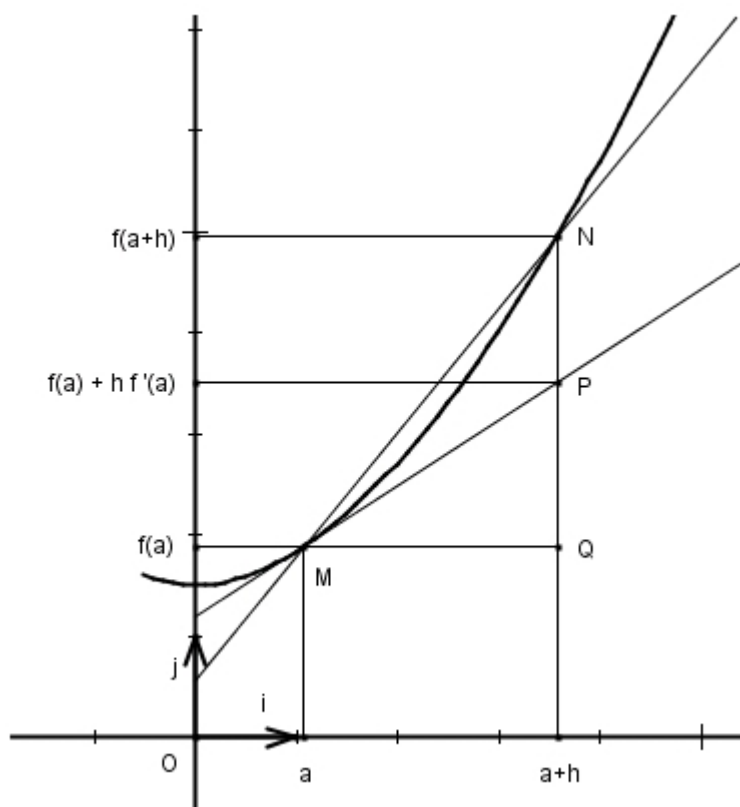


Dérivée d'une fonction

I. Nombre dérivé - Fonction dérivée - tangente à une courbe.

Définition :

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I . La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. M et N sont deux points de (C) d'abscisses respectives $a \in I$ et $x = a+h \in I$ où $h \in \mathbb{R}^*$.



M et N ont donc pour coordonnées: $M(a; f(a))$ et $N(a+h; f(a+h))$, c'est à dire: $N(a+h; f(a+h))$.

On a donc: $\overrightarrow{MN}(x-a; f(x)-f(a))$ soit $\overrightarrow{MN}(h; f(a+h)-f(a))$

La droite (MN) sécante à (C) a donc pour coefficient directeur:

$$m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Si la courbe (C) possède en M une tangente de coefficient directeur d, alors lorsque le point N se rapproche de M, c'est à dire lorsque x tend vers a, ou, ce qui revient au même, lorsque h tend vers 0,

les sécantes (MN) vont atteindre une position limite qui est celle de la tangente(MP) en M à (C).

Ceci peut alors se traduire à l'aide des coefficients directeurs par:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d, \text{ c'est à dire : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = d.$$

On a donc: $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d \right] = 0.$

Si nous appelons Φ , la fonction définie pour $h \in \mathbb{R}^*$ et $a+h \in I$ par :

$$\Phi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d.$$

on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = 0 \text{ et } h\Phi(h) = f(a+h)-f(a)-dh, \text{ ce qui s'écrit aussi: } f(a+h) = f(a) + dh + h\Phi(h).$$

Réciproquement, s'il existe un réel d et une fonction Φ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ et $a+h \in I$, on ait: $f(a+h) = f(a) + dh + h\Phi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(h) = 0$,

on en déduit que: $\Phi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - d$ et donc que: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = d.$

Ceci nous permet donc de donner les trois définitions équivalentes:

Définition 1 :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel d tel que, pour tout réel h proche de 0, on ait

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = d$$

On dit que la fonction f est dérivable en a et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .

Définition 2 :

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si $a \in I$.

Lorsqu'il existe un nombre réel d tel que, pour tout réel $x \in I$ et proche de a , on ait:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d$$

On dit que la fonction f est dérivable en a et que $d = f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .

II. Fonction dérivable sur un intervalle I. Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur I

Définition :

On dit que **f est dérivable sur un intervalle I** lorsqu'elle est dérivable en tout point de I .

Lorsque f est dérivable sur un intervalle I , la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f sur I . Cette fonction est notée f' .

Interprétation graphique du nombre dérivé.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I . Si $a \in I$ et si f est dérivable en $x = a$, alors : La courbe représentative de f possède une tangente au point  et le coefficient directeur de cette tangente est le nombre dérivé $f'(a)$ de la fonction f en $x = a$.

Remarques :

Si le graphique de f ne possède pas de tangente au point M d'abscisse $x = a$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a . C'est le cas de la fonction valeur absolue en $x = 0$.

Le graphique d'une fonction peut fort bien posséder une tangente en un point sans que la fonction soit dérivable en ce point : il suffit que le coefficient directeur de cette tangente n'existe pas (tangente parallèle à l'axe des ordonnées).

C'est le cas de la fonction racine carrée en $x = 0$.

III. Équation de la tangente à une courbe

Définition :

Si fonction f est dérivable en a , la tangente (MP) à la courbe (C) en M d'abscisse $x = a$ existe. Elle a pour coefficient directeur $m = f'(a)$.

Son équation est donc de la forme: $y = mx + p$, où $m = f'(a)$ et son ordonnée à l'origine p peut être calculée.

Il suffit d'écrire que (MP) passe par $m = f'(a)$.

On a donc: $f(a) = f'(a) \times a + p$. Ceci donne: $p = f(a) - a \times f'(a)$.

Donc: $y = f'(a)x + f(a) - a f'(a)$ que l'on écrit souvent sous l'une des formes, plus faciles à retenir:

Equation de la tangente au point $\boxed{x}$:

Définition :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \quad \text{ou} \quad y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

IV. Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Nous admettrons sans démonstration les théorèmes suivants:

Théorème 1 :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I , alors pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) = 0$.

Théorème 2 :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Théorème 3 :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) > 0$ (sauf peut-être en des points où $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I .
- Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) < 0$ (sauf peut-être en des points où $f'(x) = 0$), alors f est strictement décroissante sur I .

En particulier:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$.

Propriété :

- Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$.
- Si, pour tout $x \in [a;b]$, on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$.

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

· Pour tout $x \in]-\infty; 0]$, on a $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante sur $]-\infty; 0]$.

· Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.

Bien que $f'(0) = 0$, on a de façon plus précise :

· Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, on a $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

· Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

V. Changement de signe de la dérivée et extremum d'une fonction

Nous admettrons sans démonstration les théorèmes suivants:

Théorème:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I ,

Et si f admet un maximum local ou un minimum local en $x = a$ différent des extrémités de l'intervalle I ,

Alors: $f'(a) = 0$.

1. Cas particulier où f est dérivable sur un intervalle ouvert.

Propriété :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I ,

Et si f admet un maximum local ou un minimum local en $a \in I$,

Alors: $f'(a) = 0$.

Propriété :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I ,

et si $a \in I$ et si $f'(x)$ s'annule pour $x = a$ en changeant de signe,

Alors $f(a)$ est un extremum local de f sur I .

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$.

$f'(x)$ s'annule en $x = -1$ et $x = 2$ en changeant de signe, car :

- pour x appartenant à $]-\infty; -1[$, on a : $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$
- .
- pour x appartenant à $]-1; 2[$, on a : $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-1; 2[$.
- pour x appartenant à $]2; +\infty[$, on a : $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]2; +\infty[$.

La fonction f possède donc un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 2$.

Toute cette étude peut être résumée dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	12	-15	$+\infty$		

Voici un morceau des représentations graphiques de f et de f' :

