

Dérivée d'une fonction

Exercice 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1.$

2. $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{2}.$

3. $f(x) = (\sqrt{x+1}) \times (x^2 - 2).$

4. $f(x) = (2x - \sqrt{x}) \times (x + 4).$

5. $f(x) = \frac{1}{1-4x}.$

6. $f(x) = \frac{-3}{2x-1}.$

7. $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}.$

8. $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x-3}.$

9. $f(x) = (5x^2 + 1)^2.$

10. $f(x) = (-2x - 1)^3.$

11. $f(x) = \sqrt{3x-4}.$

12. $f(x) = 2x\sqrt{-3x+2}.$

Exercice 2 :

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2 - x + 1$ avec $a = -1.$

2. $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$ avec $a = 3.$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ avec $a = 9$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x}.$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

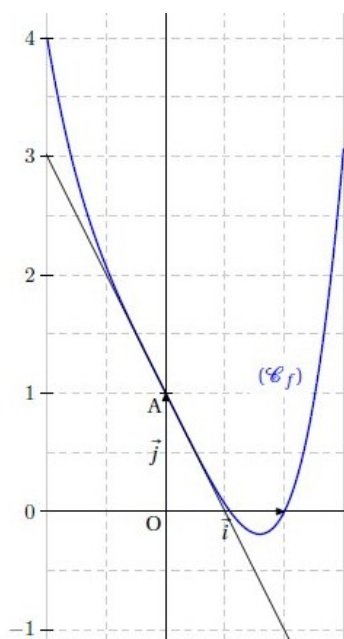
1. Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est horizontale .
2. Existe-t-il des points de la courbe C où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 ?
- 3 Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y =$.

Exercice 4 - Equation de la tangente à une courbe représentative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x + 1$.

Soit (C_f) sa courbe représentative.

1. Donner, en justifiant, l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point A d'abscisse 0 .
2. Tracer dans un même repère la courbe (C_f) et la tangente (T) sur l'intervalle $[-1 ; 1,5]$.



Exercice 5 - Calculer une limite

Le but de cet exercice est de calculer la limite suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{2005} - 1}{h}.$$

Pour cela on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^{2005}$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f . Calculer $f'(0)$.
2. Calculer l'accroissement moyen de la fonction f entre 0 et h . En déduire la limite ci-dessus.

Exercice 6 - Prix de revient et vitesse d'un camion

Un camion doit faire un trajet de 150 km.

Sa consommation de gasoil est de $6 + \frac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h .

Le prix du gasoil est de 0,9 € le litre et on paie le chauffeur 12 € par heure.

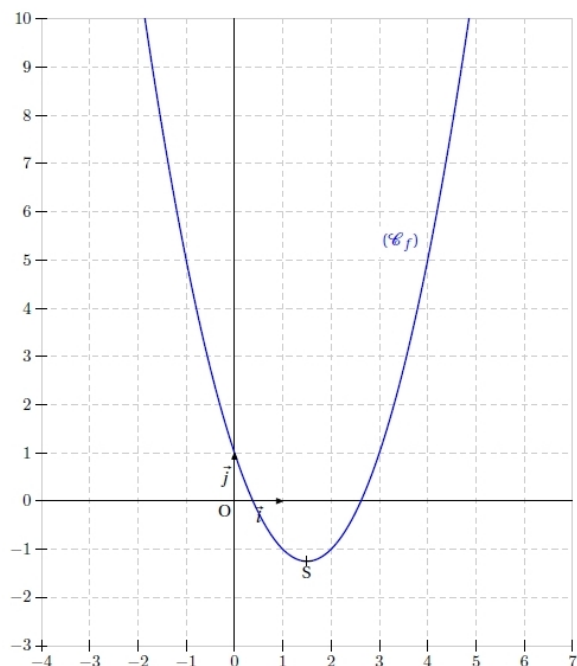
1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v .
2. Calculer le prix de revient $P(v)$ du trajet en fonction de v .
3. Quel doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient $P(v)$ de la course soit minimal ?



Exercice 7 - Sommet d'une parabole

Soit (P) la parabole définie par la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

Calculer les coordonnées de son sommet S .



Exercice 8 - Etude d'un rectangle

On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm².

2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

a. Exprimer S en fonction de la largeur l .

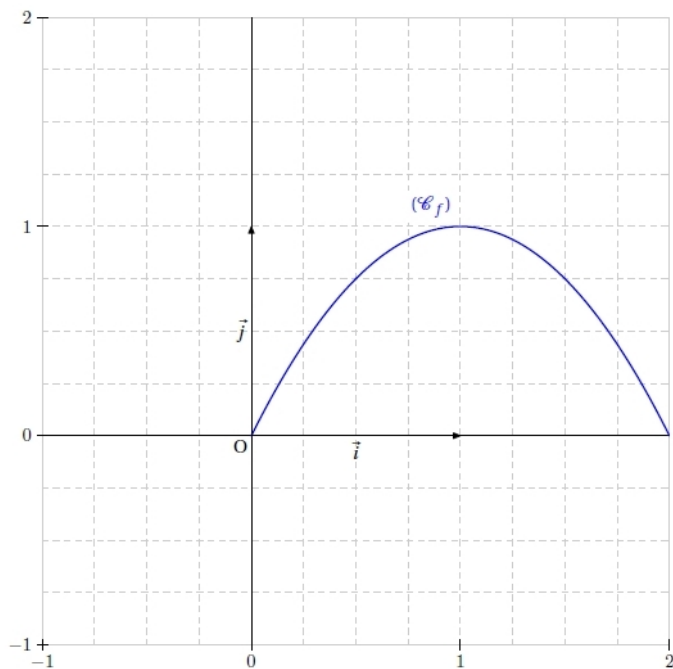
b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.

Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Tracer la représentation graphique (C_f) de la fonction f sur $[0 ; 2]$.

c. En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 m et l'aire S est maximale.

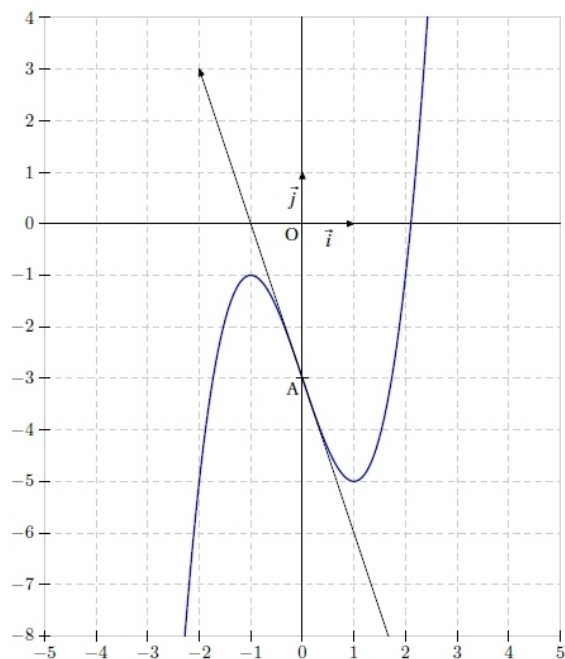


Exercice 9 - Fonction numérique et racine

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

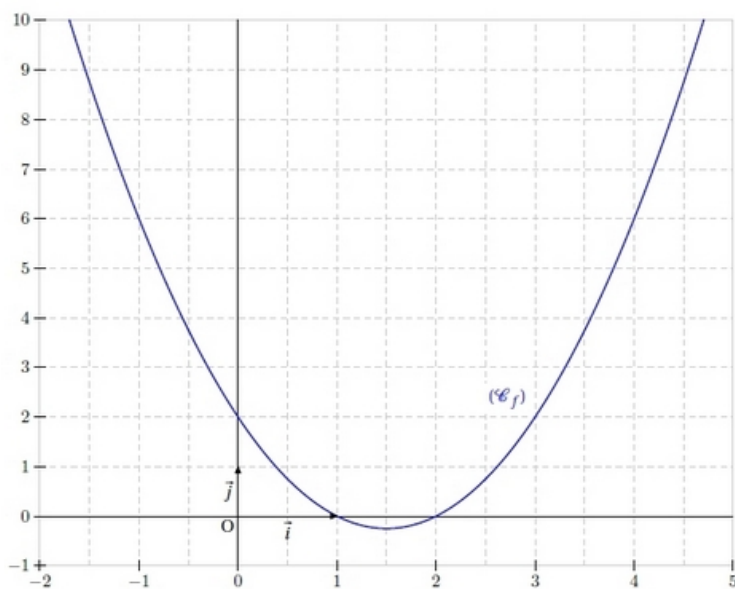
On note (C_f) sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
4. Tracer (T) et (C_f) dans un même repère.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2 ; 3]$.
6. Donner une valeur approchée de α , par défaut, à 10^{-1} près.



Exercice 10 - Tableau de variation et équation

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.



Exercice 11 - Etude de deux fonctions et des tangentes

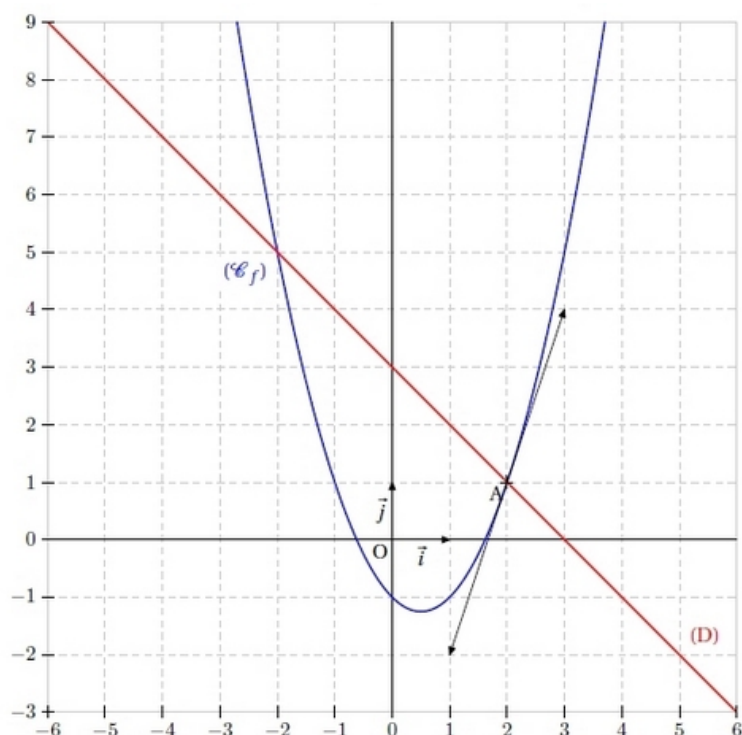
On considère la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$.

On note (C_f) sa courbe représentative.

On considère également la fonction g définie par $g(x) = 3 - x$.

On note (D) sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f .
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 2$.
3. Résoudre par le calcul l'équation $g(x) = f(x)$.
4. Préciser les coordonnées des points d'intersections de (C_f) et (D).
5. Tracer sur un même repère les droites (T), (D) et la courbe (C_f).



Exercice 12 - Déterminer la dérivée de fonctions numériques

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 1$$

$$g(x) = (2x + 3)(3x - 7)$$

$$h(x) = \frac{2x+4}{3x-1} \text{ pour } x \neq \frac{1}{3}$$

$$k(x) = (2x^2 + 3x + 1)^2$$

Exercice 13 - Dérivée de plusieurs fonctions

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$$

$$h(x) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$k(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$$

Exercice 14 - Valeur absolue et dérivabilité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |2x+3|$.

Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 - Dérivée d'une fonction puissance

Démontrez que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors:

a) u^2 est dérivable sur I et $(u^2)' = 2uu'$.

b) u^3 est dérivable sur I et $(u^3)' = 3u^2u'$.

Exercice 16 - Sens de variation

On considère la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $f(x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x = \frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

4. En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $] -\infty; \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y =$.

Exercice 18

Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 4x^3$.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{-4x-4}{x^2+2x+5}.$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A.

Exercice 20

Etudier les variations sur $] -2 ; 1[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{-5x^2+4x-8}{x^2+x-2}.$$

Exercice 21 - Courbe représentative, dérivée et tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$

On appelle C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

- 1) a) Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour C_f ?
b) Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f
- 2) a) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

b) Cette tangente recoupe C_f en deux autres points.

b.1) Montrez que les abscisses de ces points sont les solutions de l'équation :

$$x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = 0$$

b.2) Vérifiez que l'on a :

$$x^4 - 8x^2 + 12x - 5 = (x-1)^2(x^2 + 2x - 5)$$

b.3) En déduire les abscisses de ces points.

Exercice 22 - Parabole et tangentes

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$

et (H) l'hyperbole d'équation $y = \frac{3(3x+5)}{4(x+3)}$.

Le plan est ramené à un repère orthonormal.

1) Montrer que (P) et (H) rencontrent l'axe (Oy) en un même point A.

2) Montrer que les tangentes en A aux courbes (P) et (H) sont perpendiculaires.

Rappel : Dans un r.o.n deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à -1 .

Exercice 23 - Tangente et déterminer un réel

Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation $y = (m-1)x^2 + (3m+2)x + 4$

admette au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur 6.

Exercice 24 - Déterminer l'abscisse d'une tangente

Soit la fonction $f: x \rightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et soit (C) sa courbe représentative.

Déterminer les abscisses des points de (C) où la tangente :

1) est horizontale

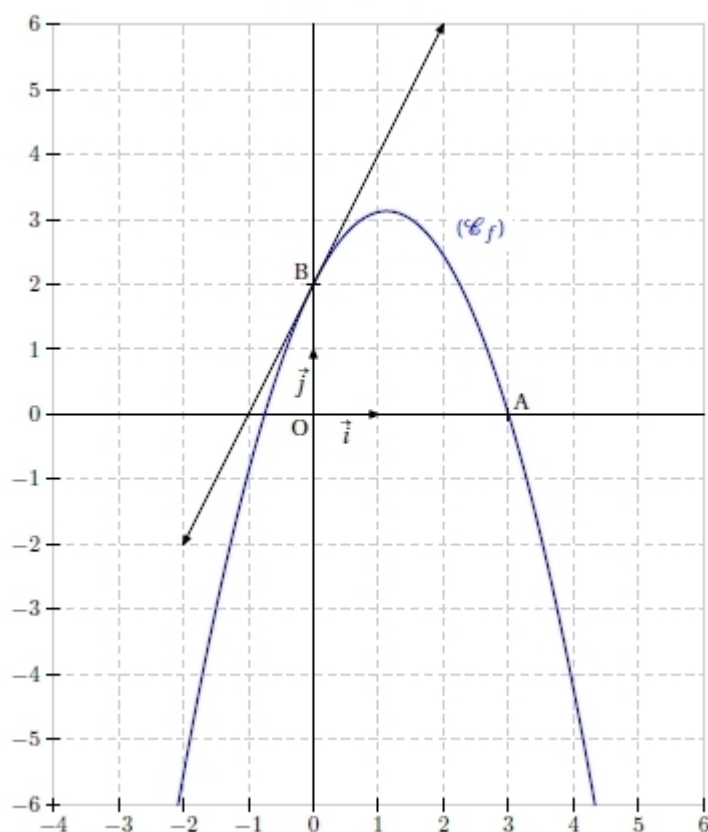
2) est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

Exercice 25 - Retrouver l'expression d'une fonction carrée

Une parabole (P) admet dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

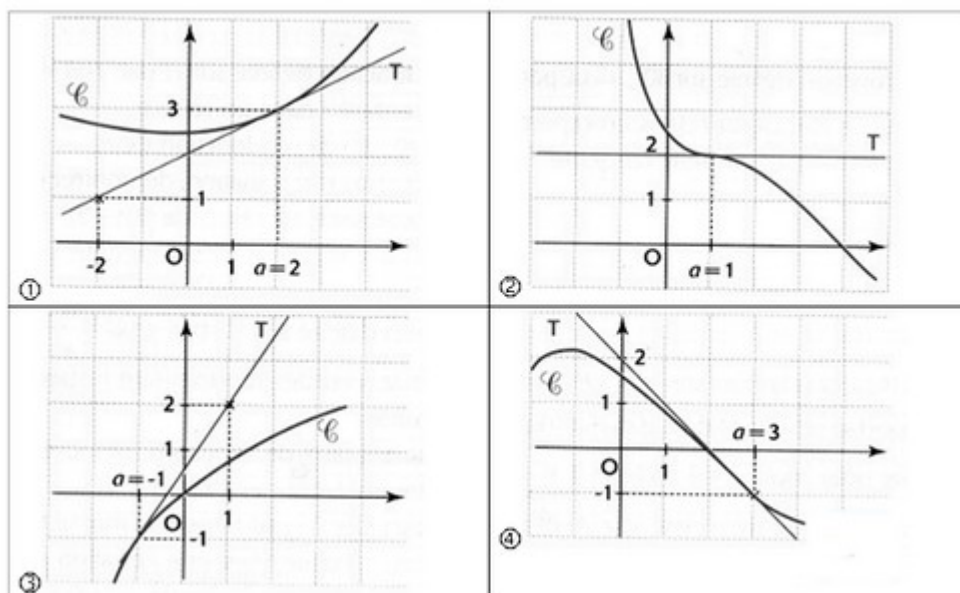
1. Déterminer les coefficients a , b et c sachant que (P) coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.
2. Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de (P) avec (Ox) .



Exercice 26 - Nombre dérivée et tangente à une courbe

(C) représenter une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite T est tangente à (C) au point d'abscisse a .

Dans chaque cas détermine $f'(a)$ et donner une équation de la tangente T .



Exercice 27 - Equation de tangente à une parabole

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dont la parabole (C_f) passe par les points $A(0; 1)$ et $B(2; 3)$.

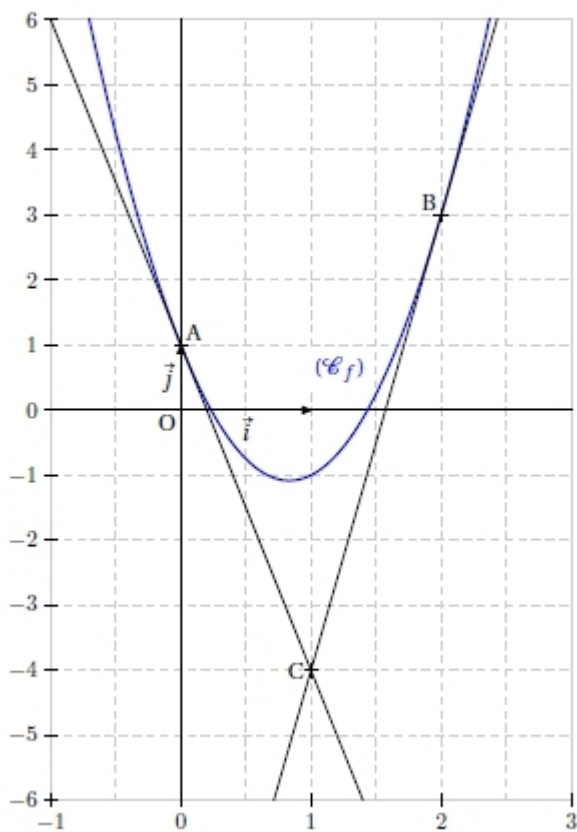
Les tangentes en A et B se coupent au point $C(1; -4)$.

1. Déterminer une équation des tangentes à (C_f) .

En déduire $f'(0)$ et $f'(2)$.

2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a , b et c .

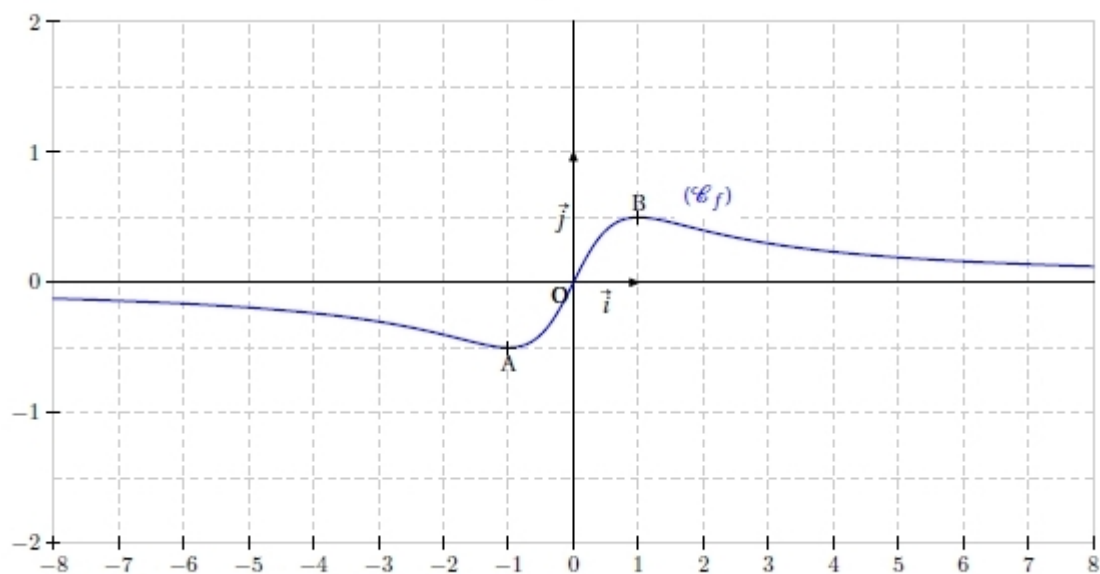
3. A l'aide des valeurs de $f'(0)$, $f'(2)$ et $f(0)$, trouver trois équations vérifiées par a , b et c puis déterminer l'expression algébrique de la fonction f .



Exercice 28 - Limite en l'infini et tableau de variation

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f .



Exercice 29 - Lecture graphique

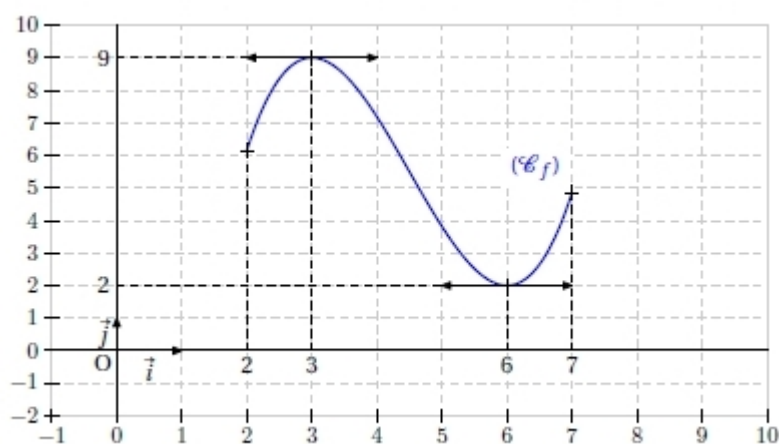
Ci-dessous est donnée la courbe ($\mathcal{C}_f$) représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[2 ; 7]$.

1. Par lecture graphique, donner sans justifier la valeur de :

$f(3)$; $f'(3)$; $f(6)$; $f'(6)$.

2. Le graphique ne permet pas la lecture de $f'(4)$.

Préciser néanmoins son signe. Expliquer.

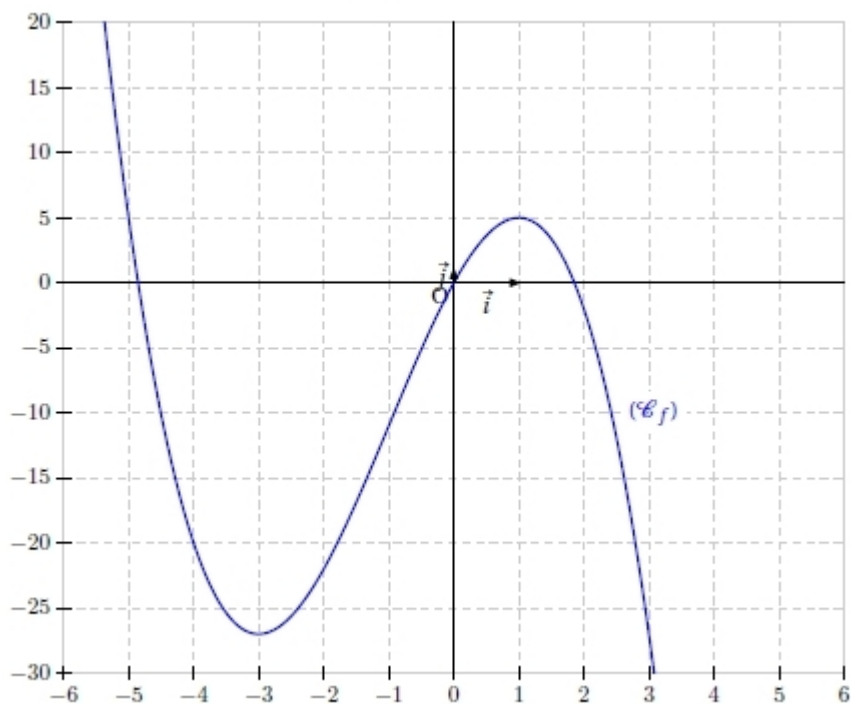


Exercice 30 - Calcul d'une dérivée et tableau de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

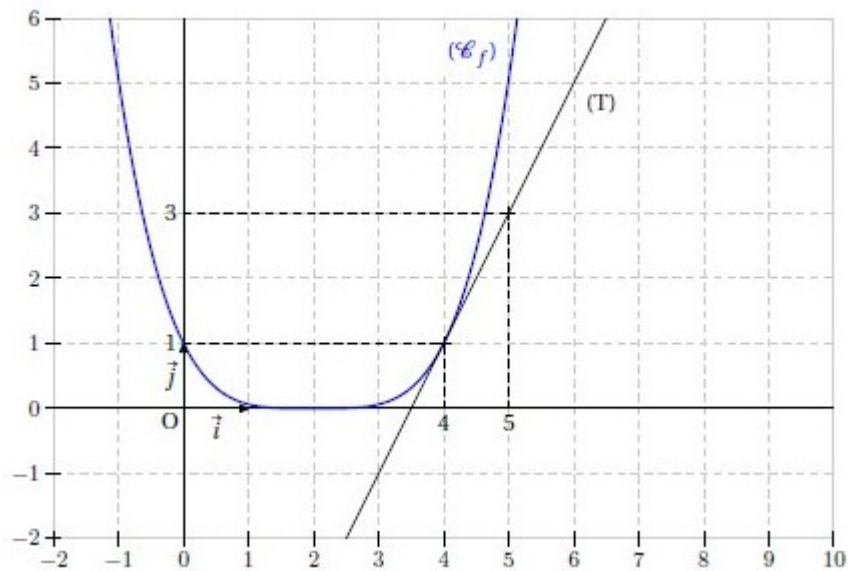


Exercice 31 - Lecture graphique du nombre dérivé

Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe (C_f) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4 \text{ ainsi que la tangente (T) à } (C_f) \text{ au point d'abscisse } x_0 = 4.$$

1. Donner, par lecture graphique, et sans justifications, la valeur du nombre $f'(4)$.
2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f , la valeur du nombre $f'(3)$.



Exercice 32 - Dérivabilité en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

1. Montrer que f est dérivable en 2.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) représentant f au point d'abscisse 2.



Exercice 33 - Calcul de dérivée et du nombre dérivé

1. Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

$$f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}} \text{ sur }]0; +\infty[$$

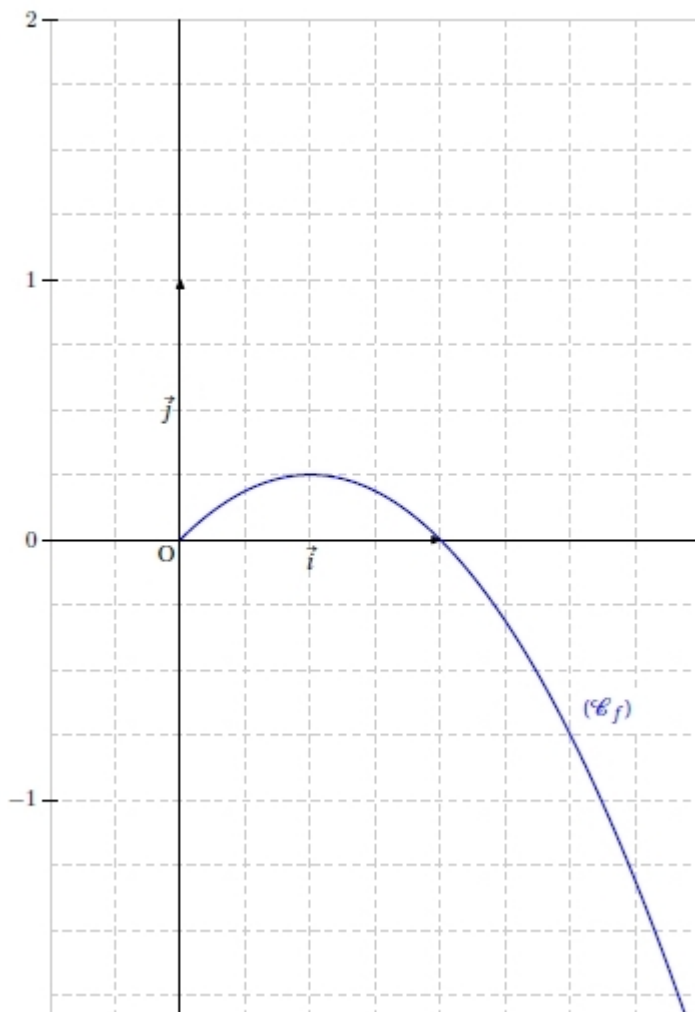
$$g(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1\}$$

2. Calculer $f'(16)$ et $g'(2)$.

Exercice 34 - Sens de variation et encadrement

1. Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$.

2. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $[0 ; 2]$.



Exercice 35 - Etude d'une fonction numérique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x}$.

1. Calculer la dérivée f' et étudier son signe.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Tracer la représentation graphique (C_f) de la fonction f sur $[-4; 0[\cup]0; 4]$.

