

Dérivation

Corrigé de l'exercice 1 : Dérivabilité en un point

1. Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement de f en 0 vaut $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x|x|}{x} = |x|$. Il tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$. **Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.**
2. Pour $x > 0$, on a $\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Ce taux tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. **Ainsi g n'est pas dérivable en 0 : sa courbe admet en l'origine une demi-tangente verticale.**
3. Pour tout $x \neq 0$, $|h(x)| = |x| \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$. Par encadrement, $h(x) \rightarrow 0 = h(0)$. **Donc h est continue en 0 .**
4. Pour $x \neq 0$, le taux vaut $\frac{h(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Considérons d'abord $a_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$. Alors $a_n \rightarrow 0$ et $\sin(1/a_n) = 1$. Ensuite, avec $b_n = \frac{1}{n\pi}$, on a $b_n \rightarrow 0$ et $\sin(1/b_n) = 0$. Les deux suites donnent des limites différentes. Par conséquent, le taux n'a pas de limite en 0 . **La fonction h est continue mais pas dérivable en 0 .**

Point de méthode : pour prouver qu'une limite n'existe pas, exhibez deux suites qui tendent vers le point étudié et le long desquelles la fonction a deux limites différentes.

Corrigé de l'exercice 2 : Raccord dérivable de deux expressions

1. On a $f(1) = 1$, et la limite à gauche vaut 1 . Pour $x > 1$, $f(x) = a\sqrt{x} + b \rightarrow a + b$ quand $x \rightarrow 1^+$. **Donc f est continue en 1 si et seulement si $a + b = 1$.**

2. Pour $0 \leq x < 1$, le taux vaut $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \rightarrow 2$. Ainsi $f'_g(1) = 2$. Supposons maintenant $b = 1 - a$. Pour $x > 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{a\sqrt{x} - a}{x - 1} = \frac{a(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{a}{\sqrt{x} + 1}.$$

Ce quotient tend vers $\frac{a}{2}$. **Donc** $f'_g(1) = 2$ **et** $f'_d(1) = \frac{a}{2}$.

3. Une fonction dérivable est continue, donc on doit avoir $a + b = 1$. Ensuite, la dérivabilité équivaut à l'égalité des dérivées latérales : $\frac{a}{2} = 2$. D'où $a = 4$ et $b = -3$. La tangente en 1 a pour équation $y = f(1) + 2(x - 1)$. **Ainsi** $a = 4$, $b = -3$, **et la tangente est la droite** $y = 2x - 1$.
4. Pour $x > 1$, $k(x) = x^2 - 1$, donc le taux vaut $x + 1 \rightarrow 2$. Pour $-1 < x < 1$, $k(x) = 1 - x^2$, donc le taux vaut $-(x + 1) \rightarrow -2$. **Ainsi** $k'_g(1) = -2 \neq 2 = k'_d(1)$: **k n'est pas dérivable en 1 (point anguleux).**

Corrigé de l'exercice 3 : Calculs de dérivées de composées

1. La fonction f_1 est un polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la règle de la composée, avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$: $f'_1(x) = 5 \cdot 2x (x^2 + 1)^4 = 10x(x^2 + 1)^4$.
2. Les fonctions $\sin$ et $\exp$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f'_2(x) = \cos x e^{\sin x}$.
3. Pour $x > 1$, on a $\ln x > 0$. Or $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc f_3 est dérivable sur $]1, +\infty[$, et $f'_3(x) = \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$.
4. Par définition, $f_4(x) = e^{x \ln x}$. La fonction $x \rightarrow x \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\ln x + 1$. **Ainsi** $f'_4(x) = (1 + \ln x) x^x$.
5. Pour tout réel x , $1 + \cos^2 x \geq 1 > 0$. De plus, la racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$. Donc f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'_5(x) = \frac{2 \cos x \cdot (-\sin x)}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

Autrement dit, $f'_5(x) = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} = -\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}}.$

Corrigé de l'exercice 4 : Tangente et approximation affine

1. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Ainsi $f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$. **La tangente en 0 a pour équation $y = 1 + \frac{x}{2}$.**
2. Posons $u(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}$. Alors $u'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Pour $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \geq 1$, donc $u'(x) \geq 0$. Ainsi u est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme $u(0) = 0$, on obtient $u \geq 0$. **Donc $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ pour tout $x \geq 0$.**
3. Posons $v(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$. On calcule $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$. Ensuite, $v''(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$. Pour $x \geq 0$, $(1+x)^{3/2} \geq 1$, donc $v'' \geq 0$. Par conséquent, v' est croissante et $v'(x) \geq v'(0) = 0$. De même, v est croissante et $v(x) \geq v(0) = 0$. **Donc $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.**
4. On prend $x = 0,02$. Alors $1 + \frac{x}{2} = 1,01$ et $\frac{x^2}{8} = \frac{0,0004}{8} = 0,00005$. **Ainsi $1,00995 \leq \sqrt{1,02} \leq 1,01$, encadrement d'amplitude 5×10^{-5} .**

Corrigé de l'exercice 5 : Extremums locaux et condition nécessaire

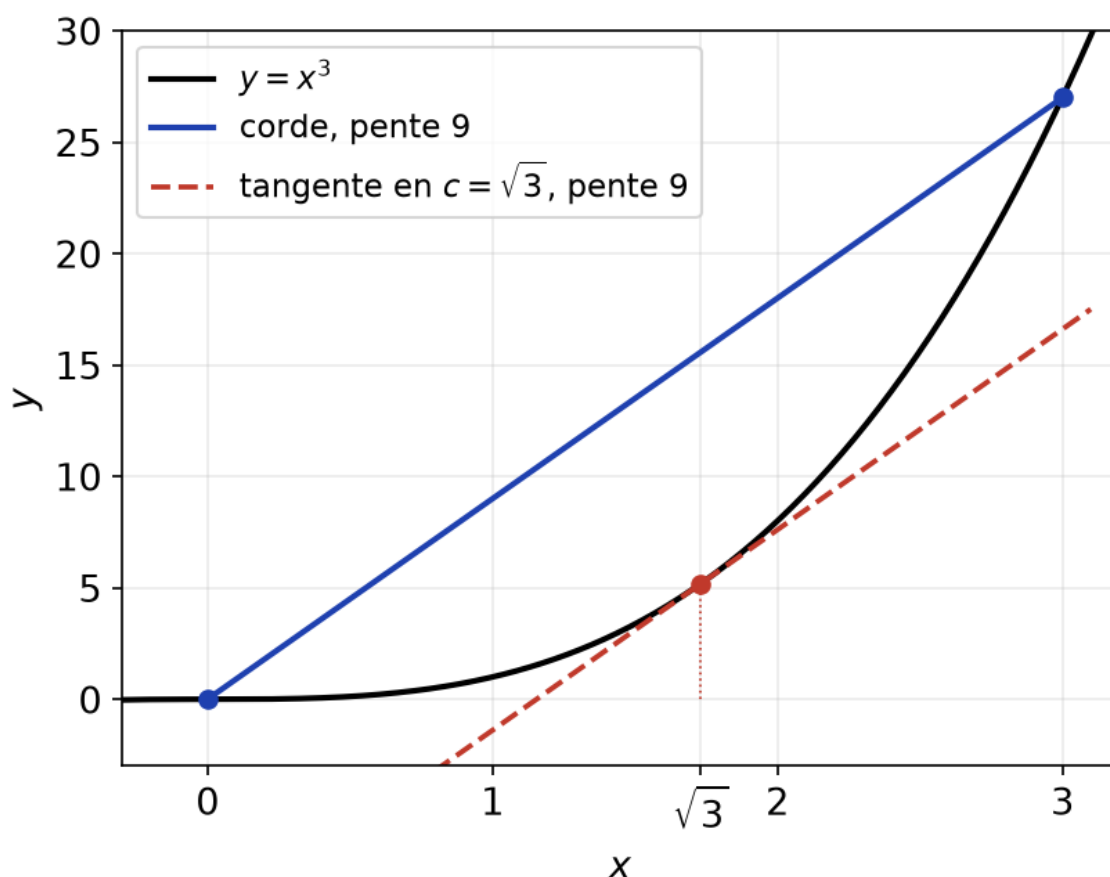
1. On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. La dérivée s'annule donc en -1 et en 1 . Elle est positive sur $] -\infty, -1]$, négative sur $[-1, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. Ainsi f croît, puis décroît, puis croît. Par conséquent, f admet un maximum local en -1 , égal à $f(-1) = 2$, et un minimum local en 1 , égal à $f(1) = -2$. Cependant, $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$. **Les extremums locaux 2 (en -1) et -2 (en 1) ne sont pas globaux sur $\mathbb{R}$.**
2. On calcule $f(-2) = -8 + 6 = -2$ et $f(2) = 8 - 6 = 2$. D'après les variations, le maximum de f sur $[-2, 2]$ est le plus grand des nombres $f(-1) = 2$ et $f(2) = 2$. De même, le minimum est le plus petit des nombres $f(-2) = -2$ et $f(1) = -2$. **Sur $[-2, 2]$, le maximum vaut 2, atteint en -1 et 2 ; le minimum vaut -2 , atteint en -2 et 1.**

3. La condition nécessaire $f'(a) = 0$ ne s'applique qu'en un point **intérieur** à l'intervalle d'étude. Or -2 est une extrémité de $[-2, 2]$. **Il n'y a donc aucune contradiction : en une borne, la dérivée d'un extremum peut être non nulle.**
4. D'une part, $x \rightarrow x^3$ vérifie $f'(0) = 0$. Pourtant elle est strictement croissante, donc sans extremum local en 0 . D'autre part, $x \rightarrow |x|$ admet un minimum en 0 , où elle n'est pas dérivable. **La condition $f'(a) = 0$ n'est ni suffisante, ni applicable sans dérivabilité.**

Corrigé de l'exercice 6 : Valeurs du point intermédiaire des accroissements finis

Dans les trois premiers cas, la fonction est continue sur le segment et dérivable sur l'intervalle ouvert. Le théorème s'applique donc.

- On cherche c tel que $b^2 - a^2 = 2c(b - a)$. Comme $b - a \neq 0$, cela équivaut à $2c = a + b$. **Le seul point qui convient est $c = \frac{a+b}{2}$, le milieu de $[a, b]$.**
- On cherche $c \in]0, 3[$ tel que $27 - 0 = 3c^2 \times 3$, soit $c^2 = 3$. La valeur $-\sqrt{3}$ n'appartient pas à l'intervalle. **Le seul point qui convient est $c = \sqrt{3}$.** La figure ci-dessous montre la tangente en ce point, parallèle à la corde de pente 9 .



3. On cherche $c \in]1, e[$ tel que $\ln e - \ln 1 = \frac{1}{c}(e - 1)$, soit $1 = \frac{e-1}{c}$. **Le seul point qui convient est $c = e - 1 \approx 1,718$, qui appartient bien à $]1, e[$.**

4. Ici, $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0$. Or, pour $c \neq 0$, $f'(c) = \pm 1 \neq 0$. De plus, f n'est pas dérivable en 0. **Aucun c ne convient : l'hypothèse de dérivabilité sur $] -1, 1[$ fait défaut en 0.**

Corrigé de l'exercice 7 : Dérivée d'une fonction réciproque

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^x > 0$. Elle est donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. De plus, $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, car $e^x \rightarrow 0$, et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. **Ainsi f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**

2. La dérivée f' ne s'annule jamais. D'après le théorème de dérivation d'une réciproque, g est

dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = \frac{1}{1 + e^{g(y)}}$. Or $f(g(y)) = y$, c'est-à-dire $g(y) + e^{g(y)} = y$. On remplace donc $e^{g(y)}$ par $y - g(y)$. **On obtient**
 $g'(y) = \frac{1}{1 + y - g(y)}$.

3. On a $f(0) = 0 + 1 = 1$, donc $g(1) = 0$. Ensuite, $g'(1) = \frac{1}{1 + 1 - 0} = \frac{1}{2}$. **Donc**
 $g(1) = 0$, $g'(1) = \frac{1}{2}$, **et la tangente a pour équation** $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

4. La fonction $g' = \frac{1}{1 + \exp \circ g}$ est dérivable, comme composée et inverse de fonctions dérivables, avec un dénominateur non nul. Ainsi g est deux fois dérivable, et

$$g''(y) = -\frac{e^{g(y)} g'(y)}{(1 + e^{g(y)})^2}.$$

En $y = 1$, on a $e^{g(1)} = 1$ et $g'(1) = \frac{1}{2}$. **Donc** $g''(1) = -\frac{1 \times 1/2}{2^2} = -\frac{1}{8}$.

Corrigé de l'exercice 8 : Dérivées de arcsin et arctan

1. La fonction $\sin$ est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sa réciproque est $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Soit $y \in]-1, 1[$ et $x = \arcsin y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Alors $\sin'(x) = \cos x > 0$. Le théorème de dérivation d'une réciproque s'applique donc :
 $\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x}$. De plus, $\cos x > 0$, d'où $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$.
Ainsi $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ **sur** $] -1, 1[$.

2. On a $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ et $\sin'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. D'après le théorème du cours, la réciproque n'est pas dérivable en $\sin \frac{\pi}{2} = 1$. On peut aussi le vérifier directement. Pour $y = \sin x$ avec $t = \frac{\pi}{2} - x > 0$, le taux vaut $\frac{-t}{\cos t - 1} = \frac{t}{1 - \cos t}$. Or $1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}$, donc ce taux est au moins $\frac{2}{t}$. **Le taux tend vers $+\infty$: arcsin n'est pas dérivable en 1 (tangente verticale).**

3. La fonction $\tan$ est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée $1 + \tan^2$ ne s'annule pas. **Donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et**
 $\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$.

4. Pour $x \neq 0$, par la règle de la composée :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

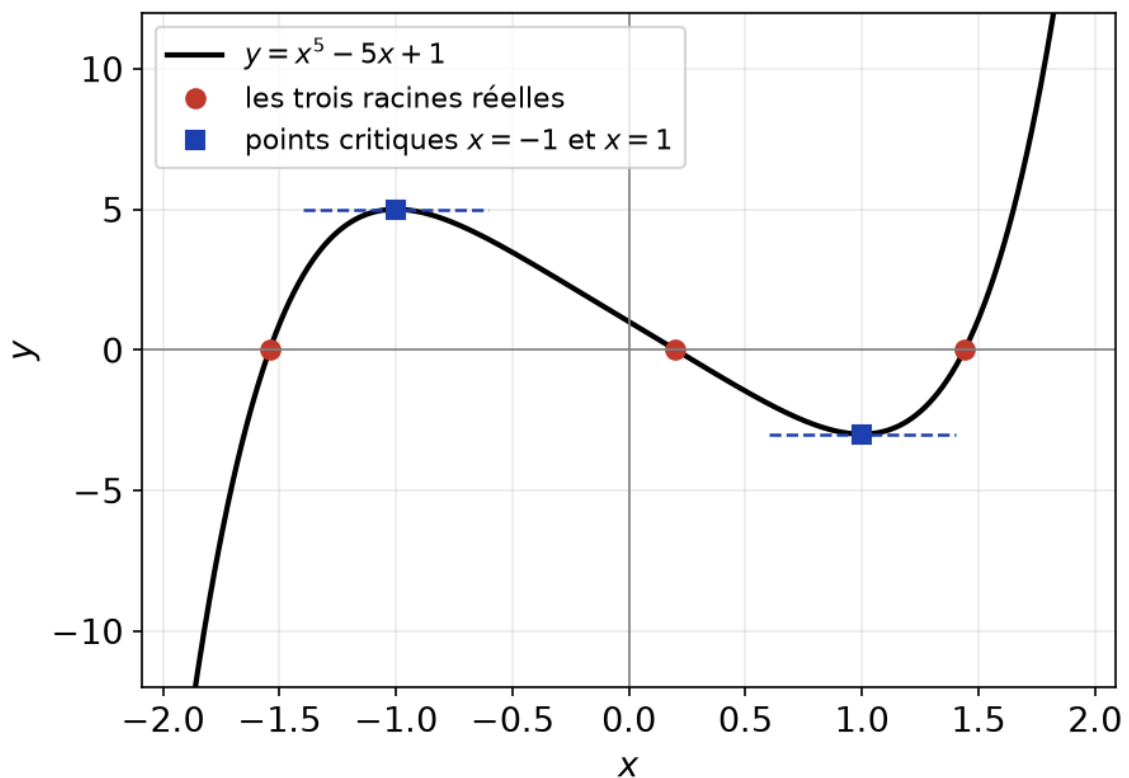
Sur chacun des intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, φ est donc constante. Or

$\varphi(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi(-1) = -\frac{\pi}{2}$. **Ainsi** $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$ **si** $x > 0$, **et** $\varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$ **si** $x < 0$.

Point de méthode : une dérivée nulle donne une fonction constante sur chaque intervalle, pas sur une réunion d'intervalles ; la constante peut changer d'un intervalle à l'autre.

Corrigé de l'exercice 9 : Nombre de racines réelles d'une équation polynomiale

- Notons $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ des zéros de f . Pour chaque $k \in \{1, 1., m-1\}$, f est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, dérivable sur l'intérieur, et $f(x_k) = f(x_{k+1}) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f'(c_k) = 0$. Les intervalles ouverts sont deux à deux disjoints, donc les c_k sont distincts. **Ainsi** f' **a au moins** $m-1$ **zéros distincts**.
- On a $P'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$. Ses zéros réels sont -1 et 1 . Supposons que P ait au moins quatre racines réelles distinctes. D'après la question 1, P' aurait au moins trois zéros réels distincts, ce qui est faux. **Donc** P **a au plus trois racines réelles**.
- On calcule $P(-2) = -32 + 10 + 1 = -21$, $P(-1) = -1 + 5 + 1 = 5$, $P(1) = 1 - 5 + 1 = -3$ et $P(2) = 32 - 10 + 1 = 23$. La fonction P est continue et change de signe sur chacun des intervalles $[-2, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, 2]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule dans chacun des intervalles ouverts correspondants. **Donc** P **a exactement trois racines réelles, situées dans** $] -2, -1[$, $] -1, 1[$ **et** $]1, 2[$. La figure ci-dessous confirme ce résultat : les racines valent environ $-1,54$, $0,20$ et $1,44$.



Corrigé de l'exercice 10 : Théorème de Rolle itéré

- La fonction f est dérivable, donc continue, sur $[a, b]$. On applique le théorème de Rolle sur $[a, c]$: il existe $c_1 \in]a, c[$ tel que $f'(c_1) = 0$. De même, sur $[c, b]$, il existe $c_2 \in]c, b[$ tel que $f'(c_2) = 0$. Ensuite, $c_1 < c < c_2$. La fonction f' est dérivable, donc continue, sur $[c_1, c_2]$, et $f'(c_1) = f'(c_2)$. Le théorème de Rolle appliqué à f' donne $d \in]c_1, c_2[$. **Il existe donc $d \in]a, b[$ tel que $f''(d) = 0$.**
- Montrons par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $f^{(k)}$ a au moins $n + 1 - k$ zéros distincts. Pour $k = 0$, c'est l'hypothèse. Supposons le résultat vrai pour un $k < n$. La fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur I . De plus, elle a au moins $n + 1 - k \geq 2$ zéros distincts. D'après le lemme de l'exercice 9, $f^{(k+1)}$ a au moins $n - k$ zéros distincts. Pour $k = n$, on obtient au moins un zéro. **Ainsi $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I .**
- Posons $h(x) = e^x - \alpha x^2 - \beta x - \gamma$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $h^{(3)}(x) = e^x > 0$. Si l'équation avait quatre solutions distinctes, h aurait quatre zéros. La question 2, avec $n = 3$, montrerait alors que $h^{(3)}$ s'annule, ce qui est faux. **L'équation a**

donc au plus trois solutions réelles.

Corrigé de l'exercice 11 : Encadrement du logarithme par les accroissements finis

1. La fonction $\ln$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. L'égalité des accroissements finis donne $c \in]a, b[$ tel que $\ln b - \ln a = \frac{b-a}{c}$. Or $0 < a < c < b$, donc $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$. On multiplie par $b - a > 0$. **On obtient** $\frac{b-a}{b} < \ln b - \ln a < \frac{b-a}{a}$.
2. On applique la question 1 avec $a = 1$ et $b = 1 + x$, où $x > 0$. Comme $\ln 1 = 0$: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ **pour tout** $x > 0$.
3. Avec $a = k$ et $b = k+1$, on a $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$. D'abord, on somme l'inégalité de droite pour k de 1 à n . La somme télescopique donne $\ln(n+1) < H_n$. Ensuite, pour $n \geq 2$, on somme l'inégalité de gauche pour k de 1 à $n-1$. On obtient $H_n - 1 < \ln n$. Pour $n = 1$, on a l'égalité $H_1 = 1 = 1 + \ln 1$. **Ainsi** $\ln(n+1) < H_n \leq 1 + \ln n$ **pour tout** $n \geq 1$.
4. Comme $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$, la minoration donne $H_n \rightarrow +\infty$. Pour $n \geq 2$, on divise par $\ln n > 0$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} < \frac{H_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Or $\ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, donc le membre de gauche tend vers 1. Le membre de droite aussi. **Par encadrement**, $H_n \rightarrow +\infty$ **et** $\frac{H_n}{\ln n} \rightarrow 1$.

Corrigé de l'exercice 12 : Majorer un écart avec l'inégalité des accroissements finis

1. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|\sin'| = |\cos| \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis sur $\mathbb{R}$, avec $M = 1$: $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

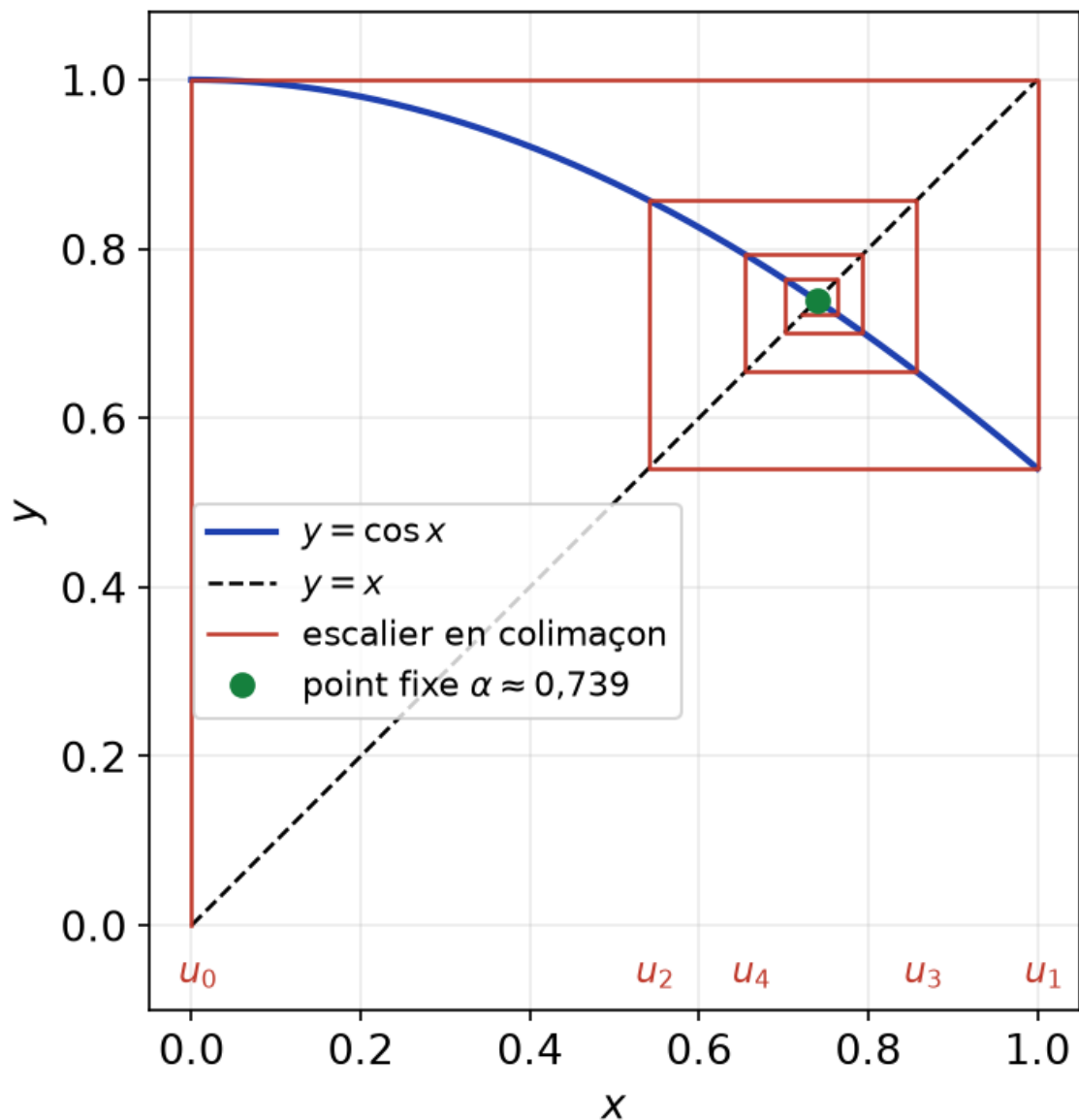
- De même, $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \in]0, 1]$. On applique l'inégalité avec $M = 1$. **Donc** $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.
- Sur $[1, +\infty[$, la racine carrée est dérivable, de dérivée $t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Or $\frac{1}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2}$, car $\sqrt{t} \geq 1$. **Ainsi** $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ pour $x, y \geq 1$.
- Ici, l'inégalité ne suffit pas, car on veut un encadrement strict. On applique donc l'égalité des accroissements finis à la racine carrée sur $[10000, 10001]$. Il existe $c \in]10000, 10001[$ tel que $\sqrt{10001} - 100 = \frac{1}{2\sqrt{c}}$. D'une part, $\sqrt{c} > 100$. D'autre part, $\sqrt{c} < \sqrt{10201} = 101$. Par conséquent, $200 < 2\sqrt{c} < 202$. **On en déduit** $\frac{1}{202} < \sqrt{10001} - 100 < \frac{1}{200}$.

Point de méthode : pour un encadrement strict, utilisez l'égalité des accroissements finis et encadrez le point c ; l'inégalité ne donne qu'une majoration large.

Corrigé de l'exercice 13 : Suite récurrente et fonction contractante

- Posons $\psi(x) = \cos x - x$ sur $[0, 1]$. Alors $\psi'(x) = -\sin x - 1$. Sur $[0, 1]$, $\sin x \geq 0$, donc $\psi'(x) \leq -1 < 0$. Ainsi ψ est continue et strictement décroissante. De plus, $\psi(0) = 1 > 0$ et $\psi(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, ψ s'annule ; par stricte monotonie, une seule fois. **L'équation $\cos x = x$ a une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.**
- La fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$. Donc $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1]$. Or $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos 1 > 0$. Ainsi l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $\cos$. Comme $u_0 = 0 \in [0, 1]$, une récurrence immédiate donne le résultat. **Pour tout n , $u_n \in [0, 1]$.**
- Sur $[0, 1]$, $|\cos'(t)| = \sin t \leq \sin 1$, car $\sin$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Les réels u_n et α sont dans $[0, 1]$. L'inégalité des accroissements finis donne donc $|\cos u_n - \cos \alpha| \leq \sin(1) |u_n - \alpha|$. Or $\cos \alpha = \alpha$. **Ainsi** $|u_{n+1} - \alpha| \leq \sin(1) |u_n - \alpha|$.
- Par récurrence, $|u_n - \alpha| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \alpha| = (\sin 1)^n \alpha \leq (\sin 1)^n$. Comme $0 < \sin 1 < 1$, le majorant tend vers 0. Donc (u_n) converge vers α . Ensuite, $(\sin 1)^n \leq 10^{-3}$ équivaut à $n \ln(\sin 1) \leq -3 \ln 10$, c'est-à-dire

$n \geq \frac{3 \ln 10}{0,1726} \approx \frac{6,908}{0,1726} \approx 40,02$. La suite converge vers $\alpha \approx 0,739$, et
 $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ dès que $n \geq 41$. La figure ci-dessous montre l'escalier en colimaçon qui s'enroule autour du point fixe.



Point de méthode : une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$ sur un intervalle stable fournit une convergence géométrique, et donc un rang explicite pour une précision donnée.

Corrigé de l'exercice 14 : Monotonie d'une fonction et signe de la dérivée

1. Pour $x > 0$, on écrit $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln x$. Ainsi

$$u'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1) + x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}.$$

Donc $u' < 0$ et u est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. De plus,

$u(x) \rightarrow \ln 1 - 0 = 0$ en $+\infty$. Soit alors $x > 0$. Pour tout $y > x$, on a $u(x) > u(y)$. En faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient $u(x) \geq 0$. Enfin, avec $y = x+1$, $u(x) > u(x+1) \geq 0$. **Donc $u(x) > 0$ pour tout $x > 0$.**

2. On a $f(x) = e^{w(x)}$ avec $w(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Alors

$w'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = u(x)$. Ainsi $f'(x) = u(x) f(x) > 0$. Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, **f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.**

3. En 0^+ , on a $w(x) = x \ln(x+1) - x \ln x$. Or $x \ln(x+1) \rightarrow 0$ et $x \ln x \rightarrow 0$ par croissances comparées. Donc $w(x) \rightarrow 0$ et $f(x) \rightarrow 1$. En $+\infty$, on pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$. Alors $w(x) = \frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$, donc $f(x) \rightarrow e$. Soit enfin $x > 0$. Pour $0 < y < x < z$, la stricte croissance donne $f(y) < f(x) < f(z)$. On fixe $y = x/2$ et $z = 2x$, puis on utilise $f(y) \geq 1$ et $f(z) \leq e$, obtenus par passage à la limite dans la croissance. **Ainsi $1 < f(x) < e$ pour tout $x > 0$.**

4. On a $k(-1) = 1$ et $k(1) = -1$. Donc $-1 < 1$ mais $k(-1) > k(1)$. **La fonction k n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$, car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle ; elle est seulement croissante sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.**

Corrigé de l'exercice 15 : Stricte monotonie et dérivée qui s'annule

1. Soit $a \leq x < y \leq b$. La fonction f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. L'égalité des accroissements finis fournit $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Ce produit est positif. **Donc $f(x) \leq f(y)$: f est croissante sur $[a, b]$.**

2. Raisonnons par l'absurde. Supposons $x < y$ avec $f(x) = f(y)$. Pour $t \in [x, y]$, la croissance donne $f(x) \leq f(t) \leq f(y) = f(x)$. Ainsi f est constante sur $[x, y]$, et $f' = 0$ sur $]x, y[$. Cet intervalle contient une infinité de points, ce qui contredit l'hypothèse.
Par conséquent, f est strictement croissante.
3. Posons $f(x) = x - \sin x$, de dérivée $1 - \cos x \geq 0$. Attention : cette dérivée s'annule aux points $2k\pi$, qui sont en nombre infini sur $\mathbb{R}$. On travaille donc sur un segment $[-A, A]$, qui ne contient qu'un nombre fini de ces points. D'après la question 2, f est strictement croissante sur $[-A, A]$. Deux réels $x < y$ sont toujours dans un tel segment. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$. **Ainsi $\sin x < x$ pour tout $x > 0$.**
4. Cet exemple montre que la condition $f' > 0$ est suffisante mais pas nécessaire. **Une fonction strictement croissante peut avoir une dérivée qui s'annule en certains points.**

Corrigé de l'exercice 16 : Dérivées n-ièmes usuelles

1. Montrons par récurrence que $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Pour $n = 0$, c'est la définition. Supposons la formule vraie au rang n . En dérivant $n! (1-x)^{-(n+1)}$, on obtient $n! \times (-(n+1)) \times (-1) \times (1-x)^{-(n+2)}$. **Ainsi $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ pour tout n .**
2. Pour $n = 0$, la formule $s^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ est vraie. Si elle l'est au rang n , on dérive : $s^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$. **Donc $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.**
3. On a $\ell'(x) = \frac{1}{1+x}$. Montrons que $\ell^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ pour $n \geq 1$. La formule est vraie pour $n = 1$. Si elle l'est au rang n , la dérivée de $(1+x)^{-n}$ vaut $-n(1+x)^{-n-1}$. Ainsi $\ell^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \times (-n)(1+x)^{-n-1}$. **On obtient $\ell^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ pour tout $n \geq 1$.**
4. Pour $x > 1$, $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$, donc $r(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. Par une récurrence analogue à la question 1, pour tout réel a , la dérivée n -ième de $x \rightarrow \frac{1}{x-a}$ vaut $\frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$. Par linéarité :

$$r^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right).$$

Corrigé de l'exercice 17 : Formule de Leibniz

1. On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$. Les dérivées de u d'ordre au moins 3 sont nulles. De plus, $u'(x) = 2x$, $u''(x) = 2$ et $v^{(k)} = v$. La formule de Leibniz donne

$$(uv)^{(n)}(x) = x^2 e^x + n \cdot 2x e^x + \binom{n}{2} \cdot 2 e^x.$$

Or $2\binom{n}{2} = n(n-1)$. **Donc** $(x^2 e^x)^{(n)} = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x$.

2. De même, avec $u(x) = x^2 + 1$ et $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$:

$$f^{(n)}(x) = (x^2 + 1)\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

3. En $x = 0$, le terme central disparaît. Par ailleurs,

$\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} - \pi\right) = -\sin\frac{n\pi}{2}$. Ainsi $f^{(n)}(0) = (1 - n(n-1))\sin\frac{n\pi}{2}$. Si $n = 2p$, ce sinus est nul. Si $n = 2p + 1$, il vaut $(-1)^p$. **Donc** $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p(1 - 2p(2p+1))$. Vérifions. Pour $n = 1$ ($p = 0$), la formule donne 1 ; or $f'(x) = 2x\sin x + (x^2 + 1)\cos x$, donc $f'(0) = 1$. Pour $n = 3$ ($p = 1$), elle donne $-(1 - 6) = 5$. Directement, $f''(x) = \sin x + 4x\cos x - x^2\sin x$, puis $f^{(3)}(x) = 5\cos x - 6x\sin x - x^2\cos x$. On retrouve bien $f^{(3)}(0) = 5$.

Corrigé de l'exercice 18 : Fonction dérivable non de classe C1

1. Sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable comme produit et composée. On a

$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$. En 0, le taux vaut $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, majoré en valeur absolue par $|x|$. Il tend donc vers 0. **Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(0) = 0$ et**

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour } x \neq 0.$$

2. Posons $x_k = \frac{1}{2k\pi}$. Alors $x_k \rightarrow 0$ et $f'(x_k) = 0 - \cos(2k\pi) = -1$. Cette suite ne tend pas vers $f'(0) = 0$. **Donc f' n'est pas continue en 0 : f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.**
3. Pour $x \neq 0$, $g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi $|g'(x)| \leq 3x^2 + |x| \rightarrow 0$. En 0, le taux vaut $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0$, donc $g'(0) = 0$. Par conséquent, g' est continue en 0, et aussi sur $\mathbb{R}^*$. **La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.**
4. Pour $x \neq 0$, $\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Le long de $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, ce taux vaut -1 . En revanche, le long de $y_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$, il vaut $3y_k \rightarrow 0$. **Le taux n'a pas de limite : g n'est pas deux fois dérivable en 0.**

Corrigé de l'exercice 19 : Somme des carrés des coefficients binomiaux

1. Par récurrence immédiate sur k : $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.
2. Directement, la question 1 appliquée à x^{2n} donne $(x^{2n})^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} x^n$. Ensuite, par la formule de Leibniz :
- $$(x^n \cdot x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!} x^k.$$
- Or $\frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$. **Donc $(x^{2n})^{(n)} = n! \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right) x^n$.**
3. On identifie les coefficients de x^n : $\frac{(2n)!}{n!} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. On divise par $n!$. **On obtient**
- $$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$
4. Pour $n = 3$, les coefficients sont 1, 3, 3, 1. **La somme des carrés vaut**
- $$1 + 9 + 9 + 1 = 20 = \binom{6}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 20 : Une fonction de classe C infini plate en 0

1. Posons $t = \frac{1}{x}$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $t \rightarrow +\infty$. Par croissances comparées, $t^k e^{-t} \rightarrow 0$ pour tout entier k . Un polynôme Q est une combinaison linéaire de monômes. **Donc**
 $Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} \rightarrow 0$ **quand** $x \rightarrow 0^+$.

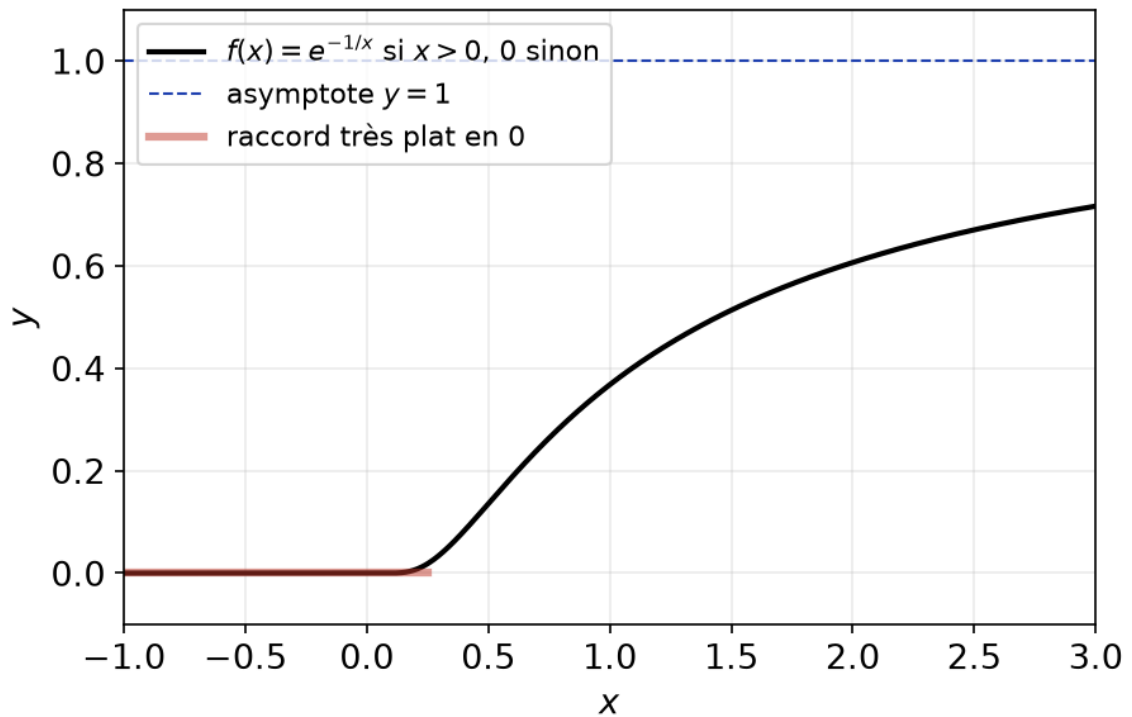
2. Pour $n = 0$, on prend $P_0 = 1$. Supposons $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$ sur $]0, +\infty[$. On dérive ce produit :

$$f^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} + \frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

Ainsi la propriété est héréditaire avec $P_{n+1}(t) = t^2(P_n(t) - P'_n(t))$.

3. Montrons par récurrence la propriété : « f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et $f^{(n)} = 0$ sur $] -\infty, 0[$ ». Pour $n = 0$, elle est vraie. Supposons-la vraie au rang n . Sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, $f^{(n)}$ est dérivable. En 0 , le taux à gauche est nul. À droite, il vaut $\frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} = Q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$, avec $Q(t) = t P_n(t)$. D'après la question 1, il tend vers 0 . **Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$: la propriété est vraie pour tout n .**

4. Pour tout n , $f^{(n)}$ est dérivable, donc continue. **Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec**
 $P_1(t) = t^2$ **et** $P_2(t) = t^2(t^2 - 2t) = t^4 - 2t^3$. Par exemple, $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^2}$ pour $x > 0$. La figure ci-dessous montre ce raccord extrêmement plat en 0 , alors que f n'est pas nulle sur $]0, +\infty[$.



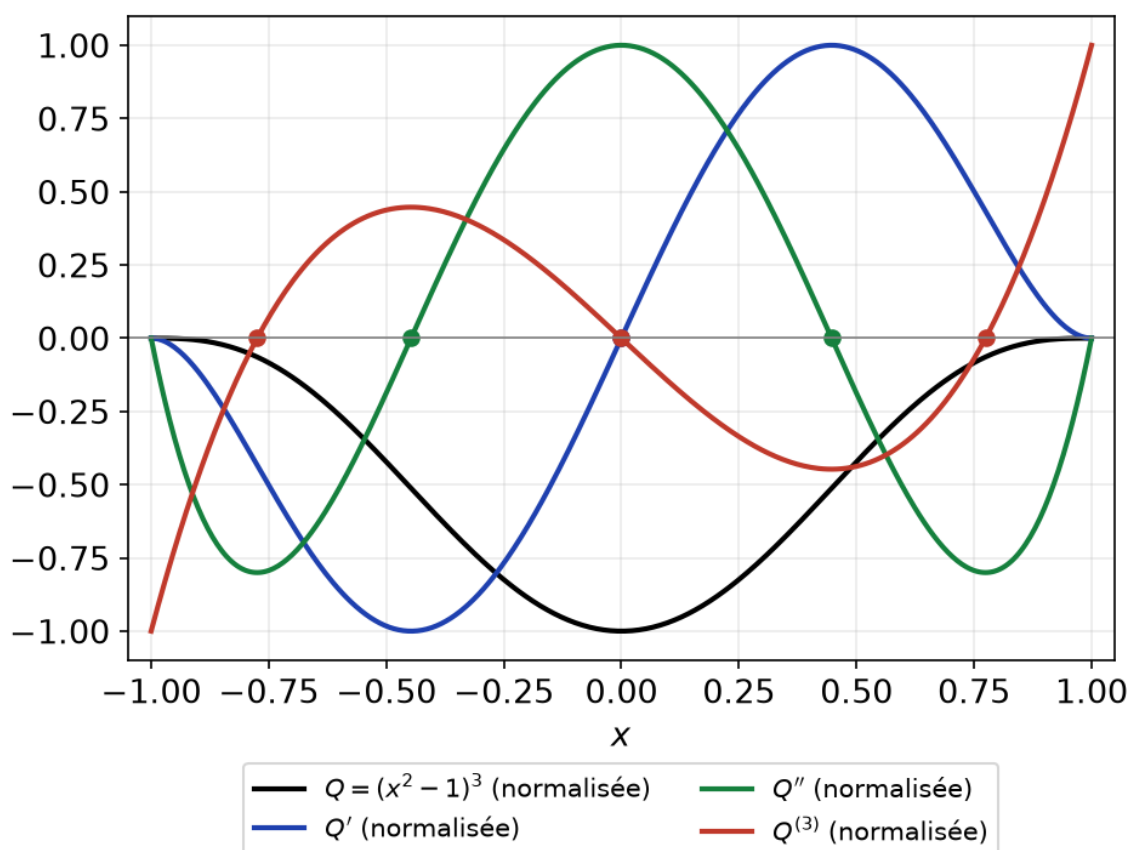
Corrigé de l'exercice 21 : Théorème des accroissements finis généralisé

- La fonction h est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Calculons ses valeurs aux bornes. D'une part, $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$. D'autre part, $h(b) = f(b)g(b) - f(a)g(b) - g(b)f(b) + g(a)f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b)$. Donc $h(a) = h(b)$. Le théorème de Rolle fournit $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. **Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.**
- Supposons $g(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in]a, b[$. Comme $g(a) = 0$, le théorème de Rolle sur $[a, x_0]$ donnerait un zéro de g' dans $]a, x_0[$, ce qui est exclu. Ainsi g ne s'annule pas sur $]a, b[$. Soit maintenant $x \in]a, b[$. On applique la question 1 sur $[a, x]$: il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x)$. Comme $g(x) \neq 0$ et $g'(c_x) \neq 0$, on obtient $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Quand $x \rightarrow a^+$, on a $c_x \rightarrow a^+$. **Par composition des limites, $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \ell$: c'est la règle de L'Hospital.**
- On travaille sur $[0, 1]$. D'abord, avec $f(x) = 1 - \cos x$ et $g(x) = 3x^2$, on a

$f(0) = g(0) = 0$ et $g'(x) = 6x \neq 0$ sur $]0, 1[$. De plus, $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\sin x}{6x} \rightarrow \frac{1}{6}$. Donc $\frac{1 - \cos x}{3x^2} \rightarrow \frac{1}{6}$. Ensuite, avec $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = x^3$, on a $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1 - \cos x}{3x^2} \rightarrow \frac{1}{6}$. **Donc** $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$. Enfin, la fonction $x \rightarrow \frac{x - \sin x}{x^3}$ est paire. **Sa limite en 0^- vaut donc aussi $\frac{1}{6}$.**

Corrigé de l'exercice 22 : Racines des polynômes de Legendre

- On écrit $Q(x) = (x-1)^n (x+1)^n$. Soit $k \leq n-1$. Par la formule de Leibniz, $Q^{(k)}$ est une somme de termes $\binom{k}{j} [(x-1)^n]^{(j)} [(x+1)^n]^{(k-j)}$, avec $j \leq k$. Or $[(x-1)^n]^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} (x-1)^{n-j}$, avec $n-j \geq 1$. Chaque terme s'annule donc en 1 . Le même argument, appliqué au facteur $(x+1)^n$, vaut en -1 . **Ainsi** $Q^{(k)}(-1) = Q^{(k)}(1) = 0$ **pour** $0 \leq k \leq n-1$.
- Pour $k=1$, on a $Q(-1) = Q(1) = 0$. Le théorème de Rolle donne une racine de Q' dans $] -1, 1[$. Supposons ensuite que $Q^{(k)}$ a k racines distinctes $y_1 < \dots < y_k$ dans $] -1, 1[$, avec $k \leq n-1$. D'après la question 1, $Q^{(k)}$ s'annule aussi en -1 et en 1 . Elle a donc $k+2$ zéros $-1 < y_1 < \dots < y_k < 1$. Le théorème de Rolle, appliqué sur les $k+1$ intervalles consécutifs, fournit $k+1$ zéros distincts de $Q^{(k+1)}$ dans $] -1, 1[$. **Par récurrence, $Q^{(k)}$ a au moins k racines distinctes dans $] -1, 1[$ pour $1 \leq k \leq n$.**
- Le polynôme Q est de degré $2n$, de coefficient dominant 1 . Donc $L_n = Q^{(n)}$ est de degré n , de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!} \neq 0$. D'après la question 2, il possède au moins n racines distinctes dans $] -1, 1[$. Un polynôme de degré n a au plus n racines. **Ainsi L_n a exactement n racines, toutes réelles, simples et dans $] -1, 1[$.**
- D'abord, $(x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$, donc $L_2(x) = 12x^2 - 4$. Ses racines sont $\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,577$. Ensuite, $(x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$, donc $L_3(x) = 120x^3 - 72x = 24x(5x^2 - 3)$. **Les racines de L_3 sont 0 et $\pm \sqrt{3/5} \approx \pm 0,775$, toutes dans $] -1, 1[$.** La figure ci-dessous montre, pour $n=3$, comment les racines se multiplient à chaque dérivation.



Corrigé de l'exercice 23 : Problème : le théorème de Darboux

- La fonction f est dérivable, donc continue, sur le segment $[a, b]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle y admet un minimum en un point c . Ensuite, le taux $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tend vers $f'(a) < 0$ quand $x \rightarrow a^+$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que ce taux soit négatif sur $]a, a + \eta[$. Pour ces x , $f(x) < f(a)$, donc le minimum n'est pas atteint en a . De même, $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \rightarrow f'(b) > 0$ quand $x \rightarrow b^-$. Pour x proche de b à gauche, on a $x - b < 0$, donc $f(x) < f(b)$. **Ainsi le minimum est atteint en un point c avec $c \neq a$ et $c \neq b$.**
- Le point c appartient à $]a, b[$, qui est un voisinage de c inclus dans I . Donc f admet en c un minimum local, en un point intérieur où elle est dérivable. **Par la condition nécessaire d'extremum, $f'(c) = 0$.**
- Supposons d'abord $f'(a) < \lambda < f'(b)$. On pose $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$. Alors

$\varphi'(a) < 0 < \varphi'(b)$, et la question 2 donne c tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) = \lambda$. Si au contraire $f'(a) > \lambda > f'(b)$, on applique ce raisonnement à $\psi(x) = \lambda x - f(x)$. Soit enfin deux valeurs de $f'(I)$ et un réel compris entre elles. Ce réel est atteint par f' , d'après ce qui précède. **Donc f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, et $f'(I)$ est un intervalle.**

4. Supposons que $H = F'$ pour une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la question 3, $H(\mathbb{R})$ serait un intervalle. Or $H(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$, qui n'en est pas un. **Donc H n'est la dérivée d'aucune fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.**

5. D'après l'exercice 18, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. Soit $\delta > 0$. On choisit un entier $k \geq 1$ tel que $x_k = \frac{1}{2k\pi} < \delta$. Posons aussi $y_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$, de sorte que $0 < y_k < x_k < \delta$. On calcule $F'(x_k) = 0 - \cos(2k\pi) = -1$ et $F'(y_k) = 0 - \cos((2k+1)\pi) = 1$. D'après la question 3, sur $[y_k, x_k]$, F' prend toutes les valeurs de $] -1, 1[$. Les valeurs ± 1 sont atteintes en x_k et y_k . **Ainsi F' prend toutes les valeurs de $[-1, 1]$ sur $]0, \delta[$, bien qu'elle ne soit pas continue en 0 .**

Point de méthode : le théorème de Darboux permet de montrer qu'une fonction n'est pas une dérivée : il suffit que son image ne soit pas un intervalle.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en L1

- Le cours : [dérivation, cours de maths en L1](#)
- Les énoncés : [exercices de maths en L1 sur dérivation](#)
- À maîtriser avant : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Chapitre précédent : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Fonctions usuelles et fonctions réciproques](#)

- Tester vos connaissances : [QCM de maths en L1 par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths de L1](#) et la [licence de maths de L1 à L3](#)