Optional

Dérivée d'une fonction numérique

Exercice 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x)=-4x^3+2x^2-3x+1.$
   $f'(x)=-12x^2+4x-3.$

2. $f(x)=\frac{3x^2-4x+2}{2}.$
   $f'(x)=3x-2.$

3. $f(x)=(\sqrt{x+1})\times(x^2-2).$
   $f'(x)=(\frac{1}{2\sqrt{x+1}})\times(x^2-2)+(\sqrt{x+1})\times(2x)=\frac{5x^2+4x-2}{2\sqrt{x+1}}.$

4. $f(x)=(2x-\sqrt{x})\times(x+4).$
   $f'(x)=4x+8-\frac{3\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}.$

5. $f(x)=\frac{1}{1-4x}.$
   $f'(x)=\frac{4}{(1-4x)^2}.$

6. $f(x)=\frac{-3}{2x-1}.$
   $f'(x)=\frac{6}{(2x-1)^2}.$

7. $f(x)=\frac{2x-1}{3x+2}.$
   $f'(x)=\frac{7}{(3x+2)^2}.$

8. $f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{2x-3}.$
   $f'(x)=\frac{6x^2-18x+10}{(2x-3)^2}.$

9. $f(x)=(5x^2+1)^2.$
   $f'(x)=100x^3+20x.$

10. $f(x)=(-2x-1)^3.$
    $f'(x)=-6(-2x-1)^2.$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

11. $f(x)=\sqrt{3x-4}$.
$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-4}}$.

12. $f(x)=2x\sqrt{-3x+2}$.
$f'(x)=\frac{-9x+4}{\sqrt{-3x+2}}$.

Exercice 2 :

1. $f(x)=3x^2-x+1$ avec $a=-1$.
$f'(x)=6x-1$.
$f(-1)=5$, $f'(-1)=-7$.

donc l'équation de la tangente en a=-1 est :

$y=$

2. $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ avec a= 3.

Montrer que : f ' (3)=-2 ; f(3) = 5 et y = -2x+11.

3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ avec a= 9.

Montrer que : $f'(9)=\frac{-1}{54}$; $f(9)=\frac{1}{3}$; $y=\frac{-1}{54}x+\frac{1}{2}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x)=\frac{-x^2+2x-1}{x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est horizontale .
Le coefficient directeur de la tangente est donc nul or il vaut $f'(x_o)$.

Résolvons $f'(x)=0$
$\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \quad \Leftrightarrow x=$

2. Existe-t-il des points de la courbe C où la tangente admet un coefficient directeur égal à - 2 ?
$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}=-2$
$\Leftrightarrow x^2-4x+3=-2x^2$
$\Leftrightarrow 3x^2-4x+3=0$
Il n'y a donc aucun point de la courbe.

3. Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation

$y=$.

Si elle est parallèle cela équivaut à dire qu'elle a le même coefficient directeur,
nous sommes donc amenés à résoudre l'équation :
$f'(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2}=\frac{-2}{3}$
Il n'existe aucun point.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x^4-2x+1$.
Soit (Cf) sa courbe représentative.

1. Donner, en justifiant, l'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point A d'abscisse 0.

$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$f'(x)=4x^3-2$

$f'(0)=4\times 0^3-2=-2$ et $f(0)=1$

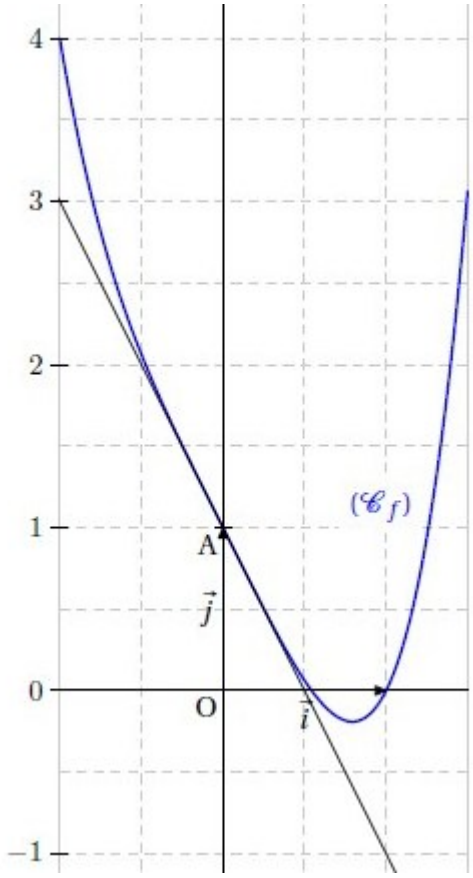
donc

$y-1=-2(x-0)$

$y=$

2. Tracer dans un même repère la courbe (Cf) et la tangente (T) sur l'intervalle [- 1 ; 1,5].

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005}-1}{h}.$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Calculer f ' (0).

f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=2005(1+x)^{2004}$$

et $f'(0)=2005(1+0)^{2004}=2005.$

2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

L'accroissement moyen de f entre o et h est : $\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\frac{(1+h)^{2005}-1}{h}$

et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^{2005}-1}{h}=f'(0)$ car la fonction f est dérivable en 0.

Conclusion : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^{2005}-1}{h}=2005$

Exercice 6 :

1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v .

$$t=\frac{d}{v}=\frac{150}{v}$$

2. Calculer le prix de revient P(v) du trajet en fonction de v.

$$P(v)=(6+\frac{v^2}{300})\frac{150}{v}\times 0{,}9+12\times\frac{150}{v}$$

$$P(v)=(6+\frac{v^2}{300})\frac{135}{v}+\frac{1800}{v}$$

$$P(v)=\frac{810}{v}+\frac{135}{300}v+\frac{1800}{v}$$

$$P(v)=\frac{2610}{v}+0{,}45v$$

3. Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient P(v) de la course soit minimal ?

$$P'(v)=-\frac{2610}{v^2}+0{,}45$$

$$P'(v)\geq 0\Leftrightarrow -\frac{2610}{v^2}+0{,}45\geq 0$$

$$0{,}45\geq\frac{2610}{v^2}$$

$$0{,}45v^2\geq 2610$$

$$v^2\geq\frac{2610}{0{,}45}$$

$$v^2\geq 5800$$

$$(v-\sqrt{5800})(v+\sqrt{5800})\geq 0$$

ceci est vérifié pour $[\sqrt{5800};+\infty[$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Donc le minimum est atteint pour $v = \sqrt{5800} \simeq 76{,}16\ km/h.$

Conclusion : pour que le prix de revient de la course soit minimal, il faut que le camion roule à une vitesse moyenne de 76,16 km/h.



Exercice 7 :

Soit (P) la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Calculer les coordonnées de son sommet S.

Son sommet est le minimum donc la dérivée est nulle en ce point.

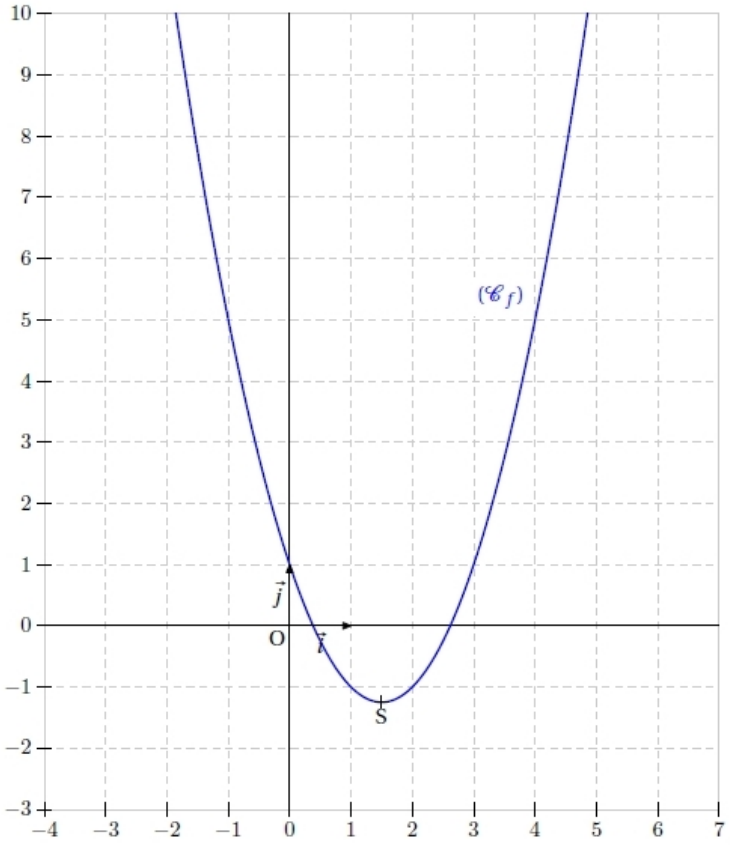
$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x =$$

et

$$f(\tfrac{3}{2}) = (\tfrac{3}{2})^2 - 3 \times \tfrac{3}{2} + 1 = \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{2} + \tfrac{4}{4}$$
$$= \tfrac{9}{4} - \tfrac{18}{4} + \tfrac{4}{4} = -\tfrac{5}{4}$$

Les coordonnées de son sommet sont $S(\tfrac{3}{2}; -\tfrac{5}{4})$



Exercice 8 :

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm².

Nous avons :

$L \times l =$ et $2(L+l)=4$ soit $L+l=2$

Nous avons la somme et le produit de deux nombres, ils sont solution de l'équation :

$$x^2-2x+\frac{3}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-8x+3=0$$

Calculons le discriminant :

$$\Delta=(-8)^2-4\times 4\times 3=$$

$\Delta>0$ il y a donc deux racines réelles distinctes.

$$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2} \text{ et } x_1=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Conclusion : la longueur est $\frac{3}{2}\,cm$ et la largeur est $\frac{1}{2}\,cm.$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

a. Exprimer S en fonction de la largeur l.

$l = 2 - L$

$S = l \times L =$

b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

Cette fonction f correspond à l'aire du rectangle.

Calculer la dérivée f ' de f puis étudier son signe.

$f(x) = -x^2 + 2x$

$f'(x) = -2x + 2$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow -2x \geq -2$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{-2}$
$\Leftrightarrow x \leq 1.$

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

f est croissante sur [0;1] et décroissante sur [1;2].

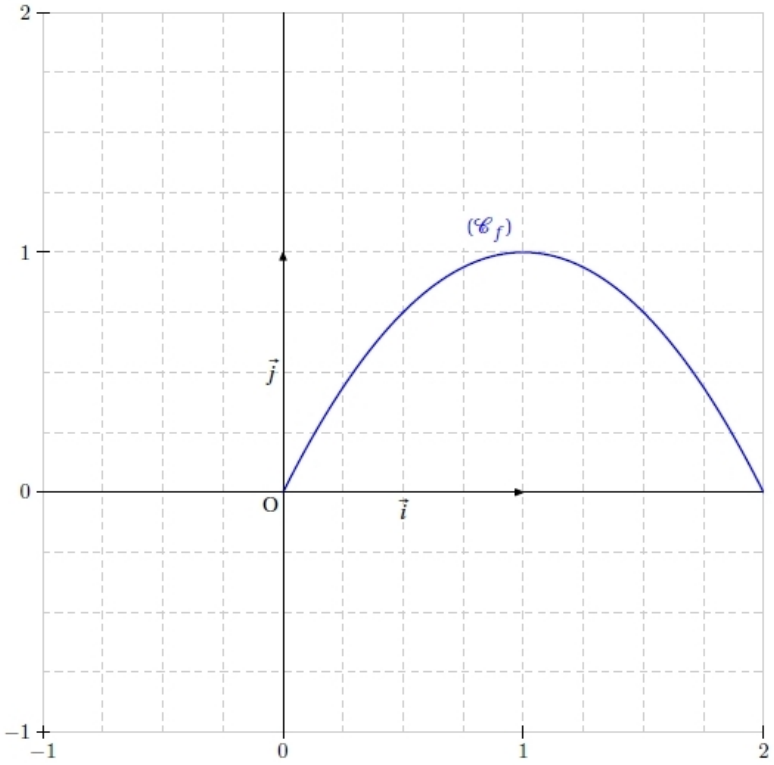
Tracer la représentation graphique (Cf) de la fonction f sur [0 ; 2].

c. En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 m et l'aire S est maximale.

Pour que S soit maximale il faut que L = 1 cm.

et donc la largeur est l = 2-1=1 cm

Finalement ce rectangle est un carré de côté 1 cm.



Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=x^3-3x-3$.

On note (Cf) sa représentation graphique.

1.Calculer la dérivée f ' de f puis étudier son signe.

$$f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 3x^2-3\geq 0 \Leftrightarrow 3(x^2-1)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\geq 0$$

donc f' est négative sur [- 1 ; 1] .

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

X	- inf	-1	1	+ inf
f'(x)	+	0	−	0 +
f(x)	- inf ↗	-1 ↘	-5	↗ + inf

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$
$$f(0)=0^3-3\times 0-3=-3$$
$$f'(0)=3\times 0^2-3=-3$$

$$y-(-3)=-3(x-0)$$

$$y+3=-3x$$

$$y=$$

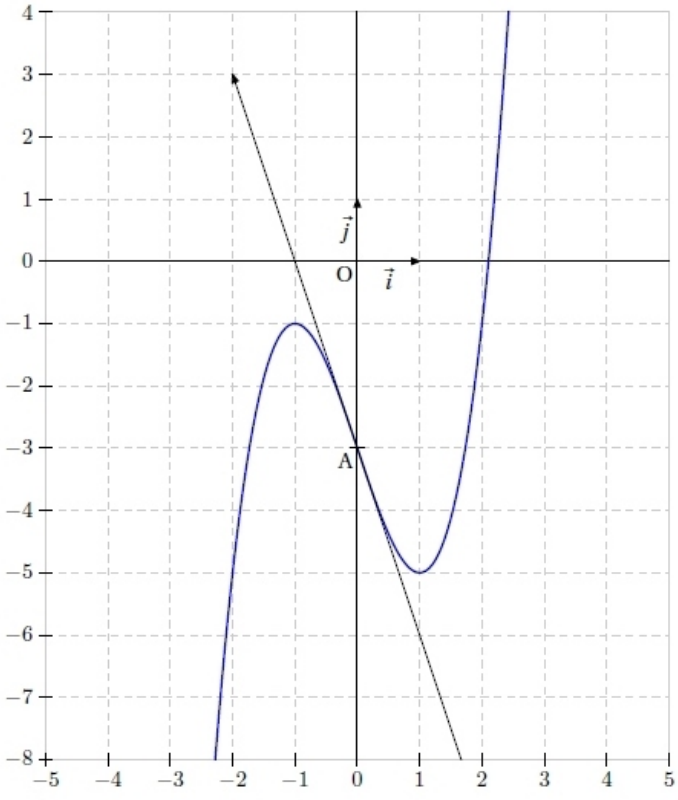
4. Tracer (T) et (Cf) dans un même repère.

5. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3].

f est continue et strictement croissante sur [2;3], de plus elle passe d'une valeur négative à une valeur positive

donc d'après le théorème de bijection 0 admet un unique antécédent sur [2 ; 3].

6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.



Exercice 10 :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur R par : $f(x)=x^2-3x+2.$

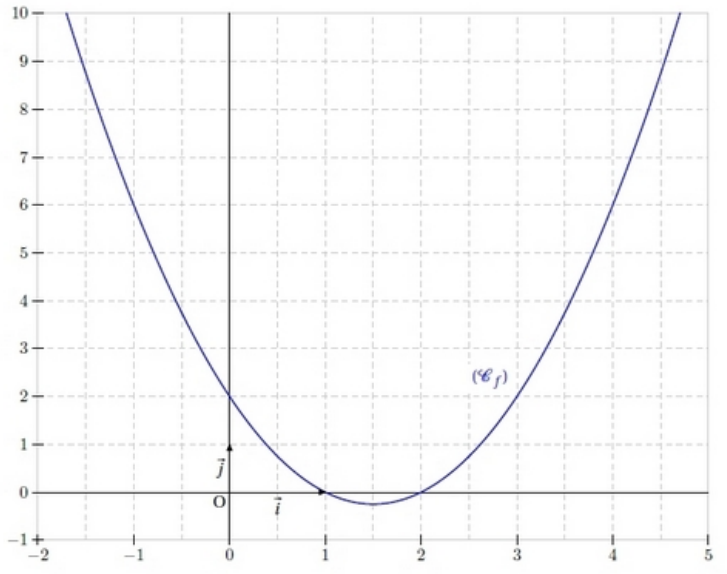
Nous avons $f(x)=(x-1)(x-2)$

f est décroissante sur $]-\infty;1,5]$ et croissante sur $[1,5;+\infty[$.

2. Résoudre l'équation f(x) = 0.

$$(x-1)(x-2)=0$$

C'est une équation produit, il y a deux solutions : $x=1\ ou\ x=2$.



Exercice 11 :

1. Calculer la dérivée f ' de f.

f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=2x-1.$$

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse $x_0=2$.

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f'(2)=2\times 2-1=3$$

$$y-1=3(x-2)$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$y-1=3x-6$$

$$y=$$

3. Résoudre par le calcul l'équation g(x) = f(x).

$$x^2-x-1=3-x$$

$$x^2-x-1-3+x=0$$

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$x=2 \; ou \; x=-2.$$

Il y a donc deux points d'intersection entre ces deux courbes.

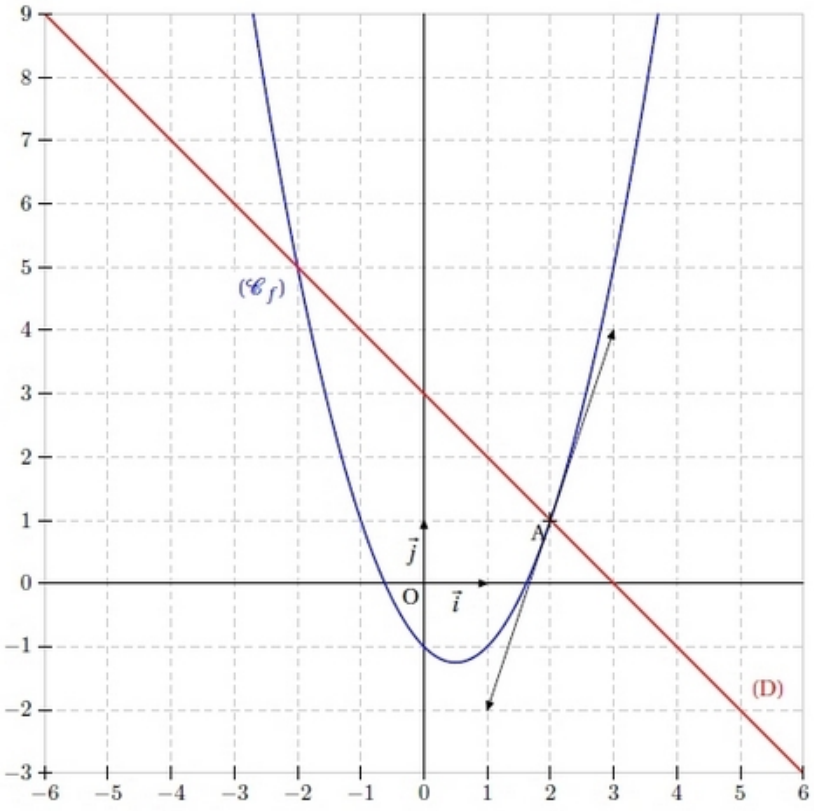
4. Préciser les coordonnées des points d'intersections de (Cf) et (D).

f(2)= 1 donc le premier point d'intersection est I(2;1).

$$f(-2)=(-2)^2-(-2)-1=4+2-1=5$$

le second point d'intersection est J (- 2 ; 5) .

5. Tracer sur un même repère les droites (T), (D) et la courbe (Cf).



Exercice 12 :

Dériver les fonctions suivantes :

f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=8x-3.$$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=2(3x-7)+(2x+3)\times 3=$$

h est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$$h'(x)=\frac{2(3x-1)-(2x+4)\times 3}{(3x-1)^2}$$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$h'(x)=\frac{6x-2-6x-12}{(3x-1)^2}$$

$$h'(x)=\frac{-14}{(3x-1)^2}$$

Exercice 13 :

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=3x^4-2x^3+5x-4$$
$$h(x)=\sqrt{x}(1-\frac{1}{x})$$
$$k(x)=\frac{x+5}{x^2+1}$$

f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=2x.$$

g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=12x^3-6x^2+5.$$

h est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\frac{1}{x})+\sqrt{x}\times\frac{1}{x^2}$$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{1}{x}+\sqrt{x}\times\frac{1}{x^2}$$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}$$

k est une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$k'(x)=\frac{1(x^2+1)-(x+5)\times 2x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2-10x}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-10x+1}{(x+1)^2}$$

Exercice 14 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|2x+3|$.

Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

$2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

Premier cas :

$Si\ x>-\frac{3}{2}$ $f(x)=2x+3$ et f est dérivable sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$ en tant que fonction affine .

et $f'(x)=2$.

Second cas :

$Si\ x<-\frac{3}{2}$ $f(x)=-2x-3$ et f est dérivable sur $]-\infty;-\frac{3}{2}[$ en tant que fonction affine .

et $f'(x)=-2$

Dérivabilité en 0 :

$\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}+} f'(x)=2$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}-} f'(x)=-2$

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

Exercice 15 :

Démontrez que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors:

a) u^2 est dérivable sur I et $(u^2)'=2uu'$.

$u^2=u \times u$

Or si u est dérivable, un produit de fonctions est aussi dérivables sur l'intervalle I.

En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, nous obtenons :

$(u^2)'=u' \times u+u \times u'=2uu'$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b) u^3 est dérivable sur I et $(u^3)'=3u^2\,u'$.

de même :

$$u^3 = u \times u^2$$

les fonctions u et u^2 sont dérivables sur I donc u^3 également

en tant que produit de fonctions dérivables sur I .

Et en réutilisant la formule de la dérivée d'un produit :

$$(u^3)' = (u \times u^2)' = u' \times u^2 + u \times (u^2)'$$

En utilisant la question a) :

$$(u^3)' = u' \times u^2 + u \times 2 \times u \times u'$$

$$(u^3)' = u' \times u^2 + 2 \times u^2 \times u'$$

$$(u^3)' = 3 \times u^2 \times u'$$

Exercice 16 :

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme .

$$f(x) = x - x^2$$

$$f'(x) = 1 - 2x$$

$$1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

donc f est croissante sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

donc son maximum est atteint en $x = \frac{1}{2}$.

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}\,,\, f(x) \leq \frac{3}{4}$.

3. $\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} - (x^2 - x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - x^2 + x - \frac{1}{4} = -x^2 + x = f(x)$

Exercice 17 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+6x+5$

1. f sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynômiale.
$f'(x)=2x+6$
donc f est croissante sur $[-3;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty;3]$

2. Résolvons l'équation : .
$x^2+6x+5=\frac{1}{2}x-2$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{11}{2}x+7=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{11}{4})^2-\frac{121}{16}+7=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{11}{4})^2-\frac{121}{16}+\frac{112}{16}=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{11}{4})^2-\frac{121}{16}+\frac{112}{16}=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{11}{4})^2-\frac{9}{16}=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{11}{4})^2-\frac{3^2}{4^2}=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{11}{4}-\frac{3}{4})(x+\frac{11}{4}+\frac{3}{4})=0$
$\Leftrightarrow (x+\frac{8}{4})(x+\frac{14}{4})=0$
Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs, au moins, est nul.
$\Leftrightarrow x=$
de plus les ordonnées des points d'intersection vérifient :
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x-2=\frac{-2}{2}-2=-3\ et\ \frac{1}{2}x-2=\frac{-3,5}{2}-2=-3,75$
Donc les deux courbes se coupent aux points A(-2;-3) et B(-3,5;-3,75).

Exercice 18 :

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=3x-4x^3$.
f est une fonction polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x)=x-12x^2=x(1-12x)$
avec un tableau des signes, nous montrons que f' est positive ou nulle sur $[0;\frac{1}{12}]$
donc f est croissante sur $[0;\frac{1}{12}]$

Exercice 19 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\frac{-4x-4}{x^2+2x+5}$.

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

$$f'(x)=\frac{-4\times(x^2+2x+5)-(-4x-4)\times(2x+2)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$f'(x)=\frac{-4x^2-8x-20-(-8x^2-8x-8x-8)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$f'(x)=\frac{-4x^2-8x-20+8x^2+16x+8)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$f'(x)=\frac{4x^2+8x-12}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$f'(x)=\frac{4(x^2+2x-3)}{(x^2+2x+5)^2}$$
$$f'(x)=\frac{4(x-1)(x+3)}{(x^2+2x+5)^2}$$
En effectuant un tableau des signes, nous obtenons :
f ' négative ou nulle sur $[-3;1]$ donc f est décroissante sur $[-3;1]$.

2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses .
$$f(x)=0\Leftrightarrow -4x-4=0\Longleftrightarrow x=-1$$
Donc les coordonnées du point A(-1;0) .

3. $f(-1)=0 et f'(-1)=\frac{4(-1-1)(-1+3)}{(1-2+5)^2}=\frac{-16}{16}=-1$
$$y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)=-(x+1)+0=-x-1$$
L'équation de la tangente en A à la courbe de f est **y = - x - 1** .

Exercice 20 :

Etudier les variations sur]-2 ; 1[de la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{-5x^2+4x-8}{x^2+x-2}$$.
C'est le même principe que précédemment
Montrer que f est croissante sur $[0;\frac{28}{9}]\ donc\ sur\ [0;1[$

Exercice 21 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$

On appelle C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
1)a) Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour C_f ?

f(-x)=f(x) donc la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
b) Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f

2) a) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
b) Cette tangente recoupe C_f en deux autres points.
b.1) Montrez que les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation :
$x^4-8x^2+12x-5=0$
b.2) Vérifiez que l'on a :
$x^4-8x^2+12x-5=(x-1)^2(x^2+2x-5)$

b.3) En déduire les abscisses de ces points.

Exercice 22 :

Soit (P) la parabole d'équation $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$

et (H) l'hyperbole d'équation $y=\frac{3(3x+5)}{4(x+3)}$.

Le plan est ramené à un repère orthonormal.

1) Montrer que (P) et (H) rencontrent l'axe (Oy) en un même point A.

Indication : remplacer x par 0.

2) Montrer que les tangentes en A aux courbes (P) et (H) sont perpendiculaires.

indication : utiliser l'équation d'une tangente $y-y_A=f'(x_A)(x-x_A)$

Rappel : Dans un repère orthonormé du plan, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à –1 .

Exercice 23 :

Indication : utiliser le fait qu'une équation réduite de la tangente en a est y-f(a)=f ' (a)(x-a)

Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation $y=(m-1)x^2+(3m+2)x+4$

admette au point d'abscisse –1 une tangente de coefficient directeur 6.

Exercice 24 :

Indication : utiliser le fait qu'une équation réduite de la tangente en a est : $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Soit la fonction $f:x\to\frac{-x^2+2x-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et soit (C) sa courbe représentative.

Déterminer les abscisses des points de (C) où la tangente :

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1) est horizontale

2) est parallèle à la droite d'équation $y=-\frac{2}{3}x-5$.

Exercice 25 :

Une parabole (P) admet dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ une équation du type :

$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

1. Déterminer les coefficients a, b et c sachant que (P) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation y = 2x + 2 pour tangente.

Nous avons :

$P(3)=0 \quad P(0)=2$

et le coefficient directeur de la tangente étant le nombre dérivé : $P'(0)=2$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} 9a+3b+c=0 \\ c=2 \\ b=2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a+6+2=0 \\ c=2 \\ b=2. \end{cases}$$

$\{a=$

Conclusion : $P(x)=-\frac{8}{9}x^2+2x+2$

2. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de (P) avec (Ox).

Résolvons l'équation P(x)=0

$-\frac{8}{9}x^2+2x+2=0$ (multiplions par -9)

$8x^2-18x-18=0$

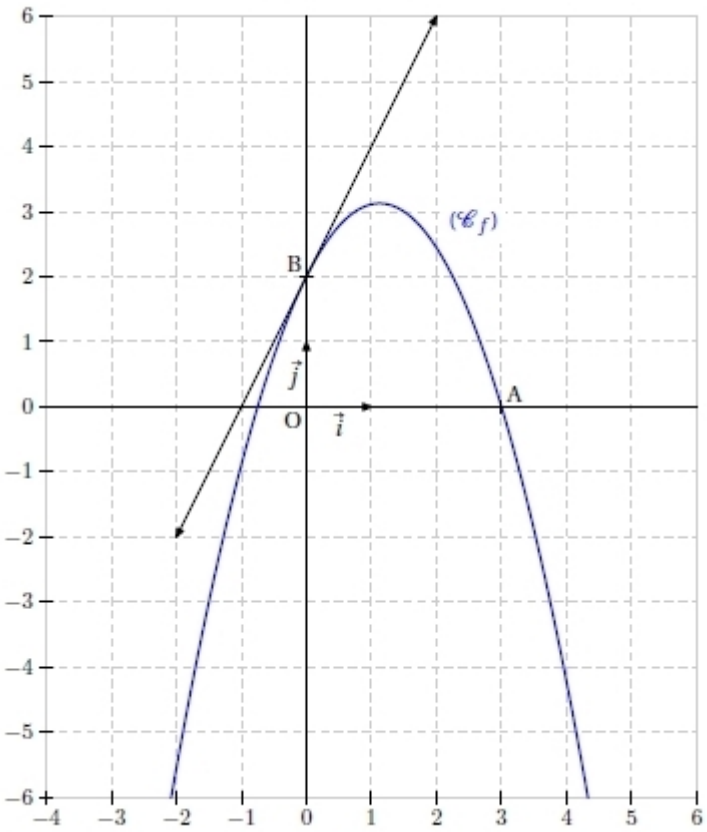
Calculons la valeur du discriminant :

$\Delta=(-18)^2-4\times 8\times(-18)=900$

Le discriminant étant strictement positif, il existe deux racines réelles distinctes.

$x_1 = \frac{18+30}{16}$ et $x_2 = \frac{18-30}{16}$

$x_1 =$



Exercice 26 :

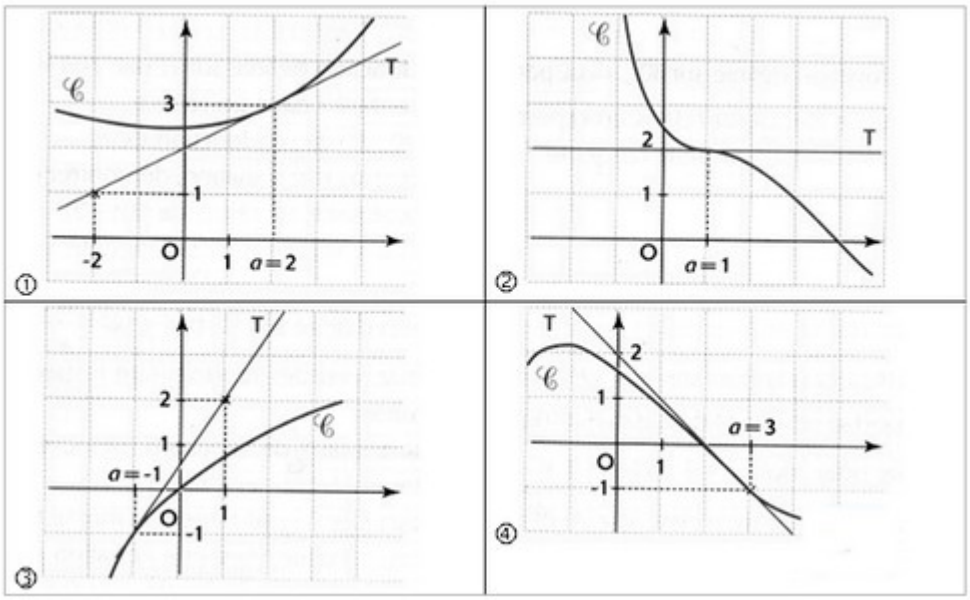
Indications :

1. $f'(a) = \frac{1}{2}$
2. $f'(a) = 0$
3. $f'(a) = 1{,}5$
4. $f'(a) = -1$

(C) représenter une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite T est tangente à (C) au point d'abscisse a.

Dans chaque cas détermine f'(a) et donner une équation de la tangente T.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 27 :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

dont la parabole (Cf) passe par les points A (0 ; 1) et B (2 ; 3).

Les tangentes en A et B se coupent au point C (1 ; - 4).

1. Déterminer une équation des tangentes à (Cf).

Pour la tangente en A :

$$a=\frac{1+4}{0-1}=-5$$

$$b=y-ax=1-0=1$$

donc

$$y=$$

Pour la tangente en B :

$$a=\frac{3+4}{2-1}=7$$

$$b=y-ax=3-14=-11$$

donc

$$y=$$

En déduire f ' (0) et f ' (2).

$f'(0)=-5$ et $f'(2)=7$

2. Exprimer f ' (x) en fonction de a, b et c.

$f'(x)=2ax+b$

3. A l'aide des valeurs de f ' (0), f ' (2) et f(0), trouver trois équations vérifiées par a, b et c puis déterminer l'expression algébrique de la fonction f.
Nous obtenons :

$\{b=$

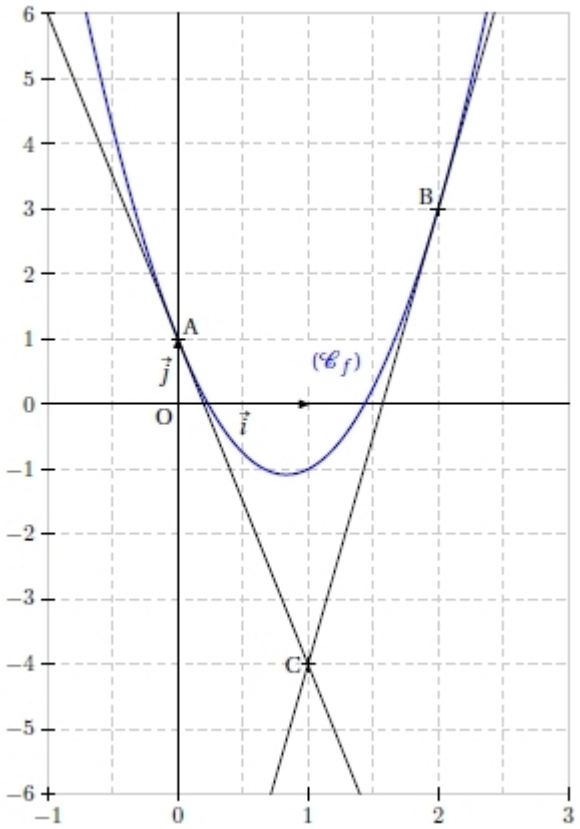
$\{b=$

$\{b=$

$\{b=$

Conclusion :

$f(x)=3x^2-5x+1$



Exercice 28 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$

2. Calculer la dérivée f '' de f et étudier son signe.

f est est deux fois dérivable sur son domaine de définition en tant que fonction rationnelle.

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

et

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (-x^2+1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4x(-x^2+1) \times (x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)[-2x(x^2+1) - 4x(-x^2+1)]}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)[-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x]}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)[2x^3 - 6x]}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+1)[x^2-3]}{(x^2+1)^4}$$

donc le signe de f'' est celui de $x(x^2-3) = x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

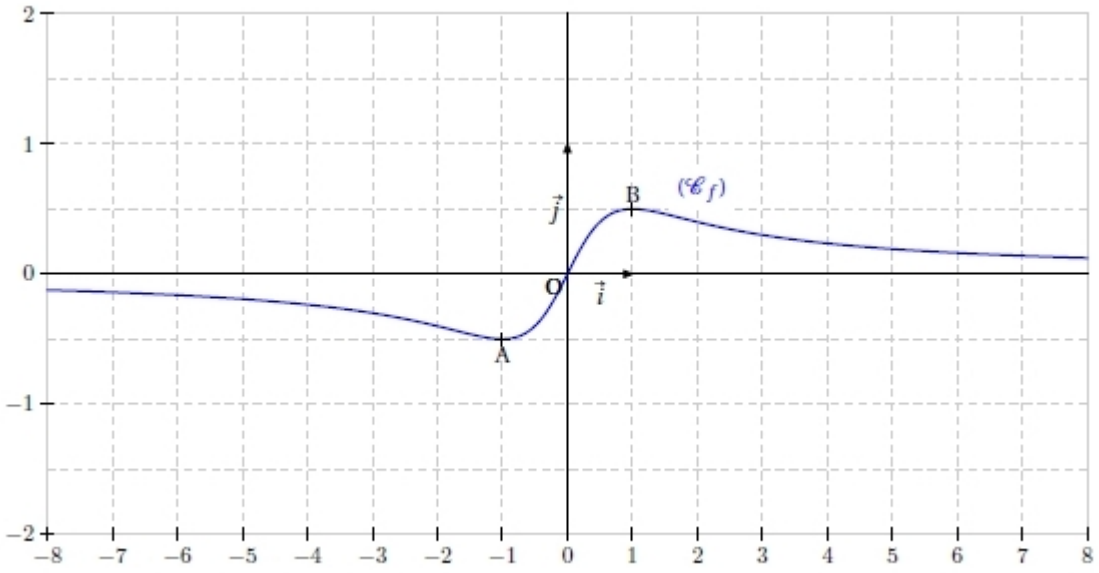
En établissant un tableau des signes,

nous obtenons que f'' est positive sur $[-\sqrt{3};0] \cup [\sqrt{3};+\infty[$

donc f ' est croissante sur $[-\sqrt{3};0] \cup [\sqrt{3};+\infty[$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

f est croissante sur [-1;1]



Exercice 29 :

Ci-dessous est donnée la courbe (Cf) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [2 ; 7].

1. Par lecture graphique, donner sans justifier la valeur de :

f(3) ; f ' (3) ; f(6) ; f ' (6).

$f(3)=9$

$f'(3)=0$

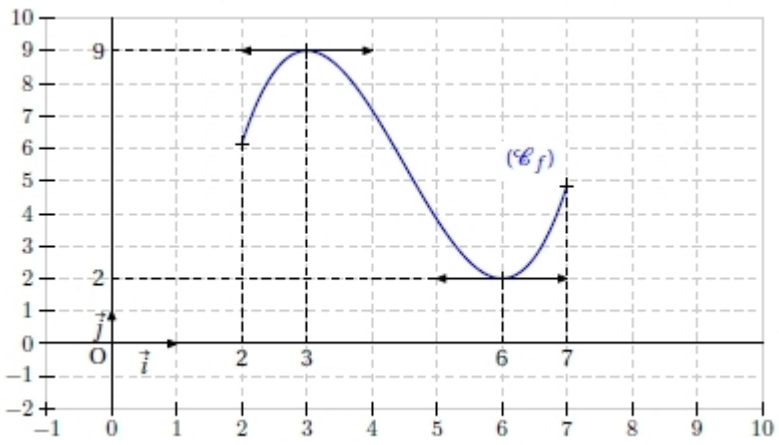
$f(6)=2$

$f'(6)=0$

2. Le graphique ne permet pas la lecture de f ' (4).
Préciser néanmoins son signe. Expliquer.

$f'(4)$ est négatif car la tangente en 4 est décroissante donc son coefficient directeur est négatif.
.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 30 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^3-3x^2+9x$.

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

f est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=-3x^2-6x+9$$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -3x^2-6x+9\geq 0$$

Calculons la valeur du discriminant :

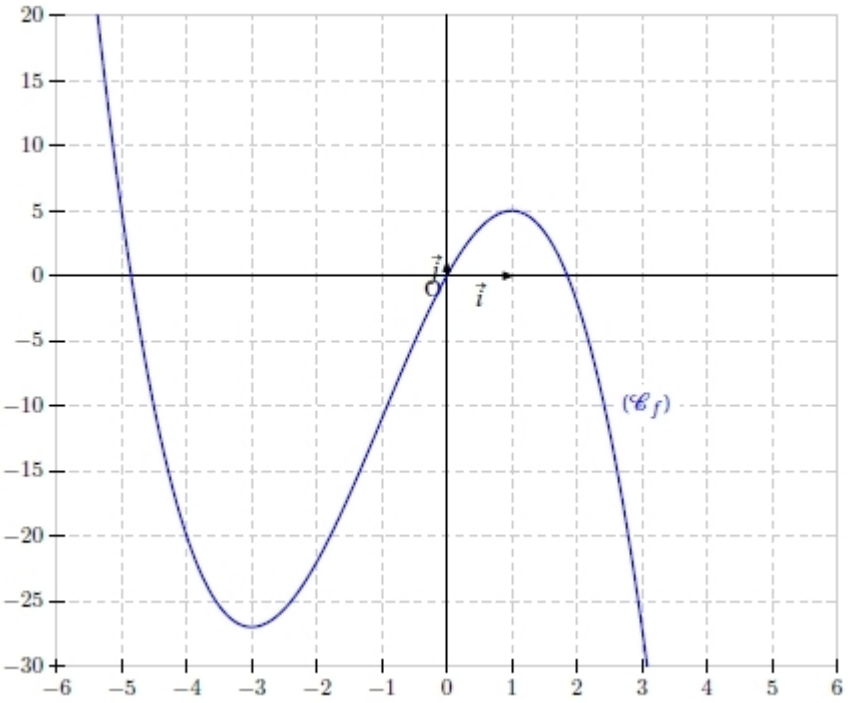
$$\Delta = 36-4\times(-3)\times 9 =$$

$\Delta>0$, il y a donc deux racines réelles distinctes.

$x_1=\frac{6+12}{-6}=-3$ et $x_2=\frac{6-12}{-6}=1$

Conclusion : $f'\geq 0$ sur $[-3;1]$

donc f est croissante sur $[-3;1]$.



Exercice 31 :

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe (Cf) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(1-\frac{x}{2})^4$ ainsi que la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse $x_0=4$.

1. Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre f ' (4).

C'est la valeur du coefficient directeur de la tangente en $x_0=4$

$f'(4)=2$

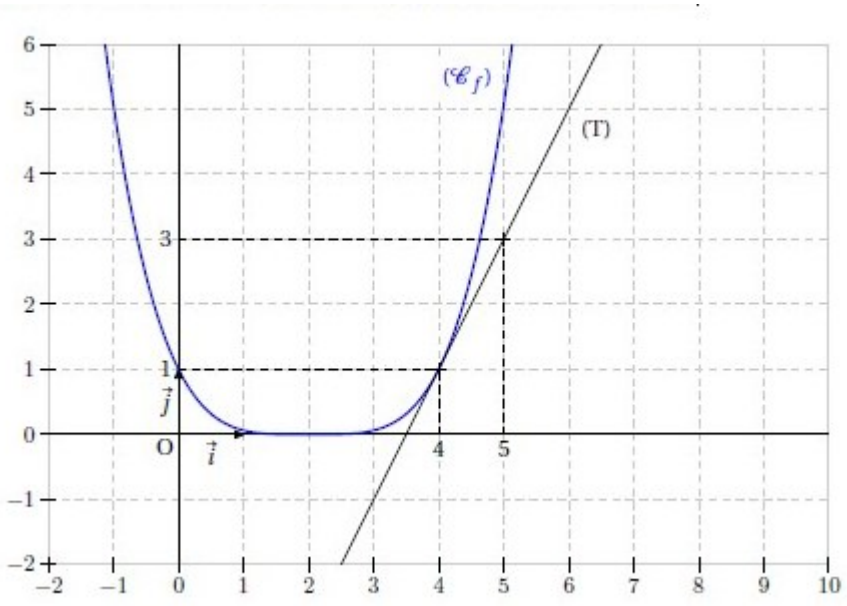
2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre f ' (3).

$f'(x)=4(1-\frac{x}{2})^3\times\frac{-1}{2}$

$f'(x)=-2(1-\frac{x}{2})^3$

$f'(3)=-2(1-\frac{3}{2})^3=-2(-\frac{1}{2})^3=2(\frac{1}{8})=\frac{1}{4}$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 32 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}+2$.

1. Montrer que f est dérivable en 2.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}+2-\frac{1}{2}-2}{h}=\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{1}{h(2+h)}-\frac{1}{2h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{2}{2h(2+h)}-\frac{2+h}{2h(2+h)}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{2-2-h}{2h(2+h)}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{-h}{2h(2+h)}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{-1}{2(2+h)}$$

La limite lorsque h tend vers 0 existe donc f est dérivable en 2 et :

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$$

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) représentant f au point d'abscisse 2.

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

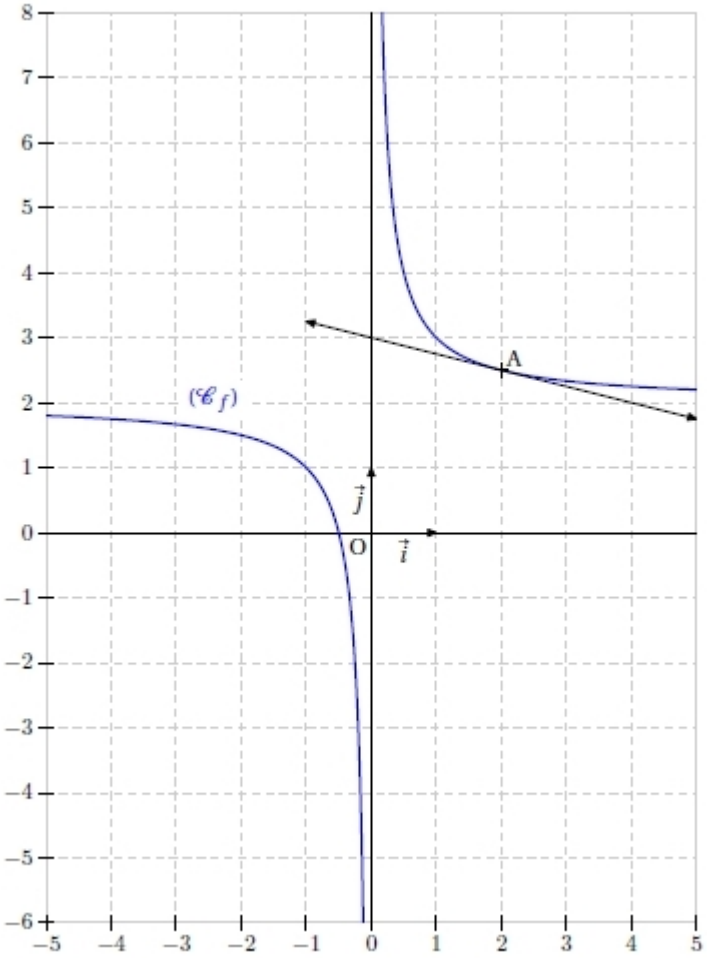
$$f(2)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

ainsi $y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}(x-2)$

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$$

$y=$

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 33 :

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}}\ sur\ ]0;+\infty[$

$g(x)=(\frac{1}{1+x})^3\ sur\ \mathbb{R}-\{-1\}$

$f'(x)=\frac{1(x+\sqrt{x})-x(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x+\sqrt{x})^2}$

$f'(x)=\frac{x+\sqrt{x}-x-\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+\sqrt{x})^2}$

$f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x+\sqrt{x})^2}$

$f'(x)=\frac{\sqrt{x}}{2(x+\sqrt{x})^2}$

$$g'(x)=3(\frac{1}{1+x})^2\times(-\frac{1}{(1+x)^2})$$

$$g'(x)=\frac{-3}{(1+x)^4}$$

2. Calculer f ' (16) et g ' (2).

$$f'(16)=\frac{\sqrt{16}}{2(16+\sqrt{16})^2}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}$$

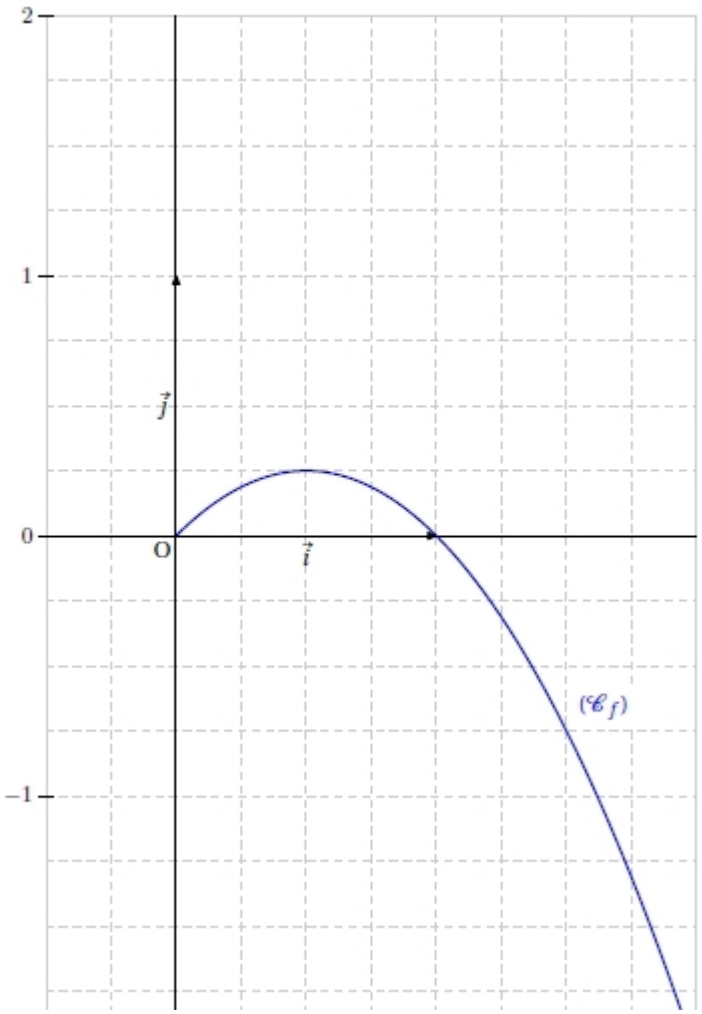
Exercice 34 :

Indication : vérifiez vos résultats sur la courbe ci-dessous.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(1-x)$.

2. En déduire un encadrement de f(x) sur [0 ; 2].

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 35 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x-2+\frac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f ' et étudier son signe.

$$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$$

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\frac{4}{x^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1\geq \frac{4}{x^2}$$

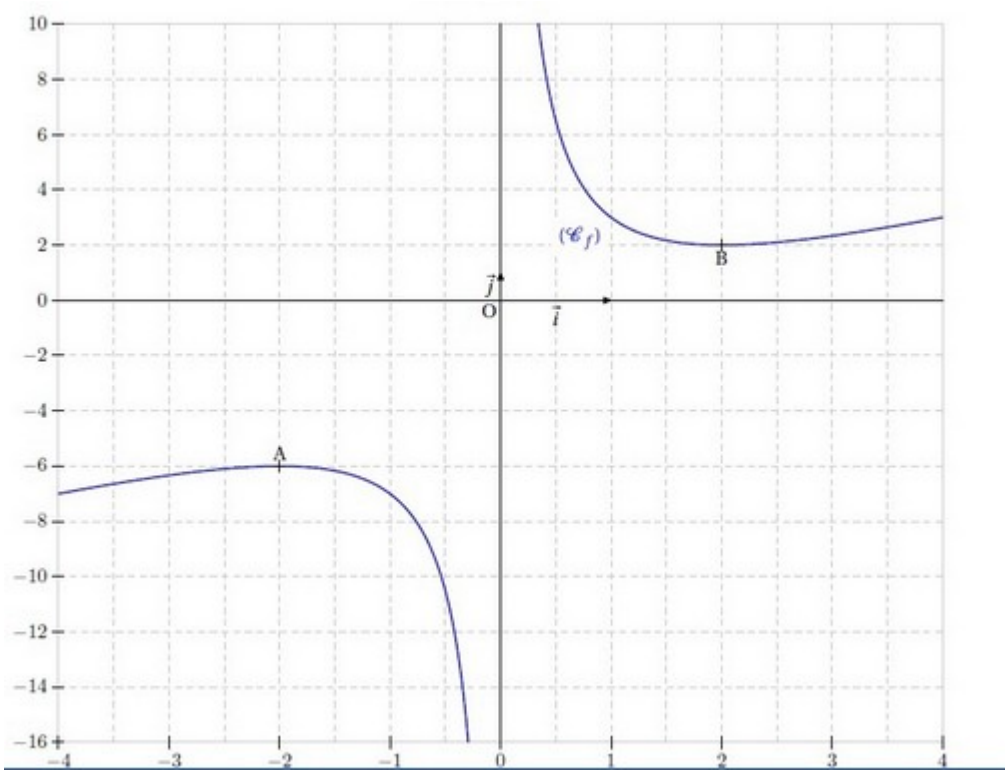
$$\Leftrightarrow x^2\geq 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)\geq 0$$

On en déduit que f est décroissante sur [-2 ; 2].

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Tracer la représentation graphique (Cf) de la fonction f sur $[-4;0[\cup]0;4]$.



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.