

Dérivée d'une fonction

Exercice 1 - Etude de fonctions numériques

Etudier la fonction f définie sur D

- a. $f(x) = -5x^2 + 10x + 4$ $D = \mathbb{R}$.
- b. $f(x) = \frac{3x+2}{x-5}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.
- c. $f(x) = \frac{-7}{x+2}$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- d. $f(x) = \sqrt{-2x+5}$ $D =]-\infty; \frac{5}{2}]$.
- e. $f(x) = \tan(4x)$ $D =]-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}[$.

Exercice 2 :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $] \boxed{x} ; -1]$ et sur $[0 ; +\infty [$ et strictement décroissante sur $[-1; 0]$.

De plus, $f(-3) = 0$, $f(-1) = 3$ $f(0) = 1$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Exercice 3 :

Etudier la fonction f définie sur D .

- a. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ $D = \mathbb{R}$.
- b. $f(x) = -\frac{3x+1}{x^2-x+1}$ $D = \mathbb{R}$.
- b. $f(x) = (1 - \sin x) \sin x$ $D = \mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Pour chacune des fonctions f suivantes :

- Indiquer l'ensemble de dérivabilité de la fonction.
- Calculer sa dérivée.

- a. $f(x) = (x^2 - 5)^4$.
- b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$.

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

d. $f(x) = (3x+6)^{-2}$.

e. $f(x) = \sqrt{3+\cos^2 x}$.

f. $f(x) = \sin(3x).\cos(2x)$.

g. $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$.

h. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$.

Exercice 5 :

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $] -1; +\infty[$ par :

- pour $n=0$, $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$

- pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}}$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.

1. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition.

Etudier le sens de variation de f_0 et construire C_0 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a. f'_n désignant la fonction dérivée de f_n , montrer que :

$$f'_n = \frac{x^{3n-1}[(6n-3)x^3+6n]}{2(1+x^3)(\sqrt{1+x^3})}$$

b. Etudier le sens de variation des fonctions f_1 et f_2 puis dresser leur tableau de variation .

c. Tracer C_1 et C_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 6 - Un exemple de fonction dérivable à dérivée non continue

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que :

1. f est continue en 0.
2. f est dérivable en 0.
3. f' n'est pas continue en 0.

Exercice 7 - Dérivation d'une composée de fonctions

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.

Démontrer que la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et que pour tout x de I :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x)v'[u(x)].$$

Exercice 8 - Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$

Démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et préciser leur fonction dérivée.

On rappelle que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

Exercice 9 - Les fonctions bijectives

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la parité de f .
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Démontrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1; 1[$.

Exercice 10 - Accroissement moyen

1. On se propose d'étudier la limite en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2}$.

Vérifier que l'on est en présence d'une forme indéterminée.

En considérant l'accroissement moyen de la fonction cosinus en $\frac{\pi}{2}$, déterminer la limite ci-dessus.

2. Par une méthode analogue, étudier la limite de f en a dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \text{ en } a = 0$$

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ en } a = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 11 - Résolution d'une équation

Démontrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 - Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-1}$.

On désigne par C_f sa représentation dans un repère.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty; +\infty; 1^-; 1^+$.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et $+\infty$.

3. Calculer la fonction dérivée f' .

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

5. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

Exercice 13 - Dérivation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \sin(x) + \cos(x)$.

On se propose d'étudier cette fonction sur $[0; 2\pi]$.

1. Calculer la dérivée f' .

2. En déduire le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

4. Démontrer que: ☐.

Exercice 14 - Détermination d'une fonction

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

On note C sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que la courbe C passe par le point $A(0; 1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1.

On sait que $f'(0) = -6$.

Déterminer les coefficients a , b et c .

Exercice 15 - Dérivée de fonctions

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

• ☐

• $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$

• $f(x) = x^5 - 2x + \frac{3}{x}$

• $f(x) = (x^3 - 2x + 1)^3$

• $f(x) = \sqrt{1 - 5x^2}$

• $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$

Exercice 16 - Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient a et b deux nombres réels.

Démontrer qu'il existe deux réels R et θ tels que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$a \cos x + b \sin x = R \cos(x - \theta).$$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos x + \sin x = 1$.

Exercice 17 -Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$.

Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0;1]$.

Exercice 18 -Théorème de bijection

Démontrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 -Exercice sur les règles opératoires

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point à l'intérieur de I .

Démontrer que si f et g sont des fonctions dérivables en a alors :

1. $f + g$ est dérivable en a .
2. fg est dérivable en a .
3. Si g est nulle au voisinage de a alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en a .

Exercice 20 - Etude d'une fonction irrationnelle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales?
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

Exercice 21 -Dérivée et dérivation

Pour chacune des fonctions f suivantes :

- Indiquer l'ensemble de dérivabilité de la fonction .
- Calculer sa dérivée .

a. $f(x) = (x^2 - 5)^4$.

b. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$.

c. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

d. $f(x) = (3x+6)^{-2}$.

e. $f(x) = \sqrt{3 + \cos^2 x}$.

f. $f(x) = \sin(3x) \cdot \cos(2x)$.

g. $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$.

h. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$.

Exercice 22 :

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $] -1; +\infty[$ par :

- pour $n=0$, $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$

- pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}}$

On désignera par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.

1. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition.

Etudier le sens de variation de f_0 et construire C_0 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a. f'_n désignant la fonction dérivée de f_n , montrer que :

$$f'_n = \frac{x^{3n-1}[(6n-3)x^3 + 6n]}{2(1+x^3)(\sqrt{1+x^3})}$$

b. Etudier le sens de variation des fonctions f_1 et f_2 puis dresser leur tableau de variation .

c. Tracer C_1 et C_2 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 23 - Limite et dérivée

Calculer les limites suivantes, dont on admettra l'existence.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 4x - 5)$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2})$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{6x-1}{2x+5})$.

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})$.

e. $\lim_{x \rightarrow \pi} (\frac{\sin x}{x})$.

f. $\lim_{x \rightarrow -3} (\frac{1-\sqrt{x+4}}{x+3})$.

Exercice 24 - asymptotes

Pour chacune des fonctions f suivantes :

- Déterminer son ensemble de définition.
- Calculer les limites aux bornes de son domaine de définition.
- En déduire l'existence d'asymptote à la courbes représentative de la fonction f et indiquer leur équation .

a. $f(x) = \frac{2x-4}{x-3}$.

b. $f(x) = \frac{4x^2-2x-1}{x^2-x-12}$.

Exercice 25 - Exercices sur l'étude de fonction extrait de sujet du baccalauréat

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

si $x \in [0;2[$, $f(x) = x^2(2-x)$;

et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x+2) = f(x)$.

1. Etudier la restriction f_0 de f à l'intervalle $[0;2]$ et construire la courbe représentative de f_0 .

Comment peut-on en déduire la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[2n;2n+2]$ où n est élément de $\mathbb{Z}$.

2. Démontrer que :

Si $x \in [2n;2n+2]$, $f(x) = (x-2n)^2(2n+2-x)$.

3. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

4. Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 26 - Fonction et dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2e^{-3x}}$.

1. Calculer $f(0)$.

2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Calculer la dérivée f' . En déduire le tableau de variations de f .

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{3}\ln 2$.

