

Dérivation

I. Nombre dérivé et dérivation en un point

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. De plus, f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I . L'idée est simple : on compare f à une fonction affine au voisinage de a .

1. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition :

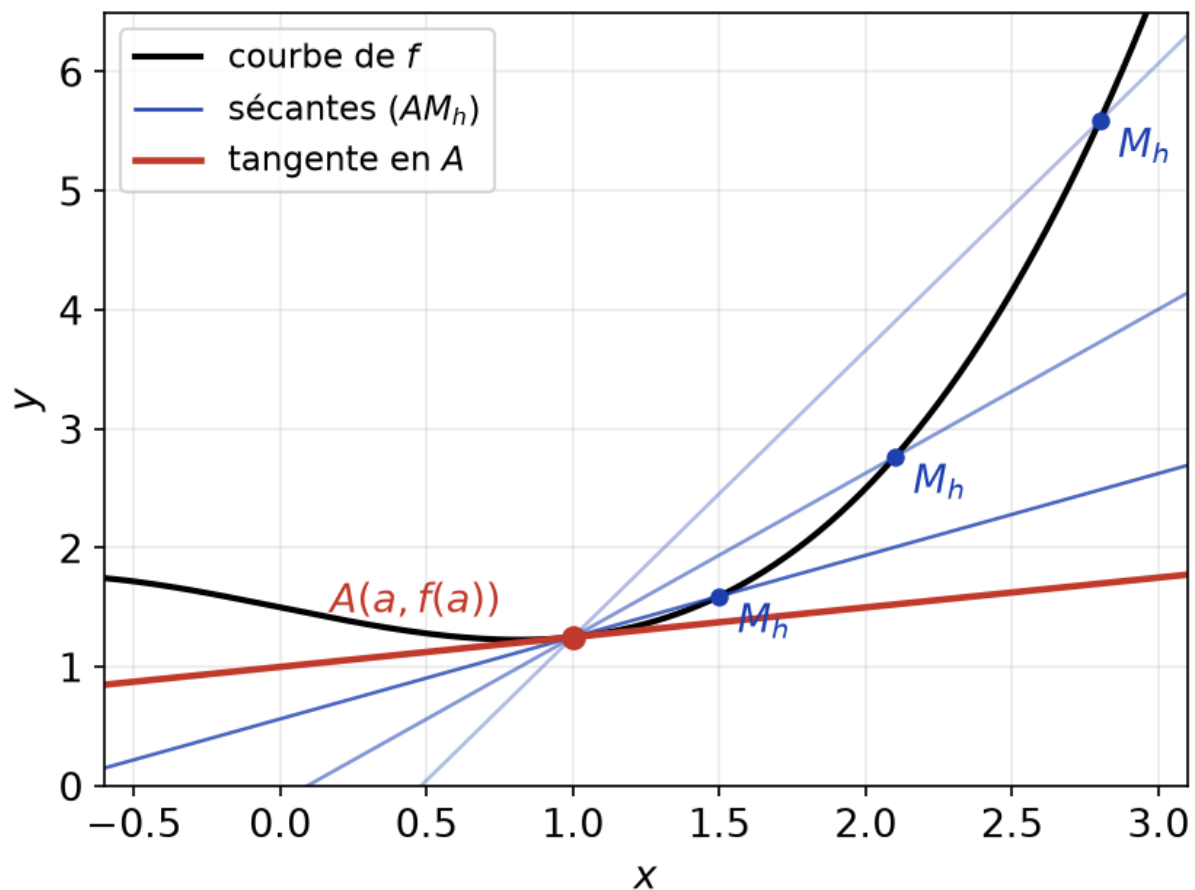
Le **taux d'accroissement** de f en a est la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On dit que f est **dérivable en** a si τ_a admet une limite finie en a . Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$. Autrement dit,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Géométriquement, $\tau_a(x)$ est la pente de la sécante qui joint $A(a, f(a))$ au point $M(x, f(x))$. Ainsi, quand x tend vers a , les sécantes pivotent autour de A . Comme le montre la figure ci-dessous, elles se rapprochent d'une droite limite : la tangente.



Définition :

Si f est dérivable en a , la **tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \neq a$, on a $\tau_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$. Par conséquent, $\tau_a(x) \rightarrow 2a$ quand $x \rightarrow a$. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$. En $a = 1$, la tangente a pour équation $y = 2x - 1$.

2. Développement limité à l'ordre 1

La dérivabilité se traduit aussi par une approximation affine. Cette forme est souvent la plus commode dans les démonstrations.

Proposition :

La fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe un réel ℓ et une fonction ε de limite nulle en 0 tels que, pour tout h avec $a + h \in I$,

$$f(a + h) = f(a) + \ell h + h \varepsilon(h).$$

Dans ce cas, $\ell = f'(a)$.

Démonstration :

Supposons f dérivable en a . On pose $\varepsilon(h) = \tau_a(a + h) - f'(a)$ pour $h \neq 0$, et $\varepsilon(0) = 0$. Alors ε tend vers 0 et l'égalité a lieu avec $\ell = f'(a)$. Réciproquement, si l'égalité a lieu, on divise par $h \neq 0$. On obtient $\tau_a(a + h) = \ell + \varepsilon(h)$, qui tend vers ℓ .

Proposition :

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Démonstration :

D'après la proposition précédente, $f(a + h) - f(a) = h (f'(a) + \varepsilon(h))$. Le second membre est un produit de deux facteurs : le premier tend vers 0 , le second reste borné. Donc

$$f(a+h) \rightarrow f(a) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Attention :

La réciproque est fausse. En effet, la fonction $x \rightarrow |x|$ est continue en 0 . Cependant, son taux d'accroissement vaut 1 à droite et -1 à gauche : il n'a pas de limite en 0 .

II. Dérivabilité à gauche et à droite

Certaines fonctions sont définies par des formules différentes de part et d'autre d'un point. On étudie alors le taux d'accroissement séparément de chaque côté.

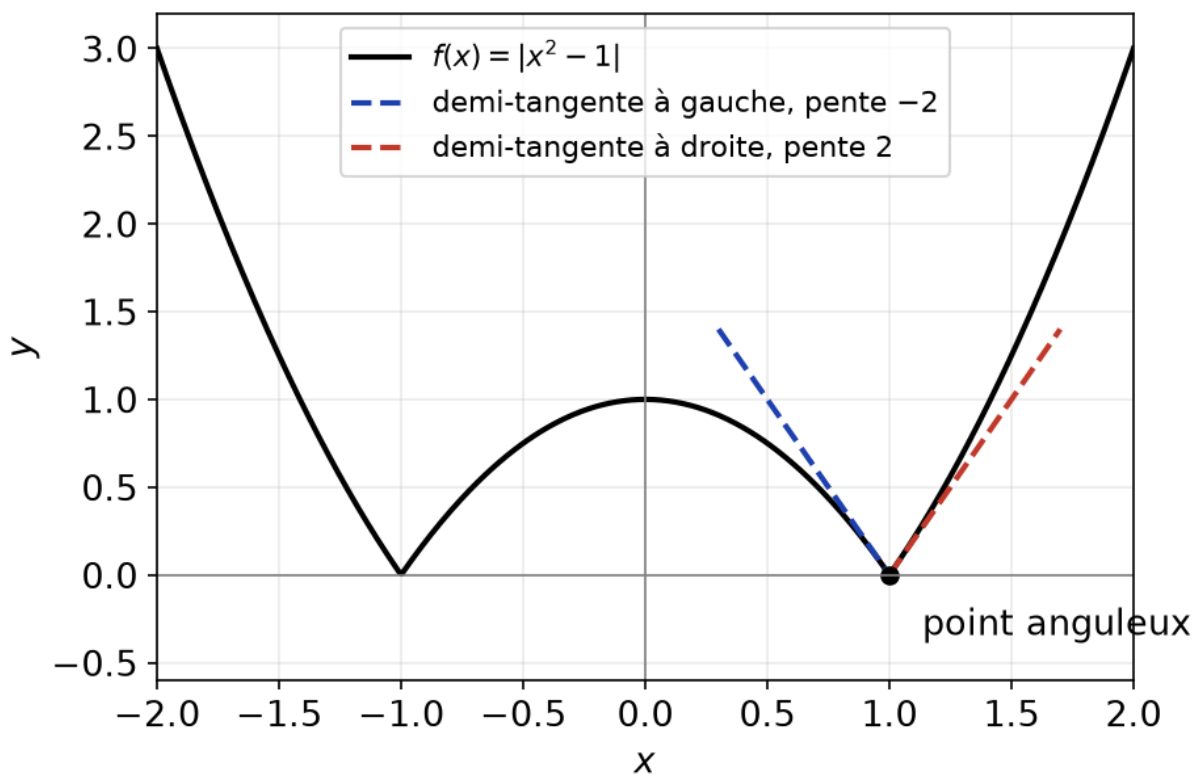
Définition :

On dit que f est **dérivable à droite** en a si $\tau_a(x)$ admet une limite finie quand $x \rightarrow a^+$. On note cette limite $f'_d(a)$. De même, la dérivée à gauche $f'_g(a)$ est la limite de $\tau_a(x)$ quand $x \rightarrow a^-$.

Propriété :

Soit a un point intérieur à I . Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas, $f'(a)$ est cette valeur commune.

Cette propriété découle directement de la caractérisation d'une limite par ses limites à gauche et à droite. Lorsque les deux dérivées latérales existent mais diffèrent, la courbe présente un **point anguleux**. Elle possède alors deux demi-tangentes distinctes, comme on le voit sur la figure ci-dessous.



Exemple :

Soit $f(x) = |x^2 - 1|$. Pour $x > 1$, $f(x) = x^2 - 1$, donc $\tau_1(x) = x + 1 \rightarrow 2$. Pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = 1 - x^2$, donc $\tau_1(x) = -(x + 1) \rightarrow -2$. Ainsi $f'_d(1) = 2$ et $f'_g(1) = -2$. Par conséquent, f n'est pas dérivable en 1.

Méthode :

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point a :

1. vérifiez d'abord la continuité en a (sinon, la fonction n'est pas dérivable) ;
2. écrivez le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ et simplifiez-le ;
3. cherchez sa limite, séparément à gauche et à droite si la formule change en a ;
4. concluez. Si le taux tend vers $\pm\infty$, la courbe admet une tangente verticale.

Remarque :

La fonction racine carrée est continue en 0 . Pourtant, $\tau_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Elle n'est donc pas dérivable en 0 , et sa courbe y admet une demi-tangente verticale.

III. Opérations sur les fonctions dérivables

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I . On définit alors la **fonction dérivée** f' . Les règles de calcul suivantes permettent d'obtenir la dérivabilité sans revenir au taux d'accroissement.

1. Somme, produit, quotient

Théorème :

Soit f et g dérivables en a , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + g$, λf et fg sont dérivables en a , avec

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si de plus $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Démonstration :

Montrons la formule du produit. Pour $x \neq a$, on intercale le terme $f(a)g(x)$:

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Or g est continue en a , car dérivable. Le membre de droite tend donc vers

$f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Pour le quotient, on traite d'abord $\frac{1}{g}$, puis on applique la formule du produit.

2. Dérivée d'une composée

Théorème :

Soit $f: I \rightarrow J$ dérivable en a , et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $b = f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

Démonstration :

On ne peut pas écrire naïvement un quotient par $f(x) - f(a)$, qui peut s'annuler. On introduit donc la fonction φ définie sur J par $\varphi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$ si $y \neq b$, et $\varphi(b) = g'(b)$. Par définition, φ est continue en b . De plus, pour tout $y \in J$, on a $g(y) - g(b) = \varphi(y)(y - b)$. Ainsi, pour $x \neq a$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Enfin, f est continue en a , donc $\varphi(f(x)) \rightarrow g'(b)$. Le résultat s'en déduit.

Exemple :

La fonction $x \rightarrow x^x = e^{x \ln x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée. Sa dérivée vaut $(\ln x + 1) x^x$.

3. Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f continue et strictement monotone sur I . On sait que f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et que f^{-1} est continue. La question est alors de savoir si f^{-1} hérite de la dérivabilité.

Théorème :

Soit f continue et strictement monotone sur I , dérivable en a , et $b = f(a)$. Alors f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$. Dans ce cas,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

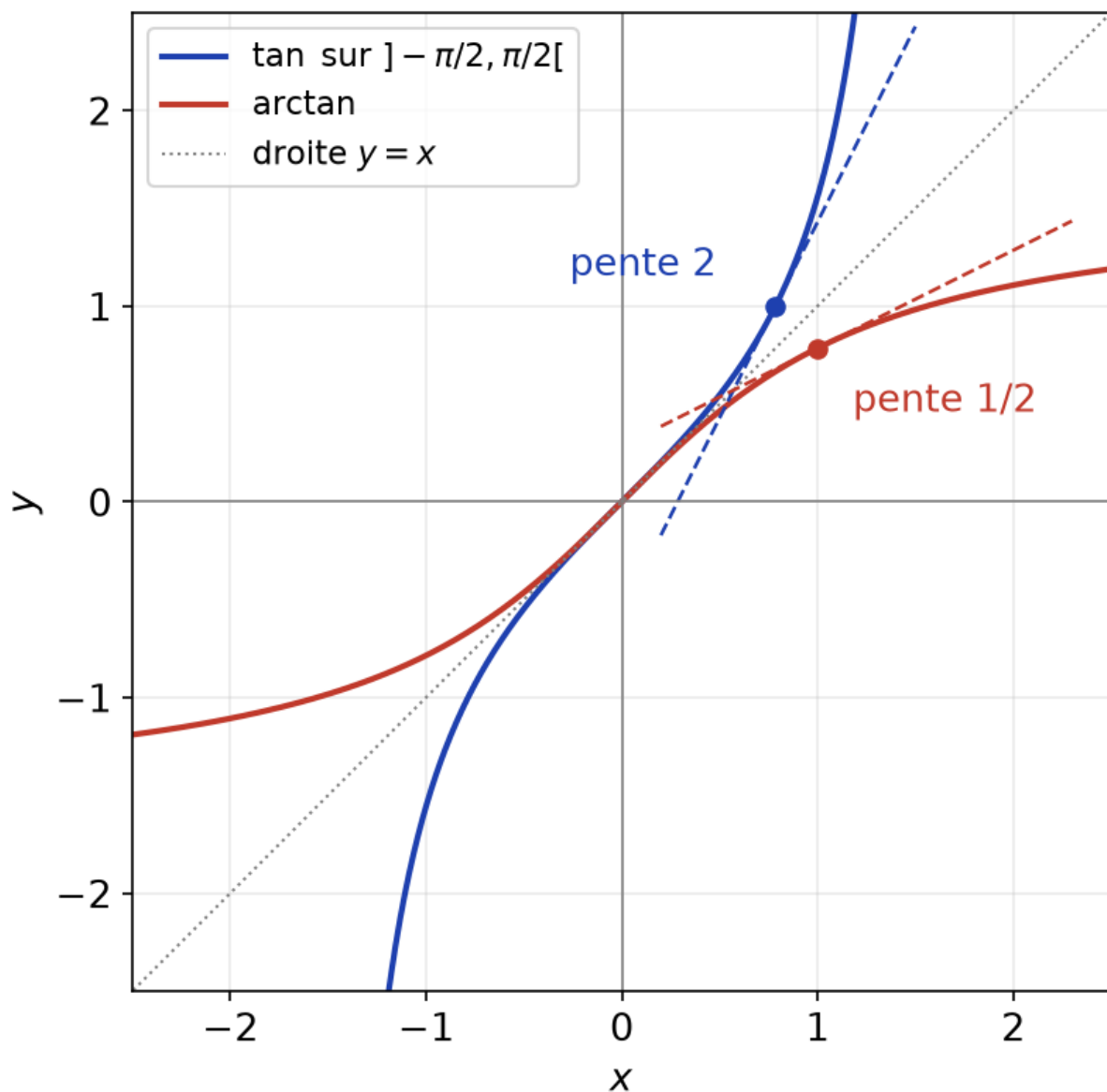
Démonstration :

Pour $y \in J$, $y \neq b$, posons $x = f^{-1}(y)$. Comme f^{-1} est injective, $x \neq a$. On a alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Quand $y \rightarrow b$, la continuité de f^{-1} donne $x \rightarrow a$. Si $f'(a) \neq 0$, le quotient tend donc vers $\frac{1}{f'(a)}$. Si $f'(a) = 0$, sa valeur absolue tend vers $+\infty$: il n'y a pas de dérivabilité.

Géométriquement, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$. Cette symétrie échange une pente m et la pente $\frac{1}{m}$. La figure ci-dessous l'illustre avec la tangente et l'arctangente.



Méthode :

Pour dériver une fonction réciproque f^{-1} en b :

1. justifiez que f est continue et strictement monotone sur un intervalle ;
2. trouvez l'antécédent $a = f^{-1}(b)$ et vérifiez que $f'(a) \neq 0$;
3. écrivez $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, puis exprimez le résultat en fonction de b si c'est possible.

Exemple :

La fonction $\tan$ est strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\tan' = 1 + \tan^2$ ne s'annule pas. Donc $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

IV. Extremum local et théorème de Rolle

1. Condition nécessaire d'extremum

Définition :

On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I \cap]a - \delta, a + \delta[$. On définit de même un minimum local. Un extremum local est un maximum local ou un minimum local.

Théorème :

Soit a un point **intérieur** à I . Si f admet un extremum local en a et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

Démonstration :

Supposons que f admet un maximum local en a . Comme a est intérieur, on choisit δ tel que $]a - \delta, a + \delta[\subset I$. Pour $a < x < a + \delta$, on a $\tau_a(x) \leq 0$. Par passage à la limite, $f'(a) = f'_d(a) \leq 0$. De même, pour $a - \delta < x < a$, on a $\tau_a(x) \geq 0$, donc $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$. Finalement, $f'(a) = 0$. Le cas d'un minimum se traite en remplaçant

f par $-f$.

Attention :

D'abord, la réciproque est fautive : $x \rightarrow x^3$ a une dérivée nulle en 0 sans y avoir d'extremum. Ensuite, l'hypothèse « intérieur » est indispensable : sur $[0, 1]$, la fonction $x \rightarrow x$ atteint son maximum en 1 alors que sa dérivée vaut 1 . Enfin, un extremum peut se trouver en un point où f n'est pas dérivable, comme $|x|$ en 0 .

2. Le théorème de Rolle

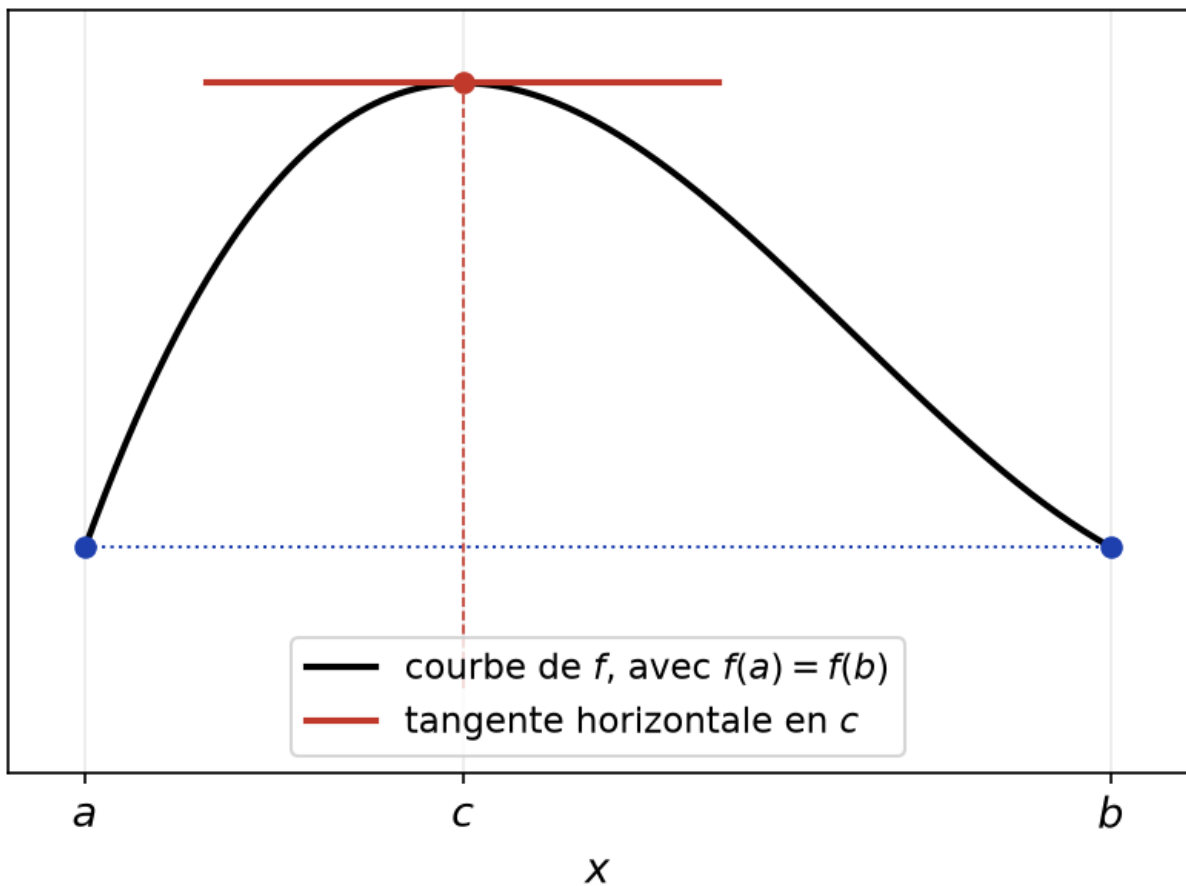
Théorème :

Théorème de Rolle. Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle y admet un maximum M et un minimum m . Si $m = M$, alors f est constante et tout $c \in]a, b[$ convient. Sinon, l'une des deux valeurs diffère de $f(a) = f(b)$. Supposons par exemple $M \neq f(a)$. Alors M est atteint en un point c qui n'est ni a ni b . Ainsi c est intérieur, f y est dérivable et y admet un maximum. Par conséquent, $f'(c) = 0$.

Autrement dit, entre deux points de même hauteur, la courbe possède au moins une tangente horizontale. La figure ci-dessous en donne une illustration.



Exemple :

Soit P un polynôme réel ayant n racines réelles distinctes $x_1 < \dots < x_n$. On applique le théorème de Rolle sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$. On obtient ainsi $n - 1$ racines distinctes de P' , une dans chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

V. Les accroissements finis

1. Égalité des accroissements finis

Théorème :

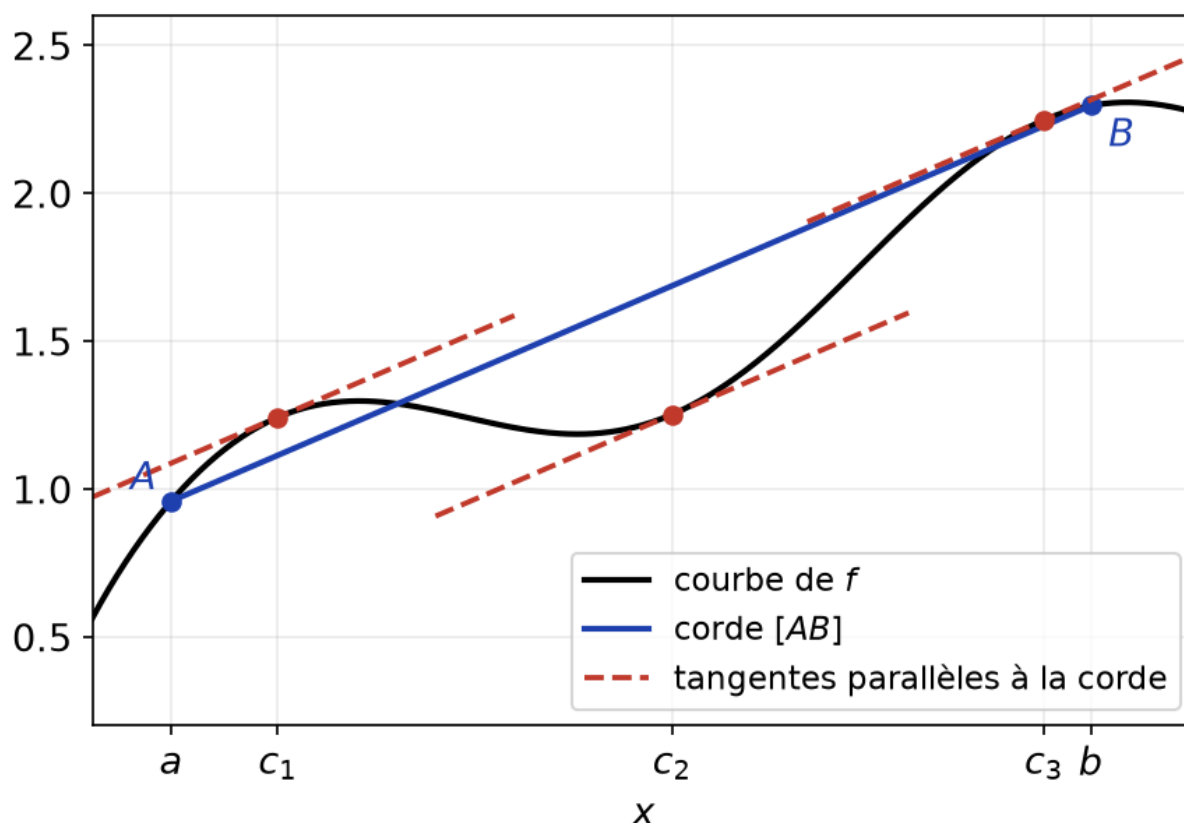
Égalité des accroissements finis. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Démonstration :

On pose $p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ et $g(x) = f(x) - p(x - a)$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$. Le théorème de Rolle fournit donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = p$.

Ainsi, il existe au moins un point où la tangente est parallèle à la corde $[AB]$. La figure ci-dessous montre qu'il peut en exister plusieurs. En revanche, le théorème ne dit rien sur la position exacte de c .



Remarque :

Ce théorème concerne les fonctions à valeurs réelles. Par exemple, pour $f(t) = e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$, on a $f(2\pi) - f(0) = 0$. Cependant, $|f'(t)| = 1$ ne s'annule jamais. L'égalité est donc fausse pour une fonction à valeurs complexes.

2. Inégalité des accroissements finis

Théorème :

Inégalité des accroissements finis. Soit f continue sur I , dérivable à l'intérieur de I . On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f'(t)| \leq M$ pour tout t intérieur à I . Alors, pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|.$$

On dit que f est **M -lipschitzienne** sur I .

Démonstration :

Soit $x < y$ dans I . On applique l'égalité des accroissements finis sur $[x, y]$. Il existe donc $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Or c est intérieur à I , donc $|f'(c)| \leq M$. Le résultat en découle. Le cas $x = y$ est immédiat.

Méthode :

Pour majorer un écart $|f(x) - f(y)|$:

1. choisissez un intervalle contenant x et y sur lequel f est dérivable ;
2. majorez $|f'|$ sur cet intervalle par une constante M , la plus petite possible ;

3. concluez par l'inégalité des accroissements finis : $|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$.

Exemple :

Comme $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, on obtient $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tous réels x, y . En particulier, avec $y = 0$, on retrouve $|\sin x| \leq |x|$.

VI. Monotonie et signe de la dérivée

Le lien entre variations et signe de la dérivée est connu depuis le lycée. Désormais, les accroissements finis permettent de le démontrer.

Théorème :

Soit f continue sur l'**intervalle** I et dérivable à l'intérieur de I . Alors :

1. f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ à l'intérieur de I ;
2. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ à l'intérieur de I ;
3. si $f' > 0$ à l'intérieur de I , alors f est strictement croissante sur I .

Démonstration :

Supposons $f' \geq 0$ et prenons $x < y$ dans I . D'après l'égalité des accroissements finis, $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ avec $c \in]x, y[$. Ce nombre est positif, donc $f(x) \leq f(y)$. Si $f' > 0$, il est strictement positif. Réciproquement, si f est croissante, tous les taux d'accroissement sont positifs. Par passage à la limite, $f' \geq 0$. Le point 2 s'obtient en appliquant le point 1 à f et à $-f$.

Attention :

D'une part, l'hypothèse d'intervalle est essentielle. Par exemple, $x \rightarrow -\frac{1}{x}$ a une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, la réciproque du point 3 est fautive : $x \rightarrow x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0 .

Corollaire :

Soit f continue sur I et dérivable à l'intérieur de I , avec $f' \geq 0$. Si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante sur I .

Exemple :

La fonction $f(x) = x - \sin x$ a pour dérivée $1 - \cos x \geq 0$. Sur $[0, 1]$, celle-ci ne s'annule qu'en 0 . Donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$, d'où $\sin x < x$ pour $x \in]0, 1]$. Pour $x > 1$, cette inégalité est évidente.

Proposition :

Théorème de la limite de la dérivée. Soit f continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $f'(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \rightarrow a$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Démonstration :

Pour $x \neq a$, l'égalité des accroissements finis sur le segment d'extrémités a et x fournit c_x strictement entre a et x tel que $\tau_a(x) = f'(c_x)$. Quand $x \rightarrow a$, on a aussi $c_x \rightarrow a$. Donc $\tau_a(x) \rightarrow \ell$.

VII. Dérivées successives et fonctions de classe C^n

1. Dérivées successives

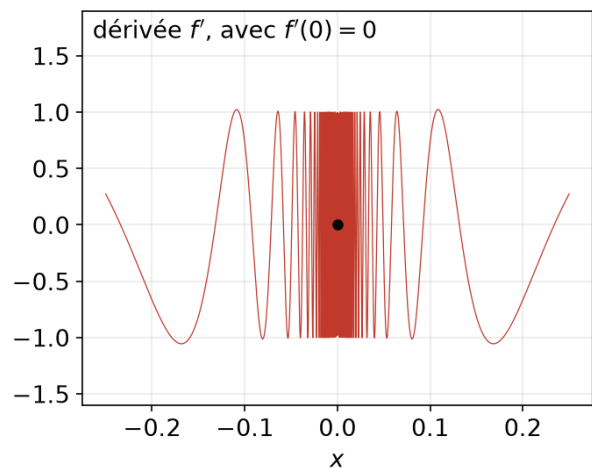
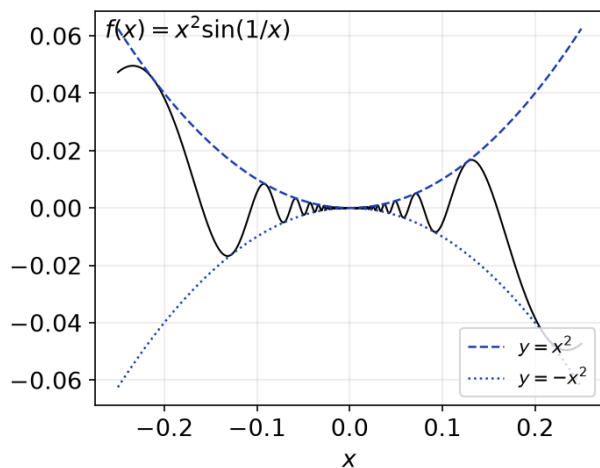
Définition :

On pose $f^{(0)} = f$. Si $f^{(n)}$ existe et est dérivable sur I , on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. On dit que f est **n fois dérivable** si $f^{(n)}$ existe. De plus, f est **de classe C^n** si elle est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue. Enfin, f est de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout n .

Exemple :

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. En effet, dériver $\sin$ revient à ajouter $\frac{\pi}{2}$ à l'argument, car $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Les inclusions $C^{n+1} \subset C^n$ sont strictes. Considérons en effet $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, prolongée par $f(0) = 0$. D'une part, $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|$, donc $f'(0) = 0$. D'autre part, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, qui n'a pas de limite en 0 . Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 . La figure ci-dessous montre les oscillations de f' .



Propriété :

Les sommes, produits, quotients (à dénominateur non nul) et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sont de classe $\mathcal{C}^n$. En particulier, les polynômes, $\exp$, $\sin$, $\cos$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\ln$ l'est sur $]0, +\infty[$.

2. Formule de Leibniz

Théorème :

Formule de Leibniz. Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors fg l'est aussi et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration :

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la formule est évidente. Supposons-la vraie au

rang n , avec f et g $n + 1$ fois dérivables. Chaque terme $f^{(k)} g^{(n-k)}$ est dérivable, d'où

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

Dans la première somme, on pose $j = k + 1$. On regroupe ensuite les termes de même indice. Enfin, la relation de Pascal $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$ donne la formule au rang $n + 1$.

Méthode :

Pour calculer $(fg)^{(n)}$ avec la formule de Leibniz, placez en f un **polynôme de petit degré** d . En effet, ses dérivées d'ordre $k > d$ sont nulles. La somme ne compte alors que $d + 1$ termes.

Exemple :

Calculons la dérivée n -ième de $h(x) = x e^{2x}$. On prend $f(x) = x$ et $g(x) = e^{2x}$, avec $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$. Seuls les termes $k = 0$ et $k = 1$ subsistent :

$$h^{(n)}(x) = x 2^n e^{2x} + n 2^{n-1} e^{2x} = 2^{n-1} (2x + n) e^{2x}.$$

Ce qu'il faut retenir

- f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie ; la tangente a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Dérivable implique continue, mais la réciproque est fautive : pensez à $|x|$ et à $\sqrt{x}$ en 0 .
- En un point intérieur, f est dérivable si et seulement si ses dérivées à gauche et à droite existent et sont égales.

- $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$, et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ lorsque $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.
- En un point intérieur, un extremum local d'une fonction dérivable annule la dérivée ; la réciproque est fausse.
- Rolle : $f(a) = f(b)$ entraîne l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- Accroissements finis : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$; si $|f'| \leq M$, alors $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.
- Sur un intervalle, le signe de f' donne les variations de f , et $f' = 0$ caractérise les fonctions constantes.
- Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, à utiliser avec un facteur polynomial.
- Une fonction dérivable n'est pas forcément de classe C^1 , comme le montre $x^2 \sin(1/x)$.

Questions fréquentes sur dérivation

Quelle différence entre dérivable et de classe C^1 ?

Une fonction est de classe C^1 si elle est dérivable et si sa dérivée est continue. La fonction égale à $x^2 \sin(1/x)$, prolongée par 0 en 0, est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée n'a pas de limite en 0. Elle est donc dérivable sans être de classe C^1 .

Quand utiliser l'inégalité plutôt que l'égalité des accroissements finis ?

L'inégalité suffit pour majorer un écart $|f(x) - f(y)|$ dès que $|f'|$ est bornée par M . L'égalité est utile quand on veut un encadrement strict ou quand on doit localiser le point c . Dans les deux cas, vérifiez la continuité sur le segment et la dérivabilité à l'intérieur.

Une dérivée nulle en un point implique-t-elle un extremum ?

Non. La fonction $x \rightarrow x^3$ a une dérivée nulle en 0 sans y admettre d'extremum. La condition $f'(a) = 0$ est seulement nécessaire, et seulement en un point intérieur où f est dérivable.

Pourquoi le théorème de Rolle demande-t-il la continuité sur le segment fermé ?

La preuve utilise le théorème des bornes atteintes, qui exige une fonction continue sur un segment. Sans continuité en une borne, le résultat tombe : la fonction égale à x sur $[0, 1[$ et à 0 en 1 vérifie $f(0) = f(1)$, mais sa dérivée vaut toujours 1 .

Pour aller plus loin en L1

- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur dérivation](#)
- Les solutions : [corrigé des exercices sur dérivation](#)
- À maîtriser avant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions usuelles et fonctions réciproques](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)