

Dérivabilité et convexité

Exercice 1 : Dérivabilité en un point délicat

Étudiez la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes. Précisez, le cas échéant, les nombres dérivés à gauche et à droite.

1. $f(x) = x|x|$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$.
3. $k(x) = x\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$, et $k(0) = 0$. Vérifiez d'abord que k est continue en 0 .

Exercice 2 : Limites et tangentes par le nombre dérivé

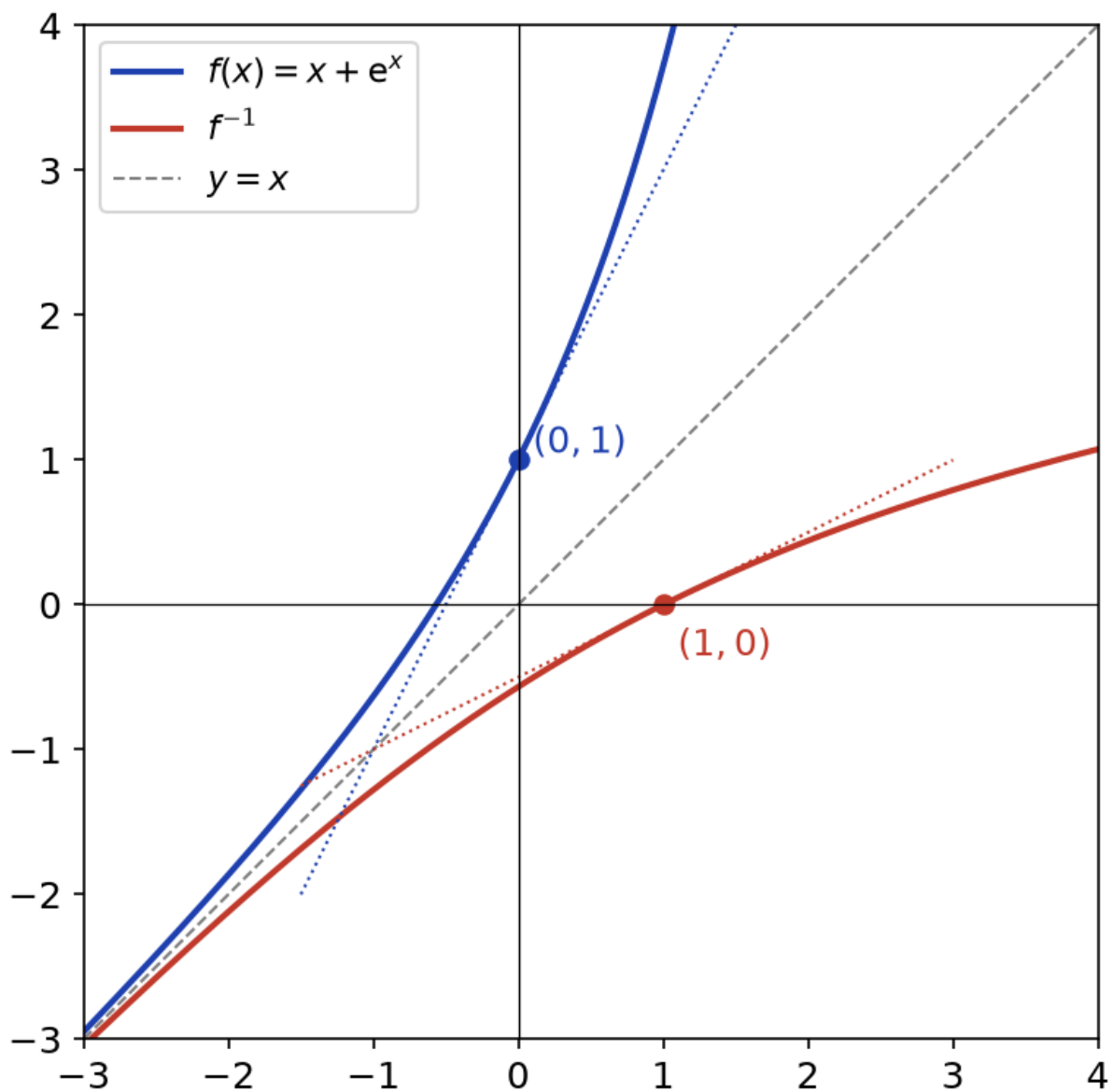
1. En reconnaissant des taux d'accroissement, calculez les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{x}$$

2. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de $\arctan$ au point d'abscisse 1 , puis l'ordonnée de son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 3 : Dérivée d'une bijection réciproque

On pose $f(x) = x + e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$. La figure ci-dessous représente f , sa réciproque et leurs tangentes aux points $(0,1)$ et $(1,0)$.



1. Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note $g = f^{-1}$.
2. Justifiez que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez $g'(1)$.
3. Montrez que pour tout réel y , $g'(y) = \frac{1}{1 + y - g(y)}$.
4. Justifiez que g est deux fois dérivable et calculez $g''(1)$.
5. Donnez l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

Exercice 4 : Extremums locaux et points critiques

On pose $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Déterminez les points critiques de f sur $\mathbb{R}$. Précisez s'ils correspondent à des extremums locaux, puis globaux.
2. Déterminez le maximum et le minimum de f sur le segment $[0,2]$. Le maximum est-il atteint en un point critique ? Expliquez pourquoi ce n'est pas contradictoire.
3. Montrez que 0 est un point critique de $x \rightarrow x^3$ qui n'est pas un extremum local.
4. Montrez que $x \rightarrow |x|$ admet un minimum en 0 sans que 0 soit un point critique.

Exercice 5 : Théorème de Rolle et racines d'un polynôme

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable qui s'annule en $n \geq 2$ réels distincts. Montrez que f' s'annule en au moins $n - 1$ réels distincts.
2. On pose $P(x) = x^5 - 5x + 1$. Déduisez de la question 1 que P a au plus trois racines réelles.
3. Montrez que P a exactement trois racines réelles, et localisez chacune d'elles entre deux entiers consécutifs.

Exercice 6 : Rolle itéré et polynômes de Legendre

1. Soient $n \geq 1$ et $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable, qui s'annule en $n + 1$ points distincts de $[a,b]$. Montrez que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.
2. Soit $n \geq 1$. On pose $Q(x) = (x^2 - 1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ et $L_n = Q^{(n)}$. À l'aide de

la formule de Leibniz, montrez que $Q^{(k)}(1) = Q^{(k)}(-1) = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

3. Montrez par récurrence que pour $0 \leq k \leq n$, $Q^{(k)}$ s'annule en au moins k points distincts de $] -1, 1[$.
4. Déduisez-en que L_n est de degré n et possède n racines réelles distinctes, toutes dans $] -1, 1[$.

Exercice 7 : Encadrements par les accroissements finis

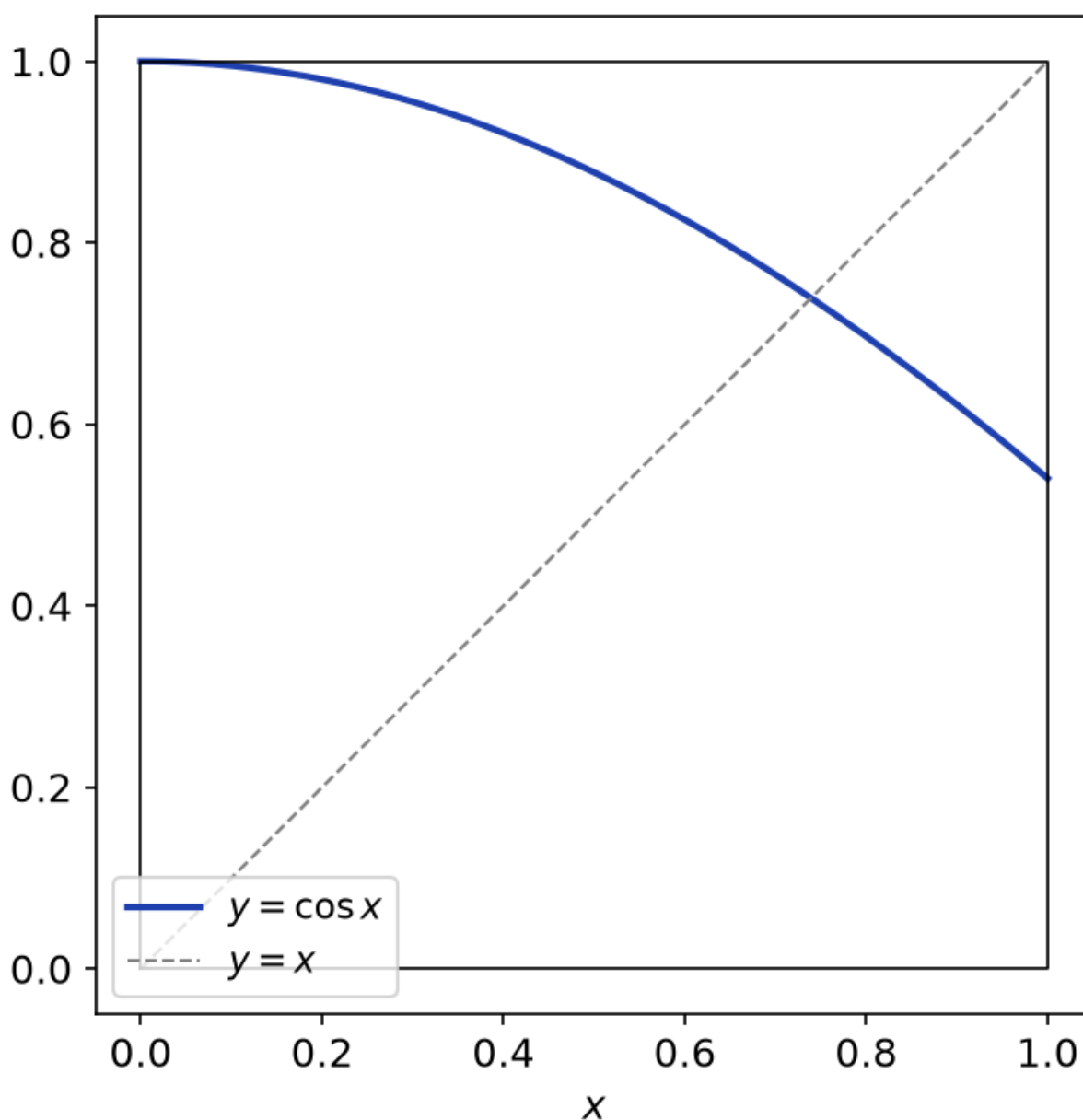
1. Montrez que pour tout $x > 0$: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
2. Déduisez-en la limite de $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
3. Montrez que pour $0 < a < b$: $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.
4. Montrez que pour tous réels a, b : $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$. Déduisez-en que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout réel x .

Exercice 8 : Fonctions lipschitziennes

1. Montrez que $x \rightarrow |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0 .
2. Montrez que $x \rightarrow \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.
3. Montrez que $x \rightarrow \sqrt{x}$ n'est lipschitzienne sur $[0, 1]$ pour aucune constante K .
4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et K -lipschitzienne. Montrez que $|f'(x)| \leq K$ pour tout $x \in I$.
5. Montrez qu'une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ y est lipschitzienne.

Exercice 9 : Suite récurrente et inégalité des accroissements finis

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La figure ci-dessous représente $y = \cos x$ et $y = x$ sur le carré $[0,1]^2$.



1. Montrez que l'intervalle $[0,1]$ est stable par $\cos$. Déduisez-en que $u_n \in [0,1]$ pour tout n .
2. Montrez que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution ℓ dans $[0,1]$.

- Montrez que $|u_{n+1} - \ell| \leq \sin(1) |u_n - \ell|$ pour tout n . Dédisez-en que $|u_n - \ell| \leq (\sin 1)^n$, puis que (u_n) converge vers ℓ .
- On donne $\ln 10 \approx 2,3026$ et $\ln(\sin 1) \approx -0,1726$. Trouvez un entier N tel que u_N soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 10 : Théorème de la limite de la dérivée

- Soit $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrez que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donnez $f'(0)$.
- Soit $g(x) = x \ln|x|$ pour $x \neq 0$, et $g(0) = 0$. Montrez que g est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 . Interprétez géométriquement.
- Soit $h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$. Calculez $h'(x)$, puis $h(x)$ selon le signe de x . La dérivée h' a une limite en 0 : pourquoi ne peut-on pas prolonger h en une fonction dérivable en 0 ? Quelle hypothèse du théorème manque ?

Exercice 11 : Une fonction plate indéfiniment dérivable

On pose $f(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

- Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(1/x) e^{-1/x}$ pour tout $x > 0$. On vérifiera que $P_0 = 1$ et $P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X))$.
- Montrez que pour tout polynôme Q , $Q(1/x) e^{-1/x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- Montrez par récurrence sur n que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$.
- Concluez : f est de classe C^∞ , toutes ses dérivées sont nulles en 0 , mais f n'est nulle sur aucun intervalle $] -\eta, \eta[$ avec $\eta > 0$.

Exercice 12 : Dérivées n-ièmes par la formule de Leibniz

Calculez la dérivée n -ième des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 e^{3x}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $g(x) = (x^2 + 1)\cos x$, pour $n \geq 2$. On rappelle que $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$.
3. $h(x) = x^3 \ln x$ sur $]0, +\infty[$, pour $n \geq 4$. Simplifiez le résultat, puis vérifiez-le en calculant directement $h^{(4)}$.

Exercice 13 : Formule de Leibniz et dérivées de arctan en 0

On note $f = \arctan$.

1. Justifiez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $(1 + x^2)f'(x) = 1$.
2. Montrez que pour tout $n \geq 1$ et tout réel x :
$$(1 + x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$
3. Déduisez-en $f^{(n)}(0)$ pour tout n : montrez que $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p (2p)!$.

Exercice 14 : Fonctions à valeurs complexes

On pose $\varphi(t) = e^{it}$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

1. Vérifiez que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et que φ' ne s'annule pas. Qu'en concluez-vous ?

2. Appliquez le théorème de Rolle à $\cos = \operatorname{Re} \varphi$ et à $\sin = \operatorname{Im} \varphi$ sur $[0, 2\pi]$. Expliquez pourquoi on ne peut pas recoller les deux résultats.
3. Montrez que pour tous réels a, b : $|e^{ib} - e^{ia}| = 2 \left| \sin \frac{b-a}{2} \right|$. Déduisez-en que $t \rightarrow e^{it}$ est 1-lipschitzienne, conformément à l'inégalité des accroissements finis.
4. Calculez la dérivée n -ième de $g(x) = e^x \sin x$ en l'écrivant comme partie imaginaire d'une exponentielle complexe.

Exercice 15 : Inégalités classiques par convexité

Démontrez les inégalités suivantes en justifiant la convexité ou la concavité utilisée.

1. $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .
2. $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$.
3. $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
4. $2^x \leq 1 + x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 16 : Inégalité de Jensen et moyennes

Soient $n \geq 2$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrez l'inégalité arithmético-géométrique : $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
2. Déduisez-en l'inégalité entre moyennes harmonique et géométrique :
$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

3. Montrez que $\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$.
4. Soient $a, b, c > 0$ tels que $a + b + c = 3$. Montrez que $abc \leq 1$ et que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.
5. Par convexité de $x \rightarrow x^2$, montrez que $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Exercice 17 : Inégalités de Young et de Hölder

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. (Young) Montrez que pour tous $a, b \geq 0$: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. On utilisera la concavité de $\ln$.
2. (Hölder) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0$. Montrez que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

3. Quelle inégalité obtient-on pour $p = q = 2$?
4. Montrez que pour tous $x, y, z \geq 0$: $x + y + z \leq 3^{2/3}(x^3 + y^3 + z^3)^{1/3}$.

Exercice 18 : Dérivées à gauche et à droite d'une fonction convexe

Soient I un intervalle **ouvert** et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On admet le lemme des trois pentes : pour tout $a \in I$, le taux $\tau_a : x \rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissant sur $I \setminus \{a\}$.

1. Soit $a \in I$. Montrez que f est dérivable à gauche et à droite en a , avec $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.
2. Déduisez-en que f est continue sur I .
3. Soient $a < b$ dans I . Montrez que $f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$. Déduisez-en que f'_d est croissante sur I .
4. Donnez une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $f'_g(0) < f'_d(0)$.
5. On pose $u(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $u(1) = 1$. Montrez que u est convexe sur $[0,1]$ mais pas continue. Quelle hypothèse de l'énoncé est essentielle ?

Exercice 19 : Convexité et point d'inflexion

On pose $f(x) = x e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculez f' et f'' . Dressez le tableau de variations de f et montrez que $f(x) \leq e^{-1}$ pour tout réel x .
2. Déterminez les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave, et le point d'inflexion de la courbe.
3. Donnez l'équation de la tangente T au point d'inflexion. Précisez la position de la courbe par rapport à T .
4. Déduisez-en que $x e^{-x} \geq e^{-2}(4 - x)$ pour tout $x \geq 2$.

Exercice 20 : Fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$

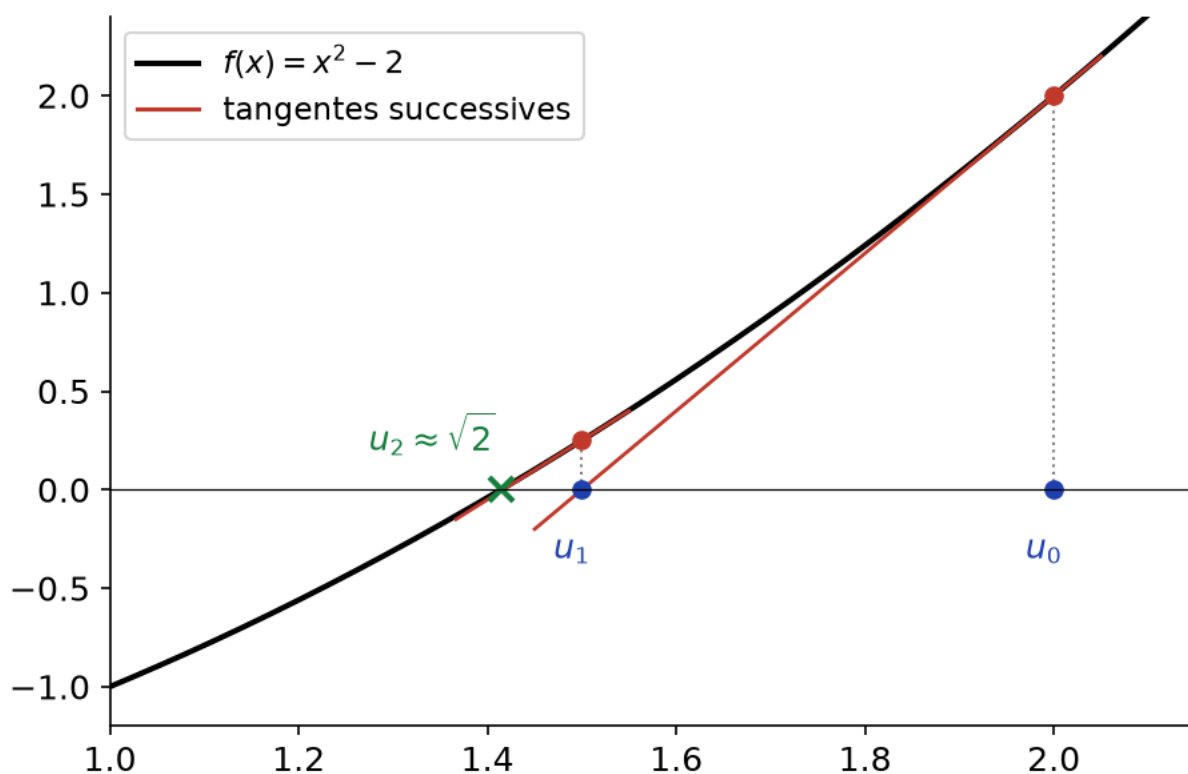
1. Soit f convexe sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Montrez que $f(z) \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow +\infty$.
2. Déduisez-en qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

3. Montrez que ce résultat devient faux sur $]0, +\infty[$.

4. Soit f convexe sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrez que f est décroissante.

Exercice 21 : Problème : méthode de Newton et convexité

Partie A. Soient $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . On suppose $f(a) < 0 < f(b)$, $f' > 0$ et $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$: c'est l'abscisse du point où la tangente en x coupe l'axe des abscisses. La figure ci-dessous illustre la méthode.



1. Montrez que f s'annule en un unique point $c \in]a, b[$.

2. Soit $x \in [c, b]$. En utilisant la convexité de f , montrez que $c \leq N(x) \leq x$.

3. On pose $u_0 = b$ et $u_{n+1} = N(u_n)$. Montrez que la suite est bien définie, décroissante, minorée par c , et qu'elle converge vers c .

Partie B. On prend $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1,2]$, donc $u_0 = 2$.

1. Vérifiez les hypothèses de la partie A. Montrez que $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, puis calculez u_1 et u_2 .
2. On pose $e_n = u_n - \sqrt{2}$. Montrez que $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$, puis que $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2}$.
3. En utilisant $e_0 \leq 0,6$, montrez que $e_2 \leq 3 \times 10^{-3}$, puis que $e_4 \leq 10^{-10}$.

Le corrigé des exercices

Chaque exercice est corrigé en détail, question par question, sur la page suivante.



Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [dérivabilité et convexité, cours de maths sup](#)
- À maîtriser avant : [Limites et continuité des fonctions](#), [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Chapitre précédent : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)

- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)