = 24$.

4. Enfin, $D_4 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$, donc $D_4 = 1$. C'est la matrice d'une rotation, qui conserve les aires.

Les quatre déterminants sont non nuls. Par conséquent, **les quatre matrices sont inversibles**.

Corrigé de l'exercice 3 : Calcul par opérations élémentaires

1. Pour M , on effectue d'abord $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. Chaque opération ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne encore intacte, donc le déterminant ne change pas. On obtient

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure, donc $M = 1$.

2. Pour P , on effectue $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$, dans cet ordre. Les nouvelles lignes sont $(-1, 1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$ et $(-1, -1, -1, 1)$, et $L_4 = (3, 2, 1, 0)$ est inchangée. Ensuite, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1$:

$$P = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

On développe selon la première colonne. Il reste -1 fois un déterminant triangulaire inférieur de diagonale -2 , -2 et 3 . Ainsi $P = -1 \times (-2) \times (-2) \times 3$, c'est-à-dire $P = -12$.

Point de méthode : soustraire des lignes voisines fait apparaître des lignes presque constantes, beaucoup plus faciles à traiter.

Corrigé de l'exercice 4 : Développement selon une ligne ou une colonne

1. La troisième ligne de Δ ne contient qu'un coefficient non nul, $a_{33} = 5$, de signe $(-1)^{3+3} = 1$. En développant selon cette ligne, puis le mineur selon sa première ligne, on obtient

$$\Delta = 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4.$$

Donc $\Delta = 20$.

2. On développe selon la première ligne :

$$f(x) = x \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 1) - x.$$

Ainsi $f(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$.

3. La matrice est inversible si et seulement si $f(x) \neq 0$. Donc elle est **inversible si et seulement si** $x \notin \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$.

Corrigé de l'exercice 5 : Base ou non selon un paramètre

1. La matrice des coordonnées a pour colonnes u_1 , u_2 et u_3 . Chaque colonne a pour somme $m + 2$. On fait donc $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$, puis on factorise $m + 2$:

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = (m + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, avec $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, la première ligne devient $(1, 0, 0)$. On développe selon cette ligne :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = (m + 2) \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m + 2)(m - 1)(1 - m).$$

Donc $\det(u_1, u_2, u_3) = -(m+2)(m-1)^2$.

2. Une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base si et seulement si son déterminant est non nul.
Par conséquent, (u_1, u_2, u_3) **est une base si et seulement si** $m \notin \{-2, 1\}$.
3. Pour $m = 1$, les trois vecteurs valent $(1, 1, 1)$, donc $u_1 - u_2 = 0$. Pour $m = -2$, on a $u_1 = (1, 1, -2)$, $u_2 = (1, -2, 1)$ et $u_3 = (-2, 1, 1)$. En sommant coordonnée par coordonnée, $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

Corrigé de l'exercice 6 : Résolution d'un système de Cramer

1. On développe le déterminant du système selon la première ligne :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (1 - 2) - 1 \times (-2 - 1) + 1 \times (4 + 1) = -1 + 3 + 5.$$

Ainsi $\det A = 7 \neq 0$. Le système a autant d'équations que d'inconnues et sa matrice est inversible : **c'est un système de Cramer.**

2. On remplace successivement chaque colonne par le second membre $(6, 3, 2)$, puis on développe selon la première ligne.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \times (-1) - 1 \times (-5) + 1 \times 8 = 7.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) - 6 \times (-3) + 1 \times 1 = 14.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-8) - 1 \times 1 + 6 \times 5 = 21.$$

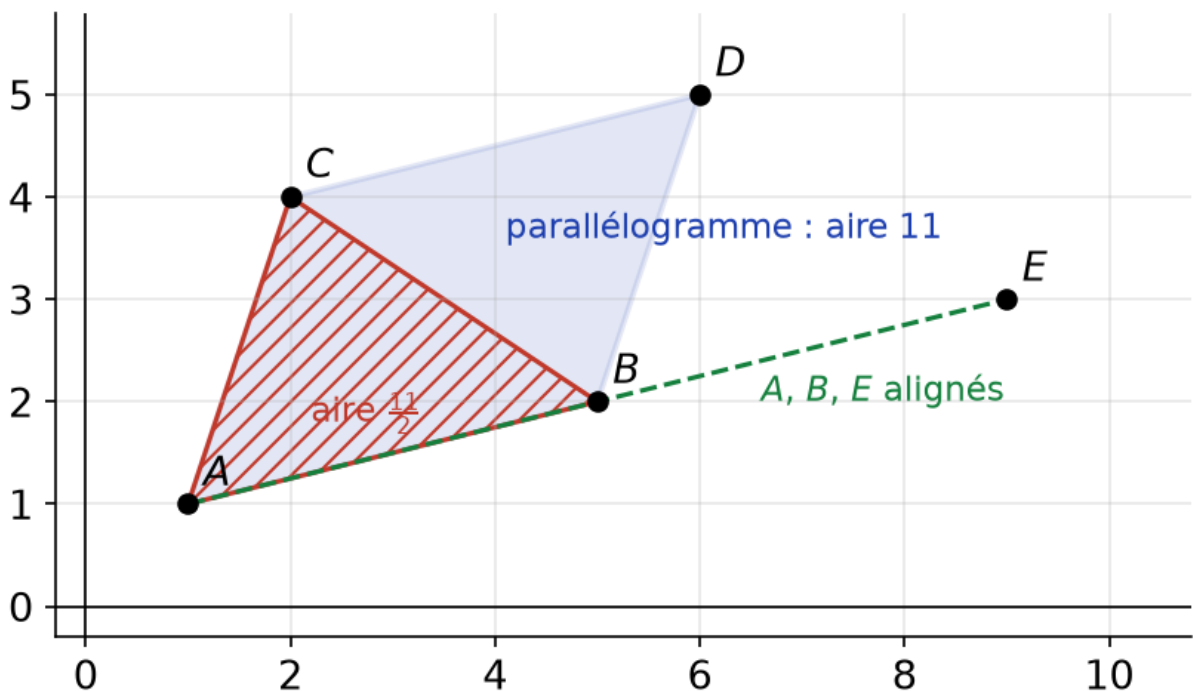
Les formules de Cramer donnent $x = \frac{7}{7}$, $y = \frac{14}{7}$ et $z = \frac{21}{7}$. Donc

$(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Vérification : $1 + 2 + 3 = 6$, $2 - 2 + 3 = 3$ et $1 + 4 - 3 = 2$.

Corrigé de l'exercice 7 : Aire d'un parallélogramme et d'un triangle

1. On a $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ et $\overrightarrow{AC} = (1, 3)$. Donc $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \times 3 - 1 \times 1$, soit $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 11$. Ce nombre est strictement positif, donc **la base est directe**.
2. $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $D = (2 + 4, 4 + 1)$, c'est-à-dire $D(6, 5)$. Son aire est la valeur absolue du déterminant précédent : **l'aire vaut 11**.
3. La diagonale $[BC]$ partage le parallélogramme en deux triangles de même aire. Donc **l'aire du triangle ABC vaut $\frac{11}{2}$** .
4. On a $\overrightarrow{AE} = (8, 2)$, donc $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 4 \times 2 - 1 \times 8 = 0$. Les vecteurs sont colinéaires ; en effet, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$. Par conséquent, **A , B et E sont alignés**.

La figure ci-dessous résume ces résultats : parallélogramme, triangle hachuré et alignement.



Corrigé de l'exercice 8 : Formes bilinéaires alternées du plan

1. Comme φ est alternée, $\varphi(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0$. On développe par bilinéarité :
 $\varphi(e_1, e_1) + \varphi(e_1, e_2) + \varphi(e_2, e_1) + \varphi(e_2, e_2) = 0$. Les termes extrêmes sont nuls, donc
 $\varphi(e_2, e_1) = -\varphi(e_1, e_2)$. Ensuite, on écrit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$.
Par bilinéarité,

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 \varphi(e_1, e_1) + x_1 y_2 \varphi(e_1, e_2) + x_2 y_1 \varphi(e_2, e_1) + x_2 y_2 \varphi(e_2, e_2).$$

Il reste $(x_1 y_2 - x_2 y_1) \varphi(e_1, e_2)$. Donc $\varphi = \varphi(e_1, e_2) \det_B$.

2. D'abord, $f = 2 \det_B$. C'est un multiple d'une forme bilinéaire alternée, donc **f est bilinéaire alternée, égale à $2 \det_B$** . En revanche, g est bilinéaire, mais $g(e_1, e_1) = 1 \neq 0$. Par conséquent, **g n'est pas alternée.**
3. Soit ψ une forme trilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^2$. Par trilinearité, $\psi(x, y, z)$ est une combinaison linéaire des $\psi(e_i, e_j, e_k)$ avec $i, j, k \in \{1, 2\}$. Or trois indices pris dans un ensemble à deux éléments ne peuvent pas être distincts. Chaque terme contient donc deux vecteurs égaux et il est nul. Ainsi $\psi = 0$.

Point de méthode : ce calcul est le cas $n = 2$ de la démonstration générale du cours ; il est bon de savoir le refaire.

Corrigé de l'exercice 9 : Propriétés algébriques du déterminant

1. D'une part, $\det(A^T) = \det A$. D'autre part,
 $\det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, car n est impair. Ainsi
 $\det A = -\det A$, donc $\det A = 0$.

2. On développe selon la première ligne :

$$\det A = 0 \times (0 + 9) - 1 \times (0 - 6) + (-2) \times (3 - 0) = 6 - 6.$$

On trouve bien $\det A = 0$.

3. Supposons $A^2 = -I_n$. Alors $(\det A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n = -1$. C'est impossible pour un réel. Donc **une telle matrice n'existe pas si n est impair**. Pour $n = 2$, en revanche, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient : son carré vaut $-I_2$. C'est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
4. Le déterminant est multiplicatif, donc $(\det A)^p = \det(A^p) = \det(0) = 0$. Par conséquent, $\det A = 0$.
5. Si $B = P^{-1} A P$ avec P inversible, alors
 $\det B = \det(P^{-1}) \det A \det P = \frac{1}{\det P} \det A \det P$. Donc $\det B = \det A$.

Corrigé de l'exercice 10 : Déterminant de quelques endomorphismes

1. Dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$, l'application t fixe E_{11} et E_{22} , et échange E_{12} et E_{21} . Sa matrice s'obtient donc à partir de I_4 en échangeant les colonnes 2 et 3. Ainsi $\det t = -1$ et t est bijective ; d'ailleurs $t \circ t = \text{id}$.
2. Dans la base $(1, X, \dots, X^n)$, on a $v(X^k) = X^k + k X^{k-1}$. La matrice de v est donc triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Par conséquent, $\det v = 1$ et v est bijective.
3. On calcule $w(1) = 1$, $w(X) = 1 + X$ et $w(X^2) = 1 + 2X + X^2$. La matrice de w est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire, donc $\det w = 1$ et w est bijective, de réciproque $P \rightarrow P(X-1)$.

4. Prenons une base (f_1, f_2) de F et un vecteur g dirigeant G . Dans la base (f_1, f_2, g) de $\mathbb{R}^3$, la matrice de s est diagonale, de coefficients 1, 1 et -1. Donc $\det s = -1$ et s est bijective. De même, la matrice de p est diagonale de coefficients 1, 1 et 0. Ainsi $\det p = 0$ et p n'est pas bijective.

Point de méthode : le déterminant d'un endomorphisme se calcule dans la base la plus commode, car il ne dépend pas de la base.

Corrigé de l'exercice 11 : Inverse par la comatrice

1. On développe selon la première ligne : $\det A = 1 \times (1 - 0) - 2 \times (0 - 1) + 0$. Donc $\det A = 3$.

2. On calcule $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$. Pour la première ligne : $C_{11} = 1$, $C_{12} = -(0 - 1) = 1$ et $C_{13} = 0 - 1 = -1$. Pour la deuxième : $C_{21} = -(2 - 0) = -2$, $C_{22} = 1 - 0 = 1$ et $C_{23} = -(0 - 2) = 2$. Pour la troisième : $C_{31} = 2 - 0 = 2$, $C_{32} = -(1 - 0) = -1$ et $C_{33} = 1 - 0 = 1$. Ainsi

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{com}(A)^T$ donne

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifions. La première ligne de A , $(1, 2, 0)$, donne avec les trois colonnes $1 + 2 = 3$, $-2 + 2 = 0$ et $2 - 2 = 0$. La deuxième, $(0, 1, 1)$, donne 0 , 3 et 0 . La troisième, $(1, 0, 1)$, donne 0 , 0 et 3 . Après division par 3, on obtient bien $AA^{-1} = I_3$.

Corrigé de l'exercice 12 : Système de Cramer à paramètre

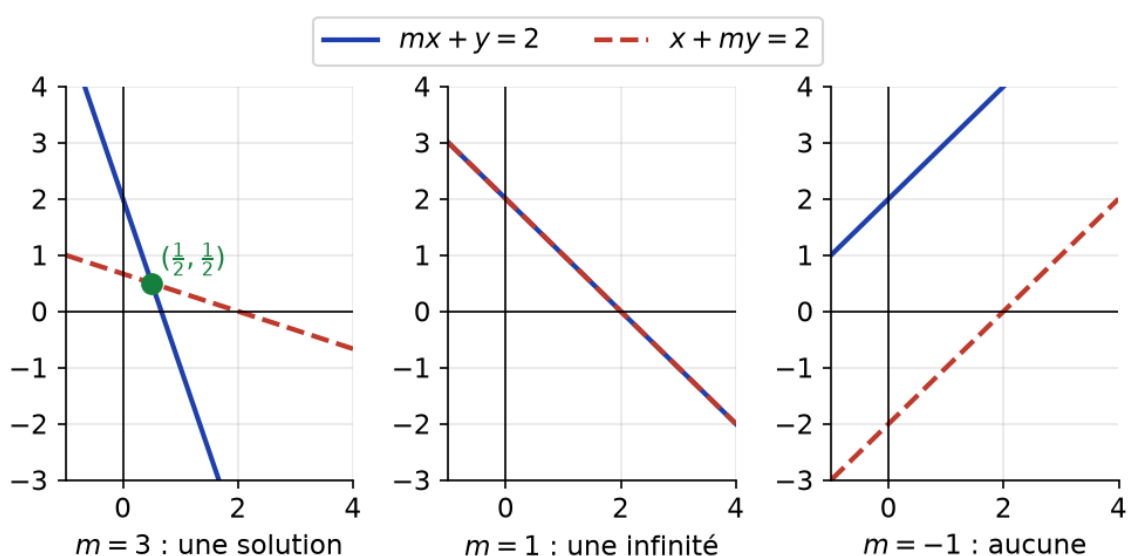
1. Le déterminant du système vaut $m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$. C'est donc **un système de Cramer si et seulement si** $m \notin \{-1, 1\}$. Dans ce cas, on calcule

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = 2(m - 1), \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(m - 1).$$

Après simplification par $m - 1 \neq 0$, $x = y = \frac{2}{m+1}$.

2. Pour $m = 1$, les deux équations se réduisent à $x + y = 2$. L'ensemble des solutions est donc **la droite** $\{(t, -t) : t \in \mathbb{R}\}$. Pour $m = -1$, le système s'écrit $-x + y = 2$ et $x - y = 2$. En ajoutant les deux équations, on obtient $0 = 4$. Il n'y a donc **aucune solution**.

3. Chaque équation définit une droite. Si $m \neq \pm 1$, les droites sont sécantes en un seul point. Si $m = 1$, elles sont confondues. Si $m = -1$, elles sont parallèles et distinctes. La figure ci-dessous montre les trois situations, avec $m = 3$ pour le premier cas : l'intersection est alors $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.



Point de méthode : un déterminant nul ne dit pas s'il y a zéro ou une infinité de solutions ; il faut alors revenir au système.

Corrigé de l'exercice 13 : Un déterminant tridiagonal

1. D'abord, $D_1 = 2$ et $D_2 = 2 \times 2 - (-1) \times (-1) = 3$. Ensuite, en développant selon la première ligne,

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (4 - 1) + 1 \times (-2 - 0) = 4.$$

Donc $D_1 = 2$, $D_2 = 3$ et $D_3 = 4$.

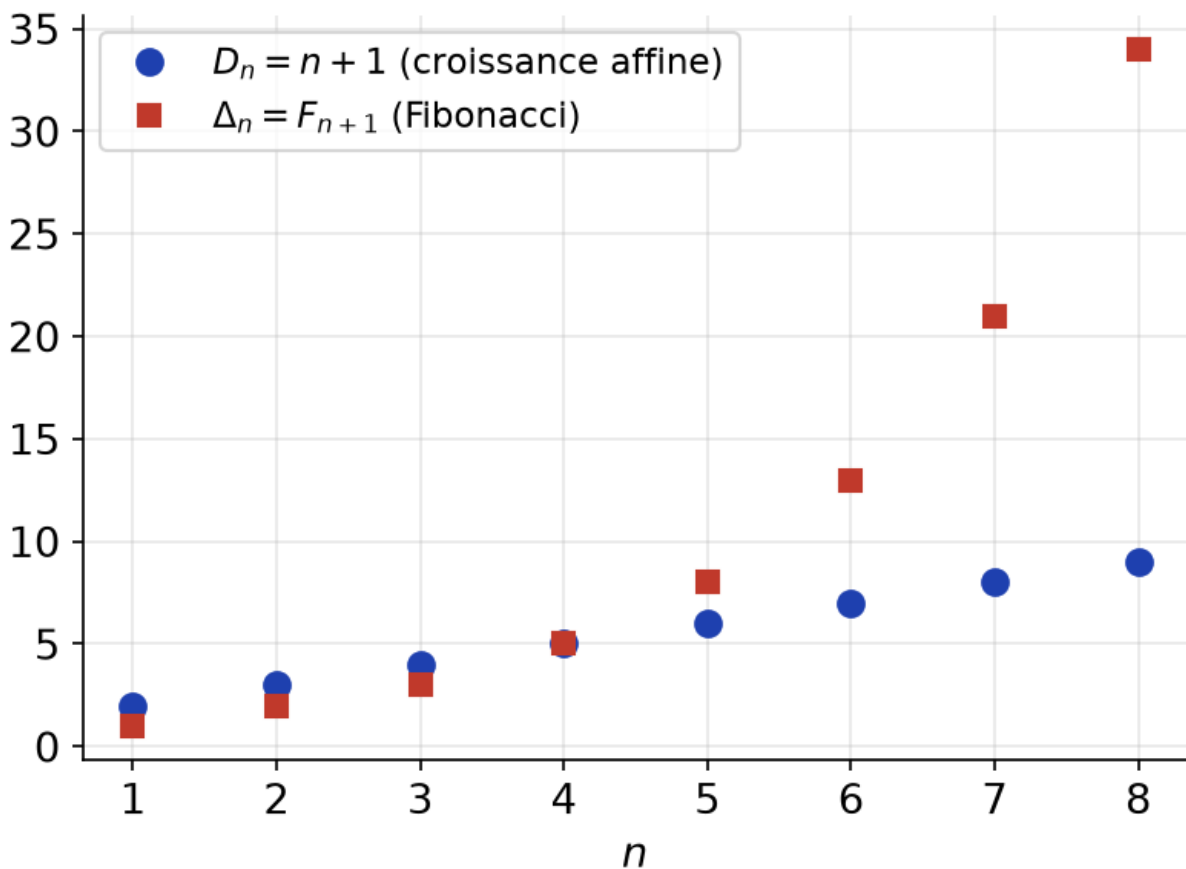
2. Soit $n \geq 3$. On développe D_n selon la première ligne, qui ne contient que $a_{11} = 2$ et $a_{12} = -1$. Le cofacteur de a_{11} est D_{n-1} . Celui de a_{12} vaut $-\Delta_{12}$, où Δ_{12} s'obtient en supprimant la ligne 1 et la colonne 2. La première colonne de ce mineur est $(-1, 0, \dots, 0)$. En la développant, on trouve $\Delta_{12} = -D_{n-2}$. Ainsi

$$D_n = 2 D_{n-1} + (-1) \times (-1) \times (-D_{n-2}) = 2 D_{n-1} - D_{n-2}.$$

Par conséquent, $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$. La suite $(D_n - D_{n-1})$ est constante, égale à $D_2 - D_1 = 1$. La suite (D_n) est donc arithmétique de raison 1, et $D_n = n + 1$ pour tout $n \geq 1$.

3. Le même développement, avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$, donne $\Delta_n = \Delta_{n-1} - bc \Delta_{n-2}$, soit $\Delta_n = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$ pour $n \geq 3$. De plus, $\Delta_1 = 1 = F_2$ et $\Delta_2 = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2 = F_3$. Les suites (Δ_n) et (F_{n+1}) vérifient la même récurrence et ont les mêmes deux premiers termes. Une récurrence double montre donc que $\Delta_n = F_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

La figure ci-dessous compare les deux suites : D_n croît de façon affine, alors que Δ_n croît exponentiellement.



Corrigé de l'exercice 14 : Déterminant de Vandermonde numérique

1. Avec $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient les lignes $(0, 1, 2)$ et $(0, 3, 8)$. Puis on développe selon la première colonne : le déterminant vaut $1 \times 8 - 2 \times 3 = 2$. Par ailleurs, ce déterminant est la transposée de $V(1, 2, 3)$, qui vaut $(2 - 1)(3 - 1)(3 - 2) = 2$. Dans les deux cas, **le déterminant vaut 2**.
2. On effectue $C_3 \leftarrow C_3 - a C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - a C_1$. Les lignes deviennent $(1, 0, 0)$, $(1, b - a, b(b - a))$ et $(1, c - a, c(c - a))$. On développe selon la première ligne, puis on factorise $b - a$ et $c - a$:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)(c - a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b).$$

C'est bien $(b - a)(c - a)(c - b)$.

3. On reconnaît $V(1, 2, 3, 4)$. D'après la formule du cours, il vaut
 $(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 1$. Donc **le déterminant vaut 12.**

Corrigé de l'exercice 15 : Matrice à diagonale constante

- Chaque ligne de $A_n(a, b)$ a pour somme $a + (n-1)b$. On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$, puis on factorise cette somme. La première colonne ne contient alors que des 1. Ensuite, on fait $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geq 2$. La ligne i devient $(0, \dots, 0, a-b, 0, \dots, 0)$, avec $a-b$ en position i . La matrice obtenue est triangulaire supérieure, de diagonale $1, a-b, \dots, a-b$. Par conséquent,
 $\det A_n(a, b) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.
- Pour $n = 4$, $a = 2$ et $b = 1$, la formule donne $(2+3)(2-1)^3 = 5$. Directement, $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ donne une colonne de 5. Après factorisation et $L_i \leftarrow L_i - L_1$, on obtient une matrice triangulaire de diagonale $1, 1, 1, 1$. On trouve bien **5**.
- On a $J_n - \lambda I_n = A_n(1-\lambda, 1)$. D'après la question 1, son déterminant vaut $(1-\lambda + n-1)(1-\lambda-1)^{n-1} = (n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$. Il s'annule exactement pour $\lambda = n$ ou $\lambda = 0$. Donc $J_n - \lambda I_n$ **n'est pas inversible si et seulement si** $\lambda \in \{0, n\}$.

Point de méthode : quand toutes les lignes ont la même somme, on ajoute toutes les colonnes à la première et on factorise.

Corrigé de l'exercice 16 : Matrices entières inversibles

- Dans la formule $\det A = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_j a_{\sigma(j)j}$, chaque terme est un produit d'entiers multiplié par ± 1 . Une somme d'entiers est entière, donc $\det A \in \mathbb{Z}$.
- On a $\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det I_n = 1$. D'après la question 1, les deux facteurs sont des

entiers. Or les seuls entiers inversibles dans $\mathbb{Z}$ sont 1 et -1 . Par conséquent, $\det A \in \{-1, 1\}$.

3. Si $\det A = \pm 1$, alors $\det A \neq 0$, donc A est inversible. De plus, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{com}(A)^T = \pm \operatorname{com}(A)^T$. Chaque cofacteur est, au signe près, un déterminant de matrice entière, donc un entier. Ainsi A^{-1} **est à coefficients entiers**.

4. La première matrice a pour déterminant $4 - 3 = 1$. Son inverse est $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, qui est bien entière. La seconde a pour déterminant 4 . Son inverse est $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, dont le coefficient $-\frac{1}{4}$ n'est pas entier, conformément à la question 2.

Corrigé de l'exercice 17 : Signature du retournement et matrice anti-diagonale

1. Si $i < j$, alors $\omega(i) = n + 1 - i > n + 1 - j = \omega(j)$. Tous les couples (i, j) avec $i < j$ sont donc des inversions. Il y en a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Par conséquent, $\varepsilon(\omega) = (-1)^{n(n-1)/2}$.
2. La permutation ω échange i et $n + 1 - i$. Elle fixe le milieu $\frac{n+1}{2}$ lorsque n est impair. Ainsi ω est le produit des transpositions $(i, n + 1 - i)$ pour $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$, qui ont des supports disjoints. Donc $\varepsilon(\omega) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Vérifions : pour $n = 2, 3, 4, 5$, on a $\frac{n(n-1)}{2} = 1, 3, 6, 10$ et $\lfloor n/2 \rfloor = 1, 1, 2, 2$. Les parités coïncident dans chaque cas.
3. Notons M cette matrice. Dans la formule $\det M = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_j m_{\sigma(j)j}$, un terme est non nul seulement si $\sigma(j) = n + 1 - j$ pour tout j , c'est-à-dire si $\sigma = \omega$. Le produit vaut alors $a_1 a_2 \dots a_n$. Par conséquent, $\det M = (-1)^{n(n-1)/2} a_1 a_2 \dots a_n$.

Corrigé de l'exercice 18 : Comatrice, déterminant et rang

- On part de $A \operatorname{com}(A)^T = \det(A) I_n$. En prenant le déterminant, $\det A \cdot \det(\operatorname{com}(A)^T) = (\det A)^n$. Or $\det A \neq 0$ et $\det(\operatorname{com}(A)^T) = \det(\operatorname{com} A)$. Donc $\det(\operatorname{com} A) = (\det A)^{n-1}$. Ensuite, $\operatorname{com}(A)^T = \det(A) A^{-1}$. En transposant, $\operatorname{com}(A) = \det(A) (A^{-1})^T$.
- Supposons $\operatorname{rg} A \leq n-2$. Fixons i et j . Les $n-1$ colonnes de A autres que la colonne j engendrent un espace de dimension au plus $n-2$. Elles sont donc liées. La même relation de dépendance reste vraie après suppression de la ligne i . Ainsi les colonnes de A_{ij} sont liées et $\Delta_{ij} = 0$. Tous les cofacteurs sont nuls, donc $\operatorname{com}(A) = 0$.
- Supposons $\operatorname{rg} A = n-1$. Alors $\det A = 0$, donc $A \operatorname{com}(A)^T = 0$. Chaque colonne de $\operatorname{com}(A)^T$ appartient donc à $\ker A$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim \ker A = 1$. Ainsi $\operatorname{rg}(\operatorname{com}(A)^T) \leq 1$. De plus, d'après le résultat admis, A possède une sous-matrice inversible de taille $n-1$. C'est l'une des A_{ij} , donc un mineur est non nul et $\operatorname{com}(A) \neq 0$. Comme une matrice et sa transposée ont le même rang, $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A) = 1$.
- On a $L_3 = 2L_2 - L_1$, et L_1, L_2 ne sont pas colinéaires : $\operatorname{rg} A = 2 = n-1$. Le calcul des neuf cofacteurs donne, par exemple, $C_{11} = 45 - 48 = -3$, $C_{12} = -(36 - 42) = 6$ et $C_{22} = 9 - 21 = -12$. Au total,

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ses lignes sont toutes proportionnelles à $(1, -2, 1)$, donc $\operatorname{rg}(\operatorname{com} A) = 1$. D'ailleurs, $A(1, -2, 1)^T = 0$: ce vecteur engendre bien $\ker A$.

- Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On applique la même règle à cette matrice : on obtient $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{com}(\operatorname{com} A) = A$ pour $n = 2$.

Corrigé de l'exercice 19 : Déterminant triangulaire par blocs

- On raisonne par récurrence sur p . La matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ a pour première colonne

e_1 . En développant selon cette colonne, on obtient le déterminant de $\begin{pmatrix} I_{p-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Après p étapes, il reste $\det B$. De même, la dernière ligne de $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ est $(0, \dots, 0, 1)$, de signe $(-1)^{2(p+q)} = 1$. En développant q fois selon la dernière ligne, il reste $\det A$.

2. Par produit par blocs,

$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = (I_p A + 0 \cdot 0 \quad I_p C + 0 \cdot I_q) = M$. Le déterminant est multiplicatif, donc $\det M = \det A \cdot \det B$.

3. Le déterminant proposé est triangulaire par blocs, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Ainsi il vaut $(4 - 6)(6 - 1) = (-2) \times 5$, soit -10 .

4. Prenons $p = q = 2$, $A = D = 0$ et $B = C = I_2$. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ devient I_4 après les échanges $L_1 \leftrightarrow L_3$ et $L_2 \leftrightarrow L_4$. Son déterminant vaut donc $(-1)^2 = 1$. Or $\det A \det D - \det B \det C = 0 - 1 = -1$. Par conséquent, **la formule proposée est fausse en général.**

Corrigé de l'exercice 20 : Problème : Vandermonde, interpolation et exponentielles

Partie A.

1. Si $a_i = a_k$ avec $i \neq k$, les lignes i et k sont égales. Le déterminant est alterné, donc $V(a_1, \dots, a_n) = 0$.

2. La dernière ligne de la matrice est $(1, x, \dots, x^{n-1})$. En développant selon cette ligne,

$P(x) = \sum_{j=1}^n x^{j-1} C_{nj}$, où les cofacteurs C_{nj} ne dépendent pas de x . Donc P est

polynomiale de degré au plus $n - 1$. Le coefficient de x^{n-1} est

$C_{nn} = (-1)^{2n} V(a_1, \dots, a_{n-1})$. C'est bien $V(a_1, \dots, a_{n-1})$, avec la convention $V(a_1) = 1$ lorsque $n = 2$.

3. Pour $x = a_i$ avec $i \leq n-1$, deux lignes sont égales, donc $P(a_i) = 0$. Ainsi P admet les $n-1$ racines distinctes $a_1, \dots, a_{n-1}$. Par conséquent, le polynôme

$Q = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$ divise P . Comme $\deg P \leq n-1 = \deg Q$, le quotient est une constante λ , et $P = \lambda Q$. En comparant les coefficients de x^{n-1} , on obtient

$$\lambda = V(a_1, \dots, a_{n-1}). \text{ Ainsi } P(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i).$$

4. Pour $n = 2$, on a $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. Supposons la formule vraie au rang $n-1$. Si deux des $a_1, \dots, a_{n-1}$ sont égaux, les deux membres sont nuls. Sinon, on évalue la question 3 en $x = a_n$:

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \times \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i).$$

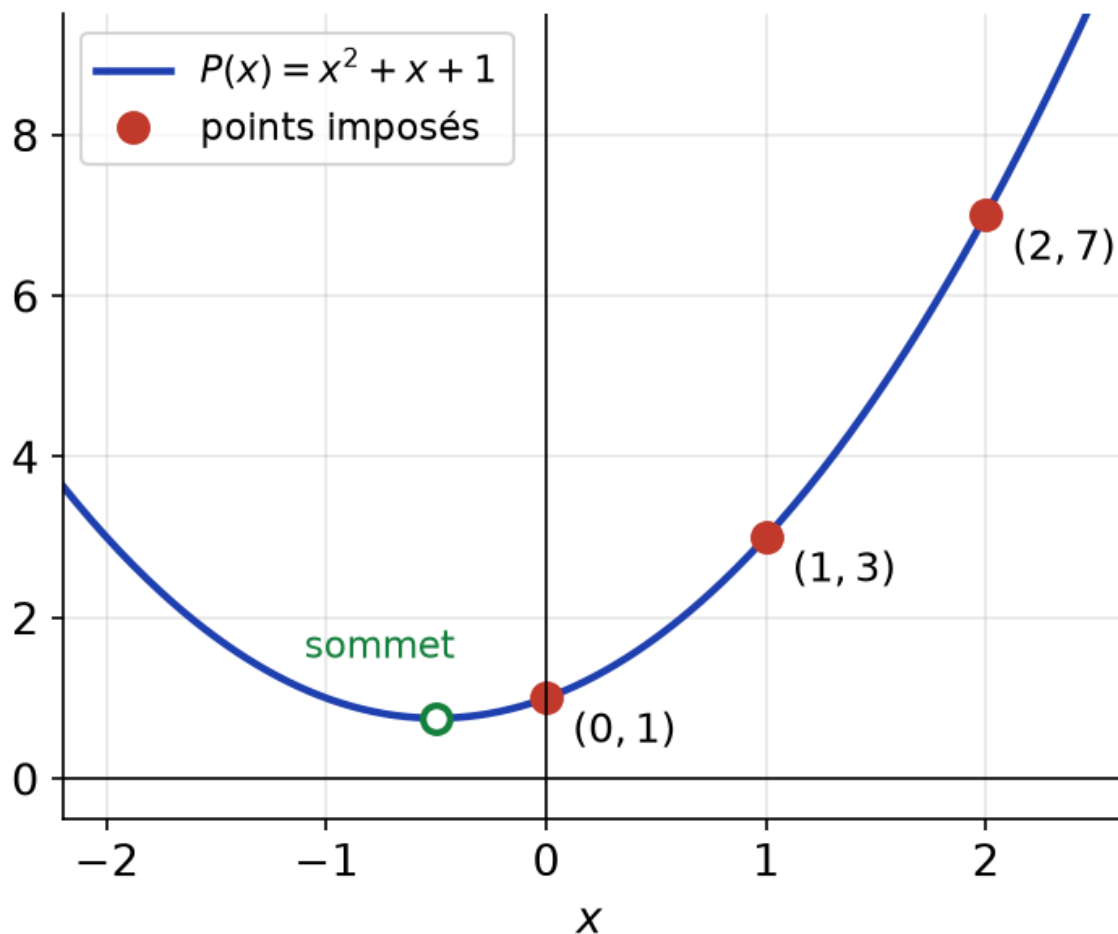
On obtient $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. En particulier,

$$V(1, \dots, n) = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (j-i) = \prod_{j=2}^n (j-1)!. \text{ Donc } V(1, 2, \dots, n) = \prod_{k=1}^{n-1} k!;$$

pour $n = 4$, on retrouve $1 \times 2 \times 6 = 12$.

Partie B.

- Écrivons $P = c_0 + c_1 X + \dots + c_d X^d$. Les conditions $P(x_k) = y_k$ forment un système linéaire de $d+1$ équations aux $d+1$ inconnues $c_0, \dots, c_d$. Sa matrice est (x_k^j) , de déterminant $V(x_0, \dots, x_d)$. Ce déterminant est non nul, car les x_k sont distincts. C'est donc un système de Cramer : **il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$ qui convient.**
- On cherche $P = c_0 + c_1 X + c_2 X^2$. D'abord, $P(0) = 1$ donne $c_0 = 1$. Ensuite, $P(1) = 3$ donne $c_1 + c_2 = 2$. Enfin, $P(2) = 7$ donne $2c_1 + 4c_2 = 6$, soit $c_1 + 2c_2 = 3$. Par soustraction, $c_2 = 1$, puis $c_1 = 1$. Donc $P = X^2 + X + 1$. La figure ci-dessous montre la parabole obtenue, qui passe bien par les trois points imposés.



Partie C.

- La fonction $\sum_k c_k f_k$ est nulle, donc toutes ses dérivées le sont. Or la dérivée j -ième de f_k est $x \rightarrow \lambda_k^j e^{\lambda_k x}$. En évaluant en 0, on obtient $\sum_{k=1}^n \lambda_k^j c_k = 0$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$.
- Ce système de n équations à n inconnues a pour matrice (λ_k^j) , transposée de la matrice de Vandermonde de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Son déterminant est donc $\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$. La matrice est inversible, et la seule solution est $c_1 = \dots = c_n = 0$. Par conséquent, **la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.**

Point de méthode : dès que l'on évalue des puissances en des points distincts, une matrice de Vandermonde apparaît, et son déterminant non nul fournit l'unicité.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [déterminants, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur déterminants](#)
- À maîtriser avant : [Matrice d'une application linéaire et changement de base](#)
- Chapitre précédent : [Matrice d'une application linéaire et changement de base](#)
- Chapitre suivant : [Géométrie du plan et de l'espace](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)