Dérivée d'une fonction

Exercice 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x)=-4x^3+2x^2-3x+1.$
2. $f(x)=\frac{3x^2-4x+2}{2}.$
3. $f(x)=(\sqrt{x+1})\times(x^2-2).$
4. $f(x)=(2x-\sqrt{x})\times(x+4).$
5. $f(x)=\frac{1}{1-4x}.$
6. $f(x)=\frac{-3}{2x-1}.$
7. $f(x)=\frac{2x-1}{3x+2}.$
8. $f(x)=\frac{3x^2-4x+1}{2x-3}.$
9. $f(x)=(5x^2+1)^2.$
10. $f(x)=(-2x-1)^3.$
11. $f(x)=\sqrt{3x-4}.$
12. $f(x)=2x\sqrt{-3x+2}.$

Exercice 2 :

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. f(x)= $3x^2$-x+1 avec a= -1.
2. $f(x)=\frac{2x-1}{x-2}$ avec a= 3.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}$ avec a= 9.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{-x^2+2x-1}{x}\ .$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1. Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est horizontale .
2. Existe-t-il des points de la courbe C où la tangente admet un coefficient directeur égal à - 2 ?

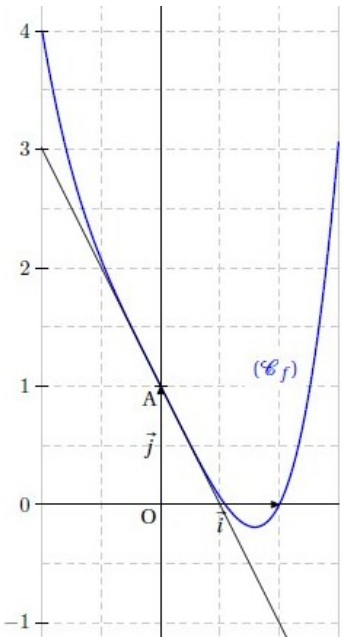
3 Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=$.

Exercice 4 - Equation de la tangente à une courbe représentative

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x^4-2x+1$.
Soit (Cf) sa courbe représentative.

1. Donner, en justifiant, l'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point A d'abscisse 0.

2. Tracer dans un même repère la courbe (Cf) et la tangente (T) sur l'intervalle [- 1 ; 1,5].



Exercice 5 - Calculer une limite

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2005}-1}{h}$.

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1+x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f. Calculer f ' (0).

2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h. En déduire la limite ci-dessus.

Exercice 6 - Prix de revient et vitesse d'un camion

Un camion doit faire un trajet de 150 km.
Sa consommation de gasoil est de $6+\frac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h.
Le prix du gasoil est de 0,9 € le litre et on paie le chauffeur 12 € par heure.

1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v.

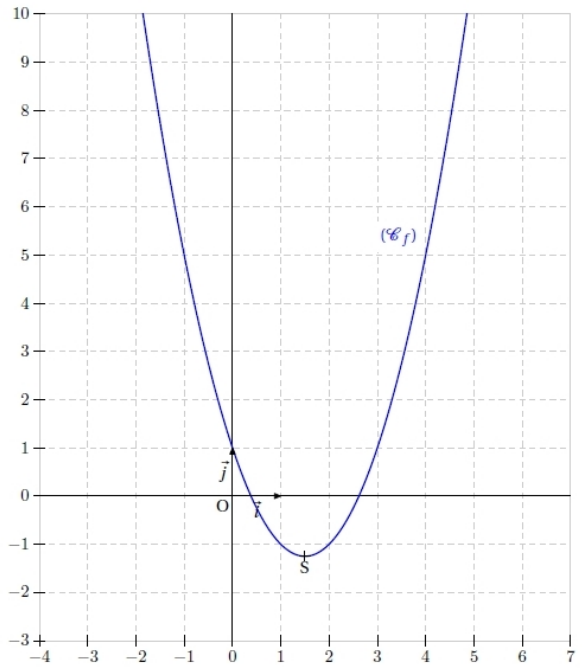
2. Calculer le prix de revient P(v) du trajet en fonction de v.

3. Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient P(v) de la course soit minimal ?

Exercice 7 - Sommet d'une parabole

Soit (P) la parabole définie par la fonction $f(x)=x^2-3x+1$.
Calculer les coordonnées de son sommet S.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 8 - Etude d'un rectangle

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm².

2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

a. Exprimer S en fonction de la largeur l.

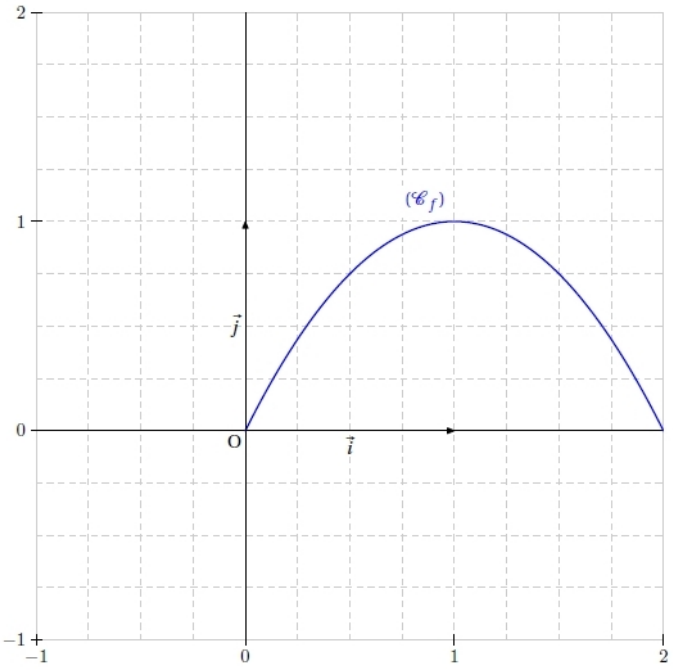
b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Tracer la représentation graphique (Cf) de la fonction f sur [0 ; 2].

c. En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 m et l'aire S est maximale.



Exercice 9 - Fonction numérique et racine

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.
On note (Cf) sa représentation graphique.

1.Calculer la dérivée f ' de f puis étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

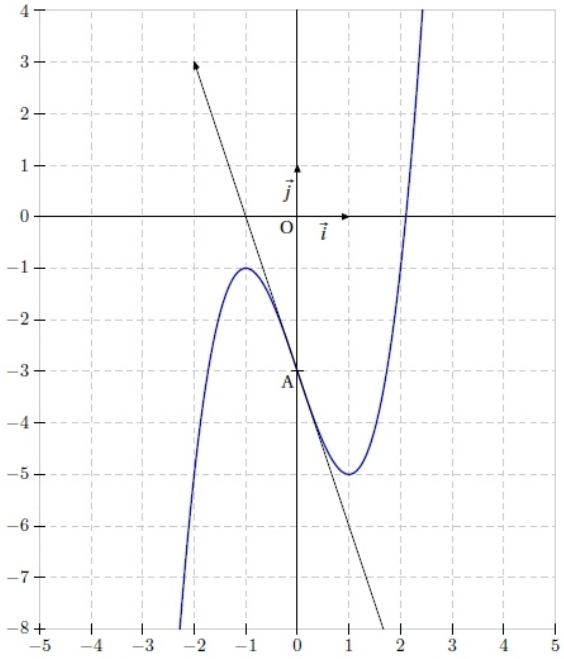
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

4. Tracer (T) et (Cf) dans un même repère.

5. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle [2 ; 3].

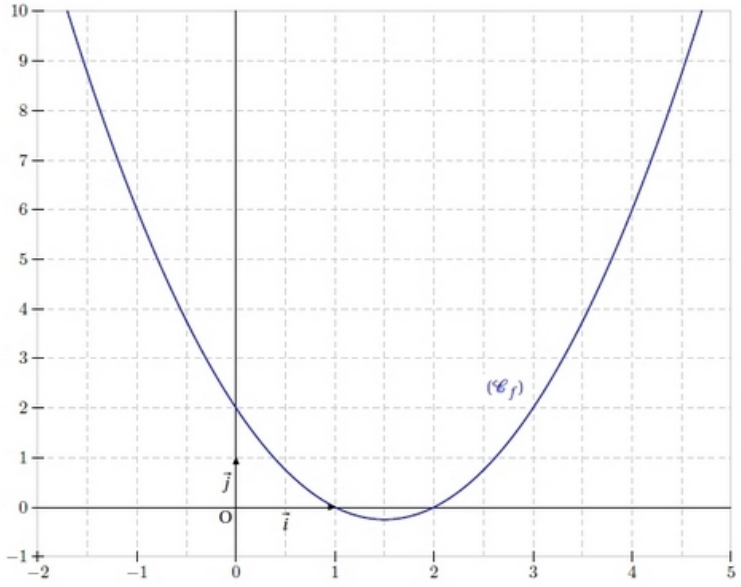
6. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 10 - Tableau de variation et équation

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur R par : $f(x)=x^2-3x+2.$
2. Résoudre l'équation f(x) = 0.



Exercice 11 - Etude de deux fonctions et des tangentes

On considère la fonction définie par $f(x)=x^2-x-1$.
On note (Cf) sa courbe représentative.
On considère également la fonction g définie par g(x) = 3 - x.

On note (D) sa représentation graphique.

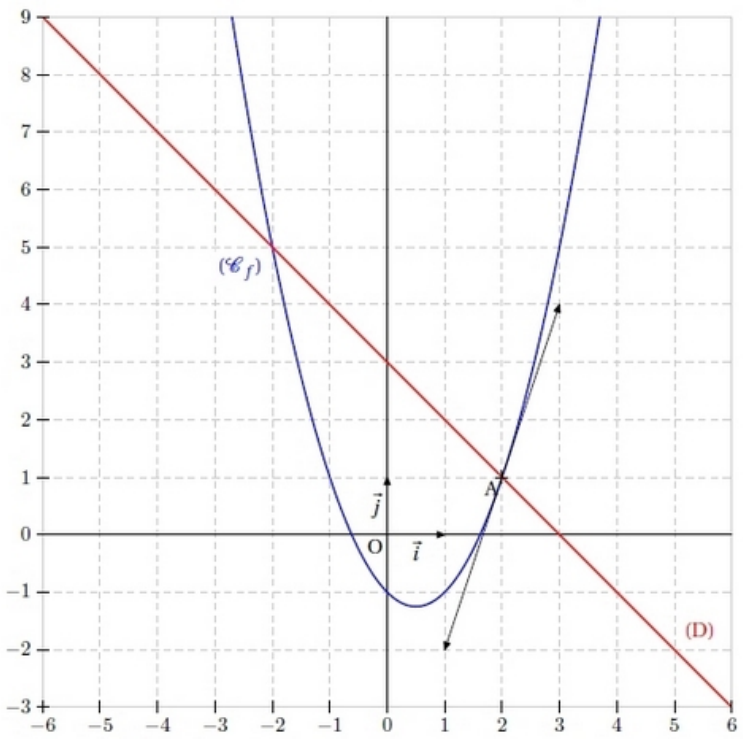
1. Calculer la dérivée f' de f.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) au point d'abscisse $x_0 = 2$.

3. Résoudre par le calcul l'équation g(x) = f(x).

4. Préciser les coordonnées des points d'intersections de (Cf) et (D).

5. Tracer sur un même repère les droites (T), (D) et la courbe (Cf).



Exercice 12 - Déterminer la dérivée de fonctions numériques

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
$g(x) = (2x+3)(3x-7)$
$h(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ *pour* $x \neq \frac{1}{3}$
$k(x) = (2x^2+3x+1)^2$

Exercice 13 - Dérivée de plusieurs fonctions

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x)=x^2$
$g(x)=3x^4-2x^3+5x-4$
$h(x)=\sqrt{x}(1-\frac{1}{x})$
$k(x)=\frac{x+5}{x^2+1}$

Exercice 14 - Valeur absolue et dérivabilité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=|2x+3|$.

Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 - Dérivée d'une fonction puissance

Démontrez que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors:

a) u^2 est dérivable sur I et $(u^2)'=2uu'$.

b) u^3 est dérivable sur I et $(u^3)'=3u^2u'$.

Exercice 16 - Sens de variation

On considère la fonction f définie par $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(x)\leq,\frac{1}{4}$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-,(,x-\frac{1}{2},)^2$.

4. En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty;\frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+6x+5$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y=$.

Exercice 18

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=3x-4x^3$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{-4x-4}{x^2+2x+5}.$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses .

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A.

Exercice 20

Etudier les variations sur]-2 ; 1[de la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{-5x^2+4x-8}{x^2+x-2}.$$

Exercice 21 - Courbe représentative, dérivée et tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$

On appelle C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1) a) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour C_f ?

b) Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f

2) a) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

b) Cette tangente recoupe C_f en deux autres points.

b.1) Montrez que les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation :

$$x^4-8x^2+12x-5=0$$

b.2) Vérifiez que l'on a :

$$x^4-8x^2+12x-5=(x-1)^2(x^2+2x-5)$$

b.3) En déduire les abscisses de ces points.

Exercice 22 - Parabole et tangentes

Soit (P) la parabole d'équation $y=x^2-3x+\frac{5}{4}$

et (H) l'hyperbole d'équation $y=\frac{3(3x+5)}{4(x+3)}$.

Le plan est ramené à un repère orthonormal.

1) Montrer que (P) et (H) rencontrent l'axe (Oy) en un même point A.

2) Montrer que les tangentes en A aux courbes (P) et (H) sont perpendiculaires.

Rappel : Dans un r.o.n deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à –1 .

Exercice 23 - Tangente et déterminer un réel

Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation $y=(m-1)x^2+(3m+2)x+4$

admette au point d'abscisse –1 une tangente de coefficient directeur 6.

Exercice 24 - Déterminer l'abscisse d'une tangente

Soit la fonction $f:x\rightarrow\frac{-x^2+2x-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et soit (C) sa courbe représentative.

Déterminer les abscisses des points de (C) où la tangente :

1) est horizontale

2) est parallèle à la droite d'équation $y=-\frac{2}{3}x-5$.

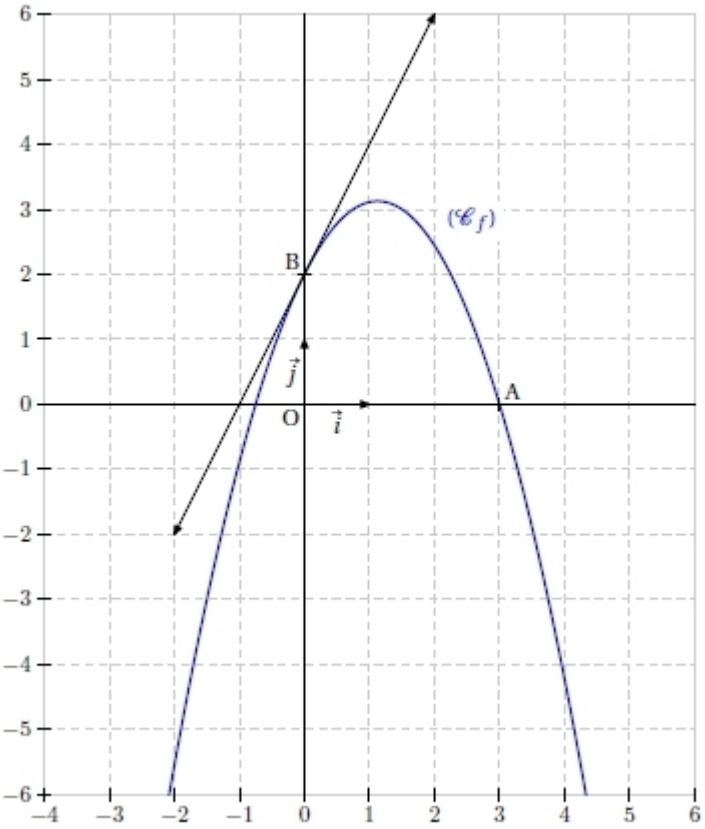
Exercice 25 - Retrouver l'expression d'une fonction carrée

Une parabole (P) admet dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ une équation du type :

$$y = ax^2+bx+c \ (a \neq 0)$$

1. Déterminer les coefficients a, b et c sachant que (P) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation y = 2x + 2 pour tangente.

2. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de (P) avec (Ox).

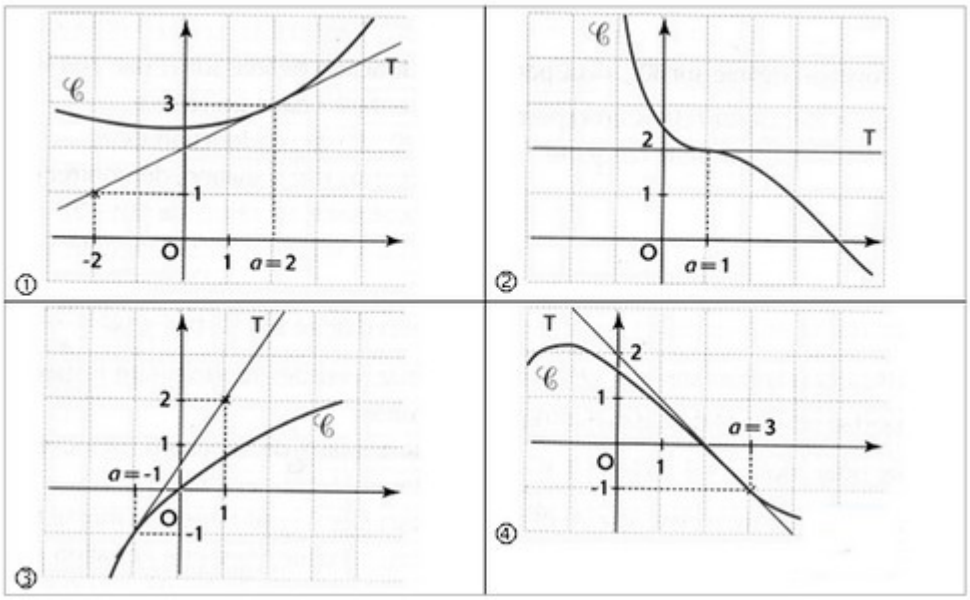


Exercice 26 - Nombre dérivée et tangente à une courbe

(C) représenter une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite T est tangente à (C) au point d'abscisse a.

Dans chaque cas détermine $f'(a)$ et donner une équation de la tangente T.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



Exercice 27 - Equation de tangente à une parabole

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

dont la parabole (Cf) passe par les points A (0 ; 1) et B (2 ; 3).

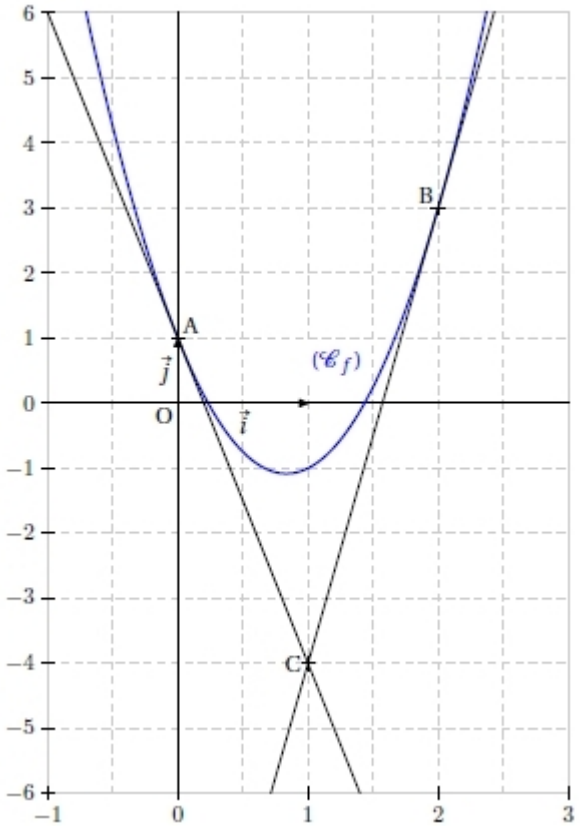
Les tangentes en A et B se coupent au point C (1 ; - 4).

1. Déterminer une équation des tangentes à (Cf).

En déduire f ' (0) et f ' (2).

2. Exprimer f ' (x) en fonction de a, b et c.

3. A l'aide des valeurs de f ' (0), f ' (2) et f(0), trouver trois équations vérifiées par a, b et c puis déterminer l'expression algébrique de la fonction f.



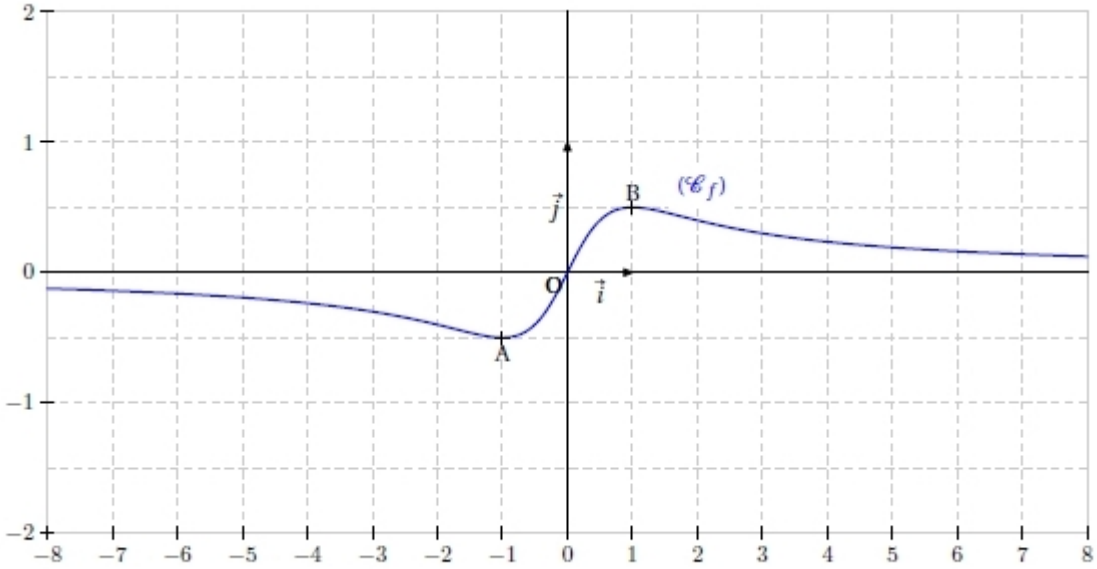
Exercice 28 - Limite en l'infini et tableau de variation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Calculer la dérivée f '' de f et étudier son signe.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

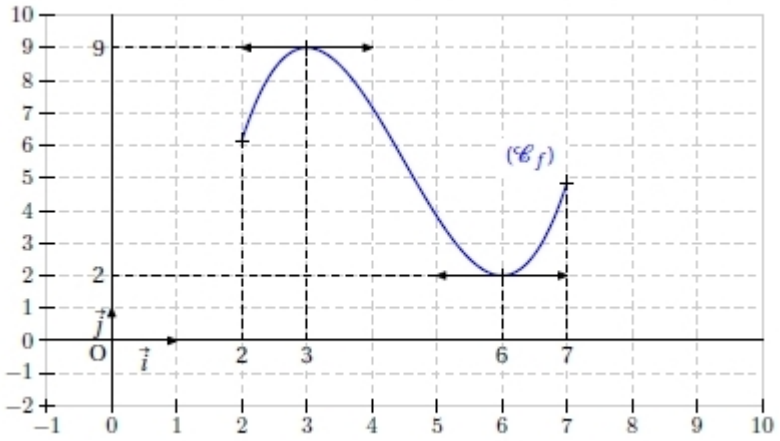
Exercice 29 - Lecture graphique

Ci-dessous est donnée la courbe (Cf) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [2 ; 7].

1. Par lecture graphique, donner sans justifier la valeur de :

f(3) ; f ' (3) ; f(6) ; f ' (6).

2. Le graphique ne permet pas la lecture de f ' (4).
Préciser néanmoins son signe. Expliquer.

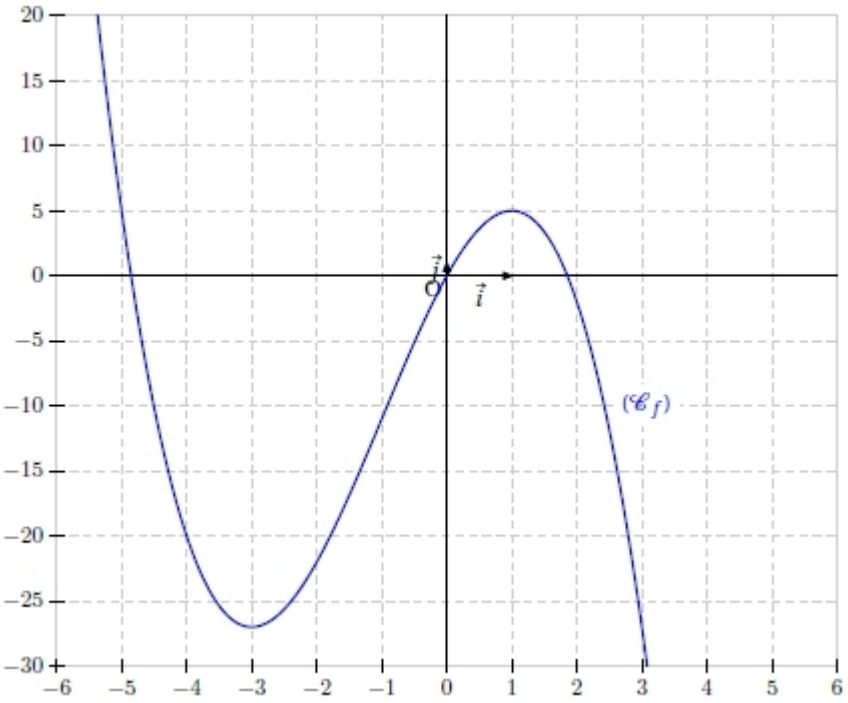


Exercice 30 - Calcul d'une dérivée et tableau de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.



Exercice 31 - Lecture graphique du nombre dérivé

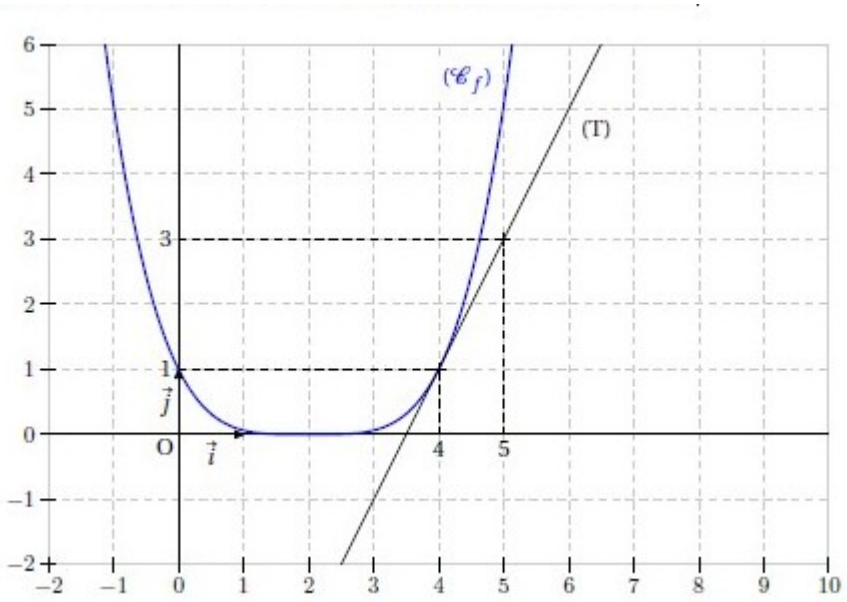
Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe (Cf) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(1-\frac{x}{2})^4$ ainsi que la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse $x_0=4$.

1. Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre f ' (4).

2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre f ' (3).

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

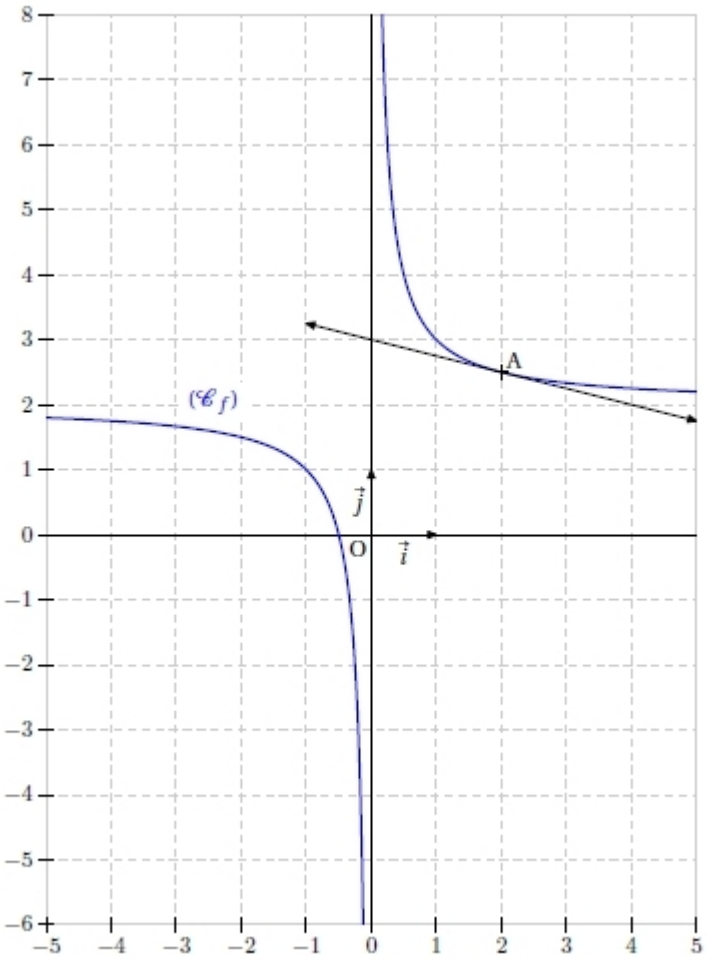


Exercice 32 - Dérivabilité en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}+2$.

1. Montrer que f est dérivable en 2.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) représentant f au point d'abscisse 2.



Exercice 33 - Calcul de dérivée et du nombre dérivé

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}}\ sur\ ]0;+\infty[$

$g(x)=(\frac{1}{1+x})^3\ sur\ \mathbb{R}-\{-1\}$

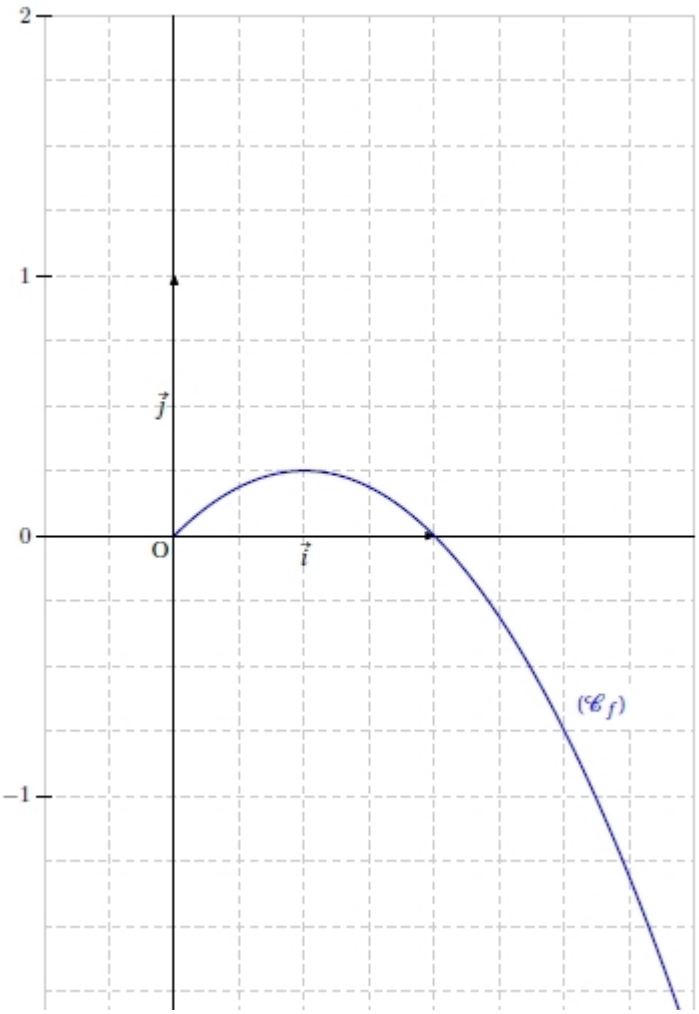
2. Calculer f ' (16) et g ' (2).

Exercice 34 - Sens de variation et encadrement

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(1-x)$.

2. En déduire un encadrement de f(x) sur [0 ; 2].

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.



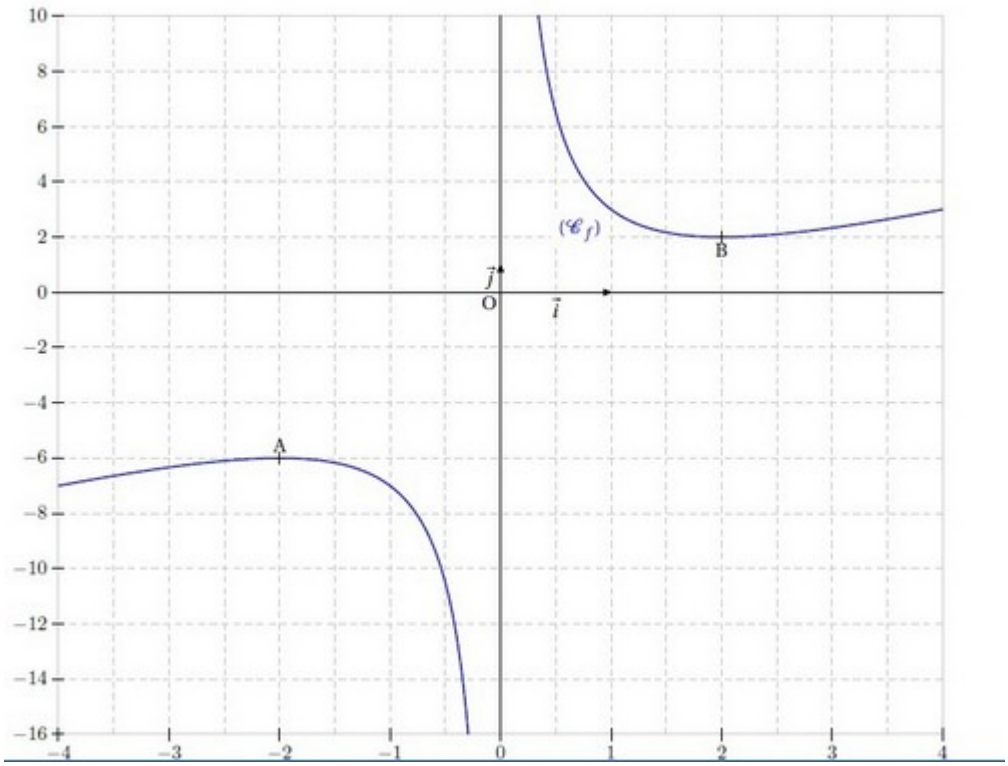
Exercice 35 - Etude d'une fonction numérique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x-2+\frac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f ' et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. Tracer la représentation graphique (Cf) de la fonction f sur $[-4;0[\cup]0;4]$.



Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.