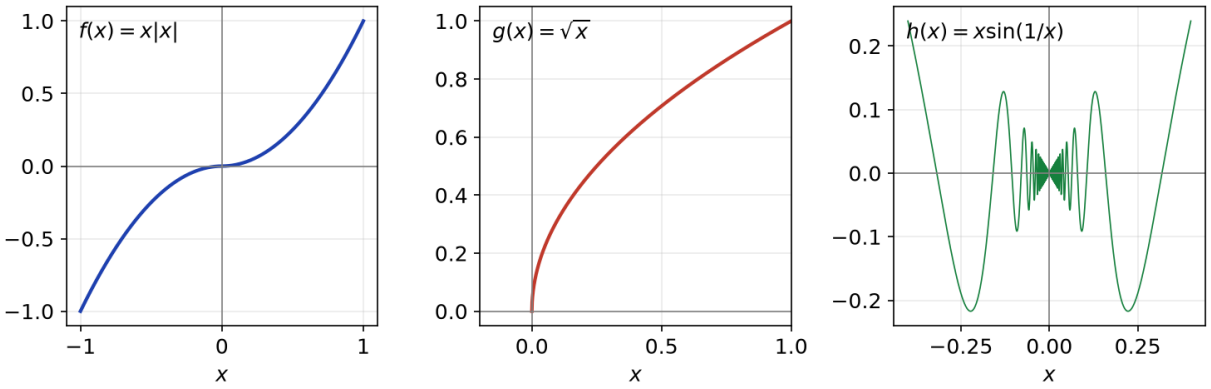
Dérivation

Exercice 1 : Dérivabilité en un point

On considère les trois fonctions suivantes, représentées au voisinage de 0 sur la figure ci-dessous : $f(x) = x|x|$ sur $\mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$, et h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$.



1. Montrez que f est dérivable en 0 et donnez $f'(0)$.
2. Montrez que g n'est pas dérivable en 0. Interprétez graphiquement.
3. Montrez que h est continue en 0.
4. Montrez que h n'est pas dérivable en 0.

Exercice 2 : Raccord dérivable de deux expressions

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Soit a et b deux réels. On définit f sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$ si $0 \leq x \leq 1$, et $f(x) = a\sqrt{x} + b$ si $x > 1$.

1. À quelle condition sur a et b la fonction f est-elle continue en 1 ?
2. Calculez la dérivée à gauche de f en 1. Sous la condition de la question 1, calculez sa dérivée à droite en 1.
3. Déterminez a et b pour que f soit dérivable en 1. Donnez alors l'équation de la tangente en ce point.
4. Soit $k(x) = |x^2 - 1|$. Calculez $k'_g(1)$ et $k'_d(1)$. La fonction k est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 3 : Calculs de dérivées de composées

Pour chaque fonction, précisez un intervalle sur lequel elle est dérivable, puis calculez sa dérivée.

1. $f_1(x) = (x^2 + 1)^5$ sur $\mathbb{R}$.
2. $f_2(x) = e^{\sin x}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_3(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$.
4. $f_4(x) = x^x$ sur $]0, +\infty[$.
5. $f_5(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Tangente et approximation affine

Soit $f(x) = \sqrt{1 + x}$ sur $[0, +\infty[$.

1. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
2. Montrez que, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
3. Montrez que, pour tout $x \geq 0$, $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$.
4. Déduisez-en un encadrement de $\sqrt{1{,}02}$ d'amplitude 5×10^{-5}.

Exercice 5 : Extremums locaux et condition nécessaire

Soit $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Déterminez les points où f' s'annule sur $\mathbb{R}$. Étudiez les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$. Sont-ils globaux ?
2. On restreint f au segment $[-2, 2]$. Déterminez le maximum et le minimum de f sur ce segment, et tous les points où ils sont atteints.
3. En $x = 2$, f atteint son maximum sur $[-2, 2]$, mais $f'(2) \neq 0$. Expliquez pourquoi cela ne contredit pas le cours.
4. Donnez un exemple de fonction dérivable dont la dérivée s'annule en un point sans extremum local, et un exemple de fonction ayant un extremum en un point où elle n'est pas dérivable.

Exercice 6 : Valeurs du point intermédiaire des accroissements finis

Dans chaque cas, vérifiez les hypothèses de l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle indiqué, puis déterminez tous les réels c qui conviennent.

1. $f(x) = x^2$ sur $[a, b]$, avec $a < b$.
2. $f(x) = x^3$ sur $[0, 3]$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

3. $f(x) = \ln x$ sur $[1, e]$.

4. Pour $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$, montrez qu'aucun c ne convient. Quelle hypothèse manque ?

Exercice 7 : Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^x$.

1. Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $g = f^{-1}$.

2. Justifiez que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimez $g'(y)$ en fonction de y et de $g(y)$, sans exponentielle.

3. Calculez $g(1)$ et $g'(1)$. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

4. Justifiez que g est deux fois dérivable et calculez $g''(1)$.

Exercice 8 : Dérivées de arcsin et arctan

1. Montrez que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

2. Montrez que $\arcsin$ n'est pas dérivable en 1.

3. Rappelez la dérivée de $\arctan$, en justifiant son existence.

4. Soit $\varphi(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. Calculez φ', puis simplifiez $\varphi(x)$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

Exercice 9 : Nombre de racines réelles d'une équation polynomiale

Soit $P(x) = x^5 - 5x + 1$.

1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et ayant au moins $m \geq 2$ zéros distincts. Montrez que f' a au moins $m - 1$ zéros distincts.
2. Déterminez les zéros réels de P'. Déduisez-en que P a au plus trois racines réelles.
3. Calculez $P(-2)$, $P(-1)$, $P(1)$ et $P(2)$. Concluez que P a exactement trois racines réelles et localisez-les.

Exercice 10 : Théorème de Rolle itéré

1. Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$ tel que $f(a) = f(c) = f(b)$. Montrez qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que $f''(d) = 0$.
2. Soit $n \geq 1$ et f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I, qui s'annule en $n + 1$ points distincts de I. Montrez que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I.
3. Soit α, β, γ trois réels. Montrez que l'équation $e^x = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ a au plus trois solutions réelles.

Exercice 11 : Encadrement du logarithme par les accroissements finis

1. Soit $0 < a < b$. Montrez que $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$.
2. Déduisez-en que, pour tout $x > 0$, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
3. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$. Montrez que $\ln(n+1) < H_n \leq 1 + \ln n$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

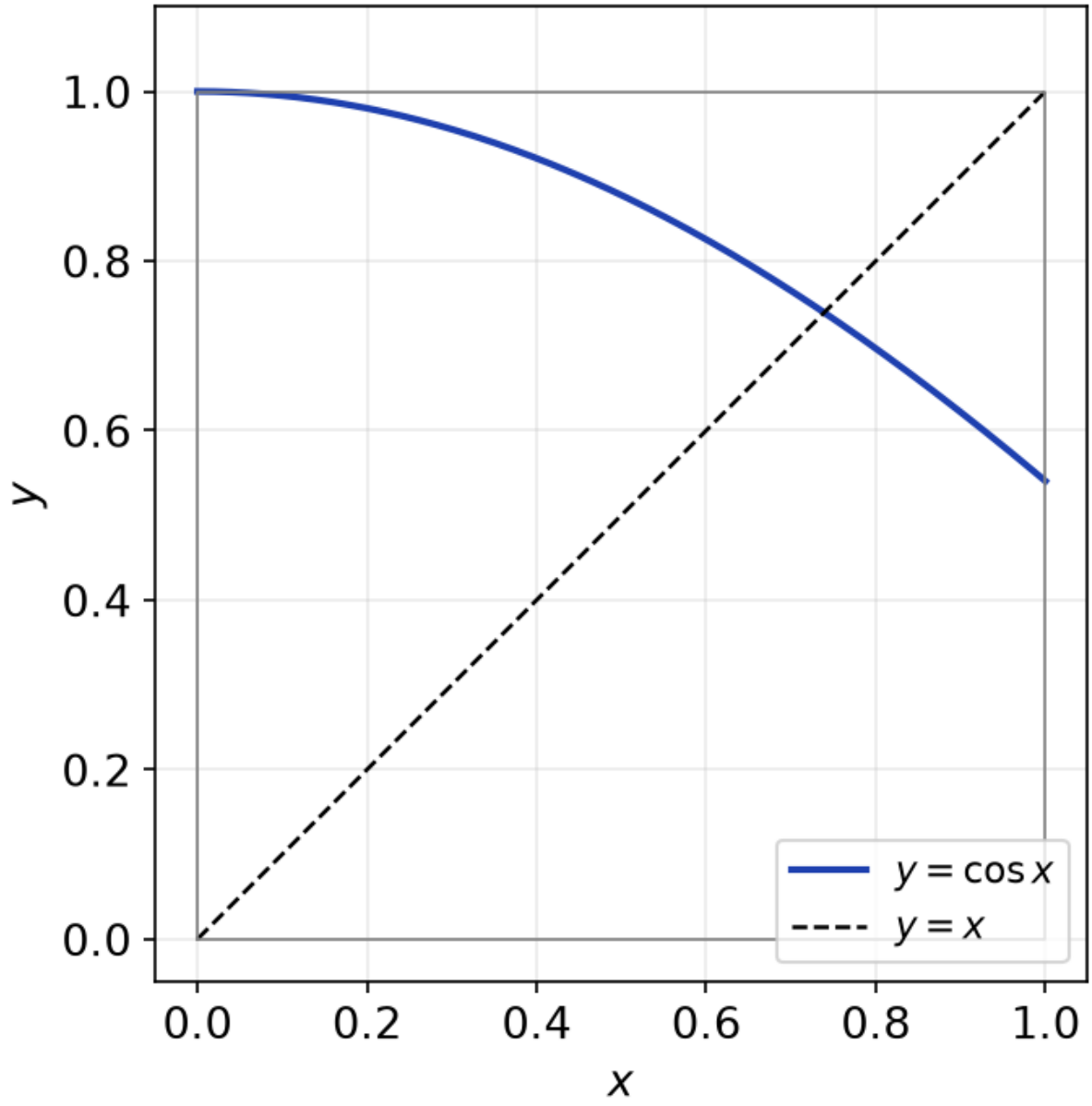
4. Déduisez-en la limite de H_n, puis la limite de $\frac{H_n}{\ln n}$.

Exercice 12 : Majorer un écart avec l'inégalité des accroissements finis

1. Montrez que, pour tous réels x et y, $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
2. Montrez que, pour tous réels x et y, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.
3. Montrez que, pour tous $x, y \geq 1$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
4. Montrez que $\frac{1}{202} < \sqrt{10001} - 100 < \frac{1}{200}$.

Exercice 13 : Suite récurrente et fonction contractante

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La figure ci-dessous représente la fonction cosinus et la droite $y = x$ sur $[0, 1]$.



1. Montrez que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.

2. Montrez que $u_n \in [0, 1]$ pour tout n.

3. Montrez que, pour tout n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1) |u_n - \alpha|$.

4. Déduisez-en que (u_n) converge vers α. Sachant que $\ln(\sin 1) \approx -0{,}1726$, trouvez un rang n à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 14 : Monotonie d'une fonction et signe de la dérivée

Soit $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pour $x > 0$.

1. On pose $u(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ pour $x > 0$. Étudiez le sens de variation de u et sa limite en $+\infty$. Déduisez-en le signe de u.
2. Montrez que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez les limites de f en 0^+ et en $+\infty$. Déduisez-en que $1 < f(x) < e$ pour tout $x > 0$.
4. La fonction $k(x) = -\frac{1}{x}$ vérifie $k'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle croissante sur $\mathbb{R}^*$? Expliquez.

Exercice 15 : Stricte monotonie et dérivée qui s'annule

1. Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f' \geq 0$. Démontrez que f est croissante sur $[a, b]$.
2. On suppose de plus que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Montrez que f est strictement croissante.
3. Montrez que $x \to x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Déduisez-en que $\sin x < x$ pour tout $x > 0$.
4. La fonction $x \to x^3$ est strictement croissante et sa dérivée s'annule en 0. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Exercice 16 : Dérivées n-ièmes usuelles

Calculez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième des fonctions suivantes. Justifiez chaque formule par récurrence.

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur $]-\infty, 1[$.
2. $s(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
3. $\ell(x) = \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$, pour $n \geq 1$.
4. $r(x) = \frac{1}{x^2-1}$ sur $]1, +\infty[$. On pourra d'abord écrire r comme combinaison de $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{x+1}$.

Exercice 17 : Formule de Leibniz

1. Calculez la dérivée n-ième de $x \to x^2 e^x$.
2. Soit $f(x) = (x^2+1)\sin x$. Exprimez $f^{(n)}(x)$ à l'aide de la formule de Leibniz.
3. Déduisez-en $f^{(n)}(0)$ selon la parité de n. Vérifiez le résultat pour $n = 1$ et $n = 3$.

Exercice 18 : Fonction dérivable non de classe C1

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = g(0) = 0$.

1. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez f'.
2. Montrez que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrez que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrez que g n'est pas deux fois dérivable en 0.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

Exercice 19 : Somme des carrés des coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour $0 \leq k \leq n$, calculez la dérivée k-ième de $x \to x^n$.
2. Calculez de deux façons la dérivée n-ième de $x \to x^{2n}$: directement, puis en écrivant $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ et en appliquant la formule de Leibniz.
3. Déduisez-en l'identité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
4. Vérifiez cette identité pour $n = 3$.

Exercice 20 : Une fonction de classe C infini plate en 0

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

1. Montrez que, pour tout polynôme Q, $Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \to 0$ quand $x \to 0^+$.
2. Montrez par récurrence que, pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$ pour $x > 0$. Donnez une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.
3. Montrez par récurrence que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$, pour tout n.
4. Concluez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Calculez P_1 et P_2.

Exercice 21 : Théorème des accroissements finis généralisé

1. Soit f et g continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. En appliquant le théorème de Rolle

à $h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x)$, montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

2. On suppose de plus $f(a) = g(a) = 0$, g' ne s'annulant pas sur $]a, b[$, et $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \ell$ quand $x \to a^+$. Montrez que g ne s'annule pas sur $]a, b]$, puis que $\frac{f(x)}{g(x)} \to \ell$ quand $x \to a^+$.

3. Appliquez deux fois ce résultat pour calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3}$. Que vaut la limite en 0^- ?

Exercice 22 : Racines des polynômes de Legendre

Soit $n \geq 1$ et $Q(x) = (x^2 - 1)^n$. On note $L_n = Q^{(n)}$.

1. Justifiez que -1 et 1 sont racines de $Q^{(k)}$ pour tout $k \in \{0, 1..., n-1\}$.

2. Montrez par récurrence que, pour $1 \leq k \leq n$, $Q^{(k)}$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1, 1[$.

3. Déduisez-en que L_n est un polynôme de degré n dont les n racines sont réelles, simples et situées dans $]-1, 1[$.

4. Calculez L_2 et L_3 et vérifiez le résultat.

Exercice 23 : Problème : le théorème de Darboux

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On veut montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même lorsqu'elle n'est pas continue.

1. Soit $a < b$ dans I avec $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrez que f atteint son minimum sur $[a, b]$ en un point c, puis que $c \neq a$ et $c \neq b$.

Téléchargé depuis https://mathovore.fr - Mathovore site de maths.

2. Déduisez-en qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3. Soit $a < b$ dans I et λ un réel strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$. Déduisez-en que $f'(I)$ est un intervalle.

4. Montrez que la fonction H définie par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ n'est la dérivée d'aucune fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $F(0) = 0$. Montrez que, pour tout $\delta > 0$, F' prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$ sur $]0, \delta[$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : dérivation, cours de maths en L1
- À maîtriser avant : Limites et continuité des fonctions
- Chapitre précédent : Limites et continuité des fonctions
- Chapitre suivant : Fonctions usuelles et fonctions réciproques
- Tester vos connaissances : QCM de maths en L1 par chapitre
- Le sommaire : tous les chapitres de maths de L1 et la licence de maths de L1 à L3