

Dérivabilité et convexité

Corrigé de l'exercice 1 : Dérivabilité en un point délicat

1. Pour $x \neq 0$, le taux d'accroissement en 0 vaut $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x|x|}{x} = |x|$. Or $|x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. **Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.**

2. D'abord, $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$, donc $g(x) = \sqrt{2} |\sin(x/2)|$ et $g(0) = 0$. Pour $x \in]0, \pi[$, on a $\sin(x/2) > 0$. Ainsi,

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\sqrt{2}\sin(x/2)}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin(x/2)}{x/2} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2},$$

car $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$ en 0. De même, pour $x \in]-\pi, 0[$, on a $|\sin(x/2)| = -\sin(x/2)$, et le taux tend vers $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Donc g est dérivable à gauche et à droite en 0, avec**

$g'_g(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g'_d(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mais elle n'est pas dérivable en 0 : c'est un point anguleux.

3. D'abord, $|k(x)| = |x| |\sin(1/x)| \leq |x|$ pour $x \neq 0$. Par encadrement, $k(x) \rightarrow 0 = k(0)$, donc k est continue en 0. Ensuite, pour $x \neq 0$, le taux vaut $\frac{k(x)}{x} = \sin(1/x)$. Or cette expression n'a pas de limite en 0. En effet, avec $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$, les deux suites tendent vers 0, mais $\sin(1/x_n) = 0$ et $\sin(1/y_n) = 1$. **Donc k est continue en 0 mais n'y est pas dérivable, ni à gauche ni à droite.**

Point de méthode : pour montrer qu'une limite n'existe pas, on exhibe deux suites qui tendent vers le point et dont les images ont des limites différentes.

Corrigé de l'exercice 2 : Limites et tangentes par le nombre dérivé

1. Dans chaque cas, on reconnaît le taux d'accroissement d'une fonction dérivable.

a) Posons $u(x) = \sin(3x)$. Alors $u(0) = 0$ et $\frac{\sin(3x)}{x} = \frac{u(x) - u(0)}{x - 0}$. Comme u est dérivable avec $u'(x) = 3\cos(3x)$, la limite vaut $u'(0) = 3$.

b) On a $\ln 1 = 0$, donc $\frac{\ln x}{x-1}$ est le taux de $\ln$ en 1 . La limite vaut $\ln'(1) = 1$.

c) De même, $\tan(\pi/4) = 1$. La limite vaut donc $\tan'(\pi/4) = 1 + \tan^2(\pi/4) = 2$.

d) Posons $v(x) = e^{2x} - \cos x$. Alors $v(0) = 1 - 1 = 0$ et $v'(x) = 2e^{2x} + \sin x$. Par conséquent, la limite vaut $v'(0) = 2$.

Les quatre limites valent respectivement 3, 1, 2 et 2.

2. On a $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\arctan'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. La tangente a donc pour équation $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1)$. En $x = 0$, on obtient $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. **La tangente est**
 $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; elle coupe l'axe des ordonnées en $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0,285$.

Corrigé de l'exercice 3 : Dérivée d'une bijection réciproque

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 + e^x > 0$. Elle est donc continue et strictement croissante. De plus, $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, car $e^x \rightarrow 0$, et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, **f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.**

2. Comme f' ne s'annule jamais, le théorème de dérivation de la réciproque s'applique en tout

point. Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Or $f(0) = 0 + 1 = 1$, donc $g(1) = 0$. **Par conséquent**, $g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

3. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $g'(y) = \frac{1}{1 + e^{g(y)}}$. De plus, $f(g(y)) = y$, c'est-à-dire $g(y) + e^{g(y)} = y$. Donc $e^{g(y)} = y - g(y)$. **On obtient** $g'(y) = \frac{1}{1 + y - g(y)}$.

4. La fonction g est dérivable, donc $y \rightarrow 1 + y - g(y)$ l'est aussi. De plus, elle vaut $1 + e^{g(y)}$, qui ne s'annule pas. Ainsi, g' est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable non nulle. En dérivant, on trouve

$$g''(y) = -\frac{1 - g'(y)}{(1 + y - g(y))^2}.$$

En $y = 1$, on a $g(1) = 0$ et $g'(1) = \frac{1}{2}$. **Donc** $g''(1) = -\frac{1/2}{2^2} = -\frac{1}{8}$.

5. La tangente en 1 a pour équation $y = g(1) + g'(1)(x - 1)$. **C'est la droite** $y = \frac{1}{2}(x - 1)$, symétrique par rapport à $y = x$ de la tangente $y = 1 + 2x$ à la courbe de f en 0.

Corrigé de l'exercice 4 : Extremums locaux et points critiques

1. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Les points critiques sont donc -1 et 1 . Ensuite, $f' > 0$ sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, et $f' < 0$ sur $]-1, 1[$. Ainsi, f admet un maximum local en -1 , avec $f(-1) = 2$, et un minimum local en 1 , avec $f(1) = -2$. Cependant, $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$ et $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$. **Les deux extremums sont locaux mais pas globaux.**

2. Sur $[0, 1]$, f décroît de 0 à -2 . Ensuite, sur $[1, 2]$, elle croît de -2 à $f(2) = 8 - 6 = 2$. **Le minimum sur $[0, 2]$ vaut -2 , atteint en 1 ; le maximum vaut 2 , atteint en 2 .** Or $f'(2) = 9 \neq 0$. Ce n'est pas contradictoire : la condition $f'(a) = 0$ ne vaut qu'en un point **intérieur**, et 2 est une extrémité du segment.

3. Pour $h(x) = x^3$, on a $h'(0) = 0$, donc 0 est un point critique. Pourtant, $h(x) < 0 = h(0)$ pour $x < 0$ et $h(x) > 0$ pour $x > 0$. Dans tout voisinage de 0 , h prend des valeurs plus grandes et plus petites que $h(0)$. **Donc 0 n'est pas un extremum**

local.

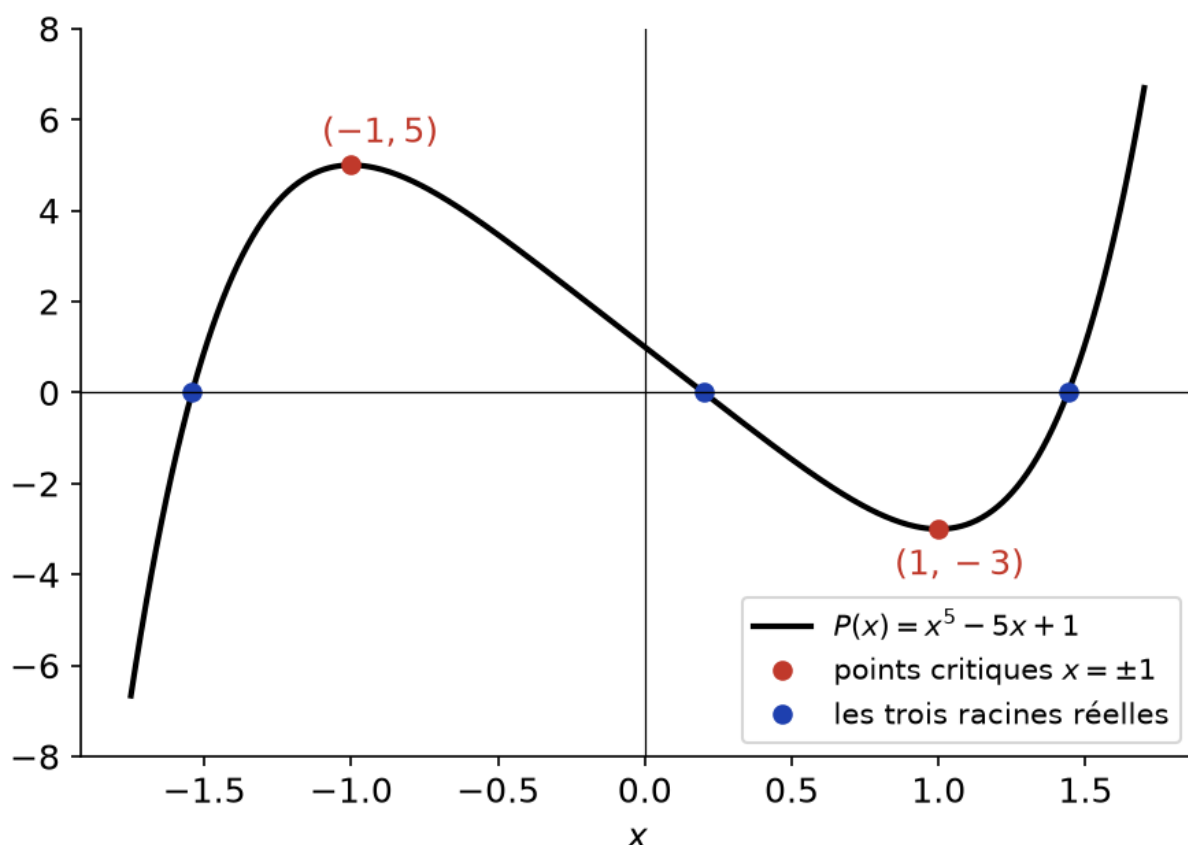
4. Pour tout réel x , $|x| \geq 0 = |0|$. Donc $x \rightarrow |x|$ admet un minimum global en 0 . En revanche, son taux en 0 vaut 1 à droite et -1 à gauche. **Elle n'est pas dérivable en 0 , donc 0 n'est pas un point critique.**

Point de méthode : pour chercher les extremums sur un segment, on examine les points critiques intérieurs, les extrémités et les points où la fonction n'est pas dérivable.

Corrigé de l'exercice 5 : Théorème de Rolle et racines d'un polynôme

- Notons $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les zéros de f . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, la fonction f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, et $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$. Le théorème de Rolle fournit $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$. Les intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ sont disjoints, donc les c_i sont distincts. **Ainsi, f' s'annule en au moins $n - 1$ points distincts.**
- On a $P'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^2 - 1)(x^2 + 1)$. Ses seules racines réelles sont -1 et 1 . Supposons que P ait au moins quatre racines réelles distinctes. D'après la question 1, P' en aurait au moins trois, ce qui est faux. **Donc P a au plus trois racines réelles.**
- Calculons quelques valeurs : $P(-2) = -32 + 10 + 1 = -21$,
 $P(-1) = -1 + 5 + 1 = 5$, $P(0) = 1$, $P(1) = 1 - 5 + 1 = -3$ et
 $P(2) = 32 - 10 + 1 = 23$. La fonction P est continue. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur $] -2, -1[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$. Ces intervalles sont disjoints, ce qui donne trois racines distinctes. **Avec la question 2, P a exactement trois racines réelles, situées dans $] -2, -1[$, $]0, 1[$ et $]1, 2[$.**

La figure ci-dessous confirme ce résultat : entre deux racines consécutives se trouve un point critique, comme l'affirme le théorème de Rolle.



Corrigé de l'exercice 6 : Rolle itéré et polynômes de Legendre

- Notons $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ les zéros de f . Montrons par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $f^{(k)}$ s'annule en au moins $n + 1 - k$ points distincts de $[x_0, x_n]$, et même de $]x_0, x_n[$ si $k \geq 1$. Pour $k = 0$, c'est l'hypothèse. Supposons le résultat vrai au rang $k \leq n - 1$. La fonction $f^{(k)}$ est dérivable, donc continue. On applique le théorème de Rolle entre deux zéros consécutifs de $f^{(k)}$. On obtient ainsi $n - k$ zéros distincts de $f^{(k+1)}$, strictement compris entre x_0 et x_n . Pour $k = n$, on obtient au moins un zéro. **Donc $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]x_0, x_n[\subset]a, b[$.**

- Soit $0 \leq k \leq n - 1$. Par la formule de Leibniz,

$$Q^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{n!}{(n-j)!} (x-1)^{n-j} \cdot \frac{n!}{(n-k+j)!} (x+1)^{n-k+j}.$$

Dans chaque terme, l'exposant $n - j$ vérifie $n - j \geq n - k \geq 1$. Donc chaque terme s'annule en 1 . De même, $n - k + j \geq 1$, donc chaque terme s'annule en -1 . **Ainsi,**
 $Q^{(k)}(1) = Q^{(k)}(-1) = 0$ **pour** $0 \leq k \leq n - 1$.

3. Pour $k = 0$, l'énoncé demande au moins 0 zéro : c'est vrai. Supposons que $Q^{(k)}$ ait au moins k zéros distincts dans $] -1, 1[$, avec $k \leq n - 1$. D'après la question 2, $Q^{(k)}$ s'annule aussi en -1 et en 1 . Elle a donc au moins $k + 2$ zéros distincts dans $[-1, 1]$. Ensuite, le théorème de Rolle, appliqué entre deux zéros consécutifs, donne $k + 1$ zéros distincts de $Q^{(k+1)}$ dans $] -1, 1[$. **La propriété est donc vraie pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.**
4. Le polynôme Q est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1 . Donc $L_n = Q^{(n)}$ est de degré n , de coefficient dominant $\frac{(2n)!}{n!} \neq 0$. D'après la question 3, L_n possède au moins n racines distinctes dans $] -1, 1[$. Or un polynôme non nul de degré n a au plus n racines. **Par conséquent, L_n a exactement n racines réelles, toutes simples et situées dans $] -1, 1[$.**

Corrigé de l'exercice 7 : Encadrements par les accroissements finis

1. Soit $x > 0$. La fonction $\ln$ est continue sur $[1, 1+x]$ et dérivable sur $]1, 1+x[$. L'égalité des accroissements finis fournit $c \in]1, 1+x[$ tel que $\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{1}{c} \cdot x$. Or $1 < c < 1+x$, donc $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < 1$. En multipliant par $x > 0$, **on obtient** $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
2. On applique la question 1 avec $x = \frac{1}{n}$, puis on multiplie par n . On obtient $\frac{n}{n+1} < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1$. Or $\frac{n}{n+1} \rightarrow 1$. **Par encadrement, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$.**
3. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. L'égalité des accroissements finis sur $[a, b]$ fournit $c \in]a, b[$ tel que $\arctan b - \arctan a = \frac{b-a}{1+c^2}$. Comme $0 < a < c < b$, on a $1 + a^2 < 1 + c^2 < 1 + b^2$. En passant aux inverses, **on obtient** $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$.
4. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|\sin'| = |\cos| \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$. Avec $a = 0$ et $b = x$, **on obtient** $|\sin x| \leq |x|$.

Corrigé de l'exercice 8 : Fonctions lipschitziennes

1. Par l'inégalité triangulaire renversée, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ pour tous réels x, y . **Donc la valeur absolue est 1-lipschitzienne.** Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0 , car ses nombres dérivés à gauche et à droite valent -1 et 1 . Ainsi, une fonction lipschitzienne n'est pas forcément dérivable.
2. Sur $[1, +\infty[$, la fonction racine est dérivable et $0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$. **Par l'inégalité des accroissements finis, elle y est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.**
3. Supposons qu'il existe K tel que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. Avec $y = 0$ et $x \in]0, 1]$, on obtient $\sqrt{x} \leq Kx$, donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq K$. Or $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$, ce qui est absurde. **Donc la racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.**
4. Soit $x \in I$. Pour $y \in I$, $y \neq x$, l'hypothèse donne $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq K$. Ensuite, on fait tendre y vers x : le taux tend vers $f'(x)$ et les inégalités larges passent à la limite. **Donc $|f'(x)| \leq K$.**
5. Soit f de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors f' est continue sur le segment $[a, b]$. Par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée : il existe K tel que $|f'| \leq K$. **Par l'inégalité des accroissements finis, f est K -lipschitzienne sur $[a, b]$.**

Corrigé de l'exercice 9 : Suite récurrente et inégalité des accroissements finis

1. La fonction $\cos$ est décroissante sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$. Donc $\cos([0, 1]) = [\cos 1, 1]$. Or $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos 1 > 0$. Ainsi, $\cos([0, 1]) \subset [0, 1]$. Ensuite, par récurrence : $u_0 = 0 \in [0, 1]$, et si $u_n \in [0, 1]$, alors $u_{n+1} = \cos u_n \in [0, 1]$. **Donc $u_n \in [0, 1]$ pour tout n .**
2. Posons $\varphi(x) = \cos x - x$ sur $[0, 1]$. Elle est continue, dérivable, et $\varphi'(x) = -\sin x - 1 < 0$. Elle est donc strictement décroissante. De plus, $\varphi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Par le théorème de la bijection, φ s'annule en un unique point $\ell \in]0, 1[$, c'est-à-dire $\cos \ell = \ell$.

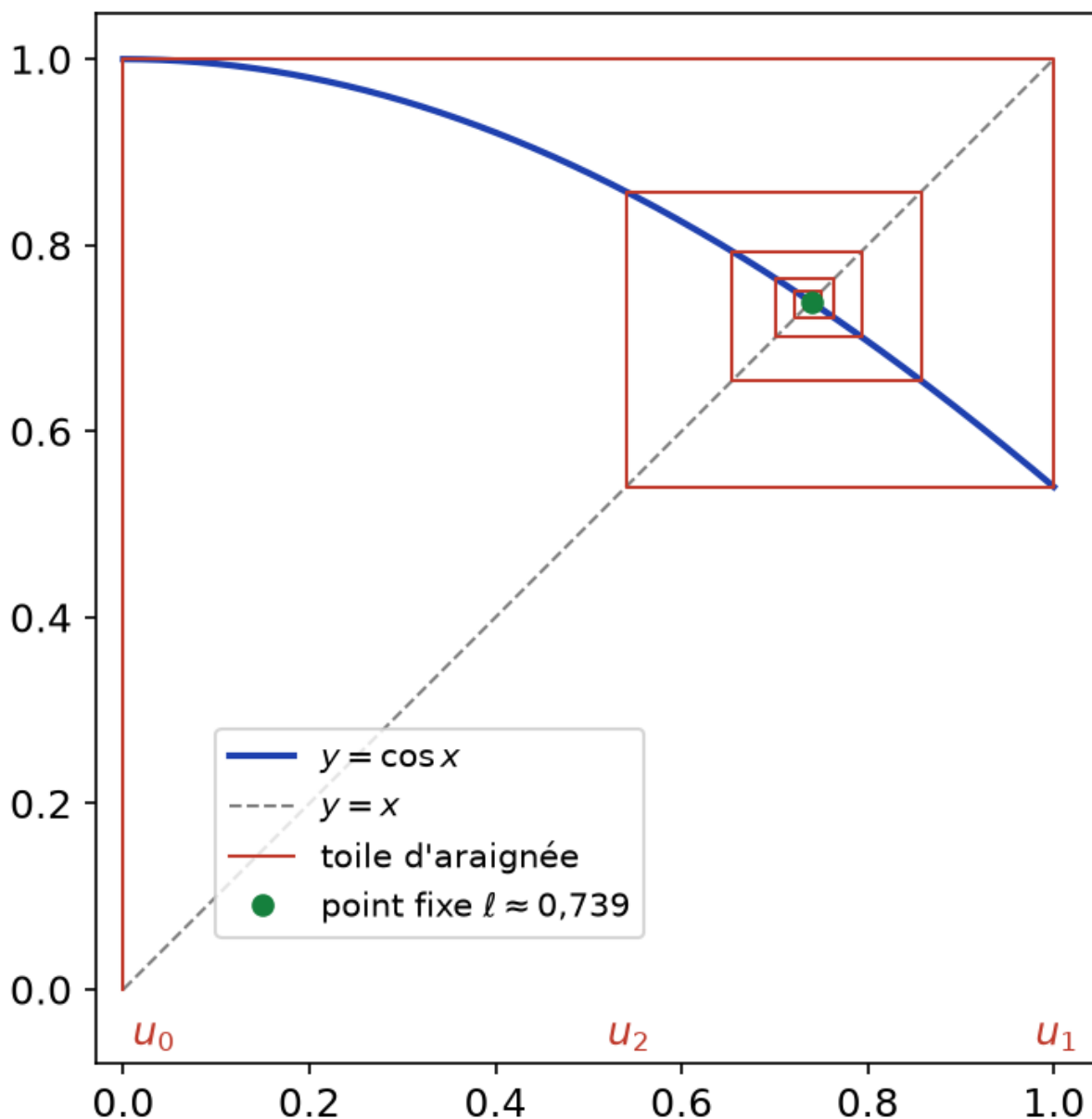
3. Sur $[0,1]$, on a $|\cos'(x)| = \sin x \leq \sin 1$, car $\sin$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Les réels u_n et ℓ sont dans $[0,1]$. Par l'inégalité des accroissements finis,

$$|u_{n+1} - \ell| = |\cos u_n - \cos \ell| \leq \sin(1) |u_n - \ell|.$$

Par une récurrence immédiate, $|u_n - \ell| \leq (\sin 1)^n |u_0 - \ell|$. Or $|u_0 - \ell| = \ell \leq 1$. **Donc** $|u_n - \ell| \leq (\sin 1)^n$. Enfin, $0 < \sin 1 < 1$, donc $(\sin 1)^n \rightarrow 0$. **La suite (u_n) converge vers ℓ .**

4. Il suffit que $(\sin 1)^N \leq 10^{-6}$. En passant au logarithme, cette condition équivaut à $N \ln(\sin 1) \leq -6 \ln 10$. Comme $\ln(\sin 1) < 0$, cela revient à $N \geq \frac{6 \ln 10}{-\ln(\sin 1)} \approx \frac{13,8156}{0,1726} \approx 80,04$. **L'entier $N = 81$ convient.**

La figure ci-dessous représente la toile d'araignée de la suite. Les termes tournent autour de $\ell \approx 0,739$ en alternant de part et d'autre, car $\cos$ est décroissante.



Point de méthode : la majoration $(\sin 1)^n$ est pessimiste. En pratique, près de ℓ , le facteur de contraction vaut $\sin \ell \approx 0,67$, et la convergence est un peu plus rapide.

Corrigé de l'exercice 10 : Théorème de la limite de la dérivée

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe C^1 . Ensuite, pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \sin x \cdot \frac{\sin x}{x}$, qui tend vers $0 \times 1 = 0$. Donc f est continue en 0. Pour $x \neq 0$, on calcule

$$f'(x) = \frac{2x \sin x \cos x - \sin^2 x}{x^2} = \frac{\sin(2x)}{x} - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

Or $\frac{\sin(2x)}{x} \rightarrow 2$ et $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$. Donc $f'(x) \rightarrow 2 - 1 = 1$. Par le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et f' y est continue. **Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 1$.**

2. Par croissances comparées, $x \ln|x| \rightarrow 0$ en 0 , donc g est continue en 0 . Ailleurs, elle est dérivable et $g'(x) = \ln|x| + 1$, qui tend vers $-\infty$ en 0 . D'après le théorème, le taux d'accroissement tend lui aussi vers $-\infty$. On le vérifie directement : $\frac{g(x)}{x} = \ln|x| \rightarrow -\infty$. **Donc g n'est pas dérivable en 0 ; sa courbe y admet une tangente verticale.**

3. Pour $x \neq 0$, on a

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, h est donc constante, égale à $h(1) = \frac{\pi}{2}$. De même, sur $] -\infty, 0[$, elle vaut $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$. **Ainsi, $h = \frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h = -\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.** La dérivée tend vers 0 en 0 . Pourtant, h a des limites différentes à gauche et à droite, donc aucun prolongement n'est continu en 0 . A fortiori, aucun n'est dérivable. **L'hypothèse manquante est la continuité en 0 .**

Point de méthode : avant d'invoquer le théorème de la limite de la dérivée, on vérifie toujours la continuité au point étudié.

Corrigé de l'exercice 11 : Une fonction plate indéfiniment dérivable

1. On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, $P_0 = 1$ convient. Supposons $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$ sur $]0, +\infty[$. Cette expression est dérivable. La dérivée de $x \rightarrow 1/x$ est $-1/x^2$, et celle de $e^{-1/x}$ est $\frac{1}{x^2}e^{-1/x}$. Donc

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2} \left(P_n\left(\frac{1}{x}\right) - P'_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-1/x}.$$

On obtient la forme voulue avec $P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P'_n(X))$.

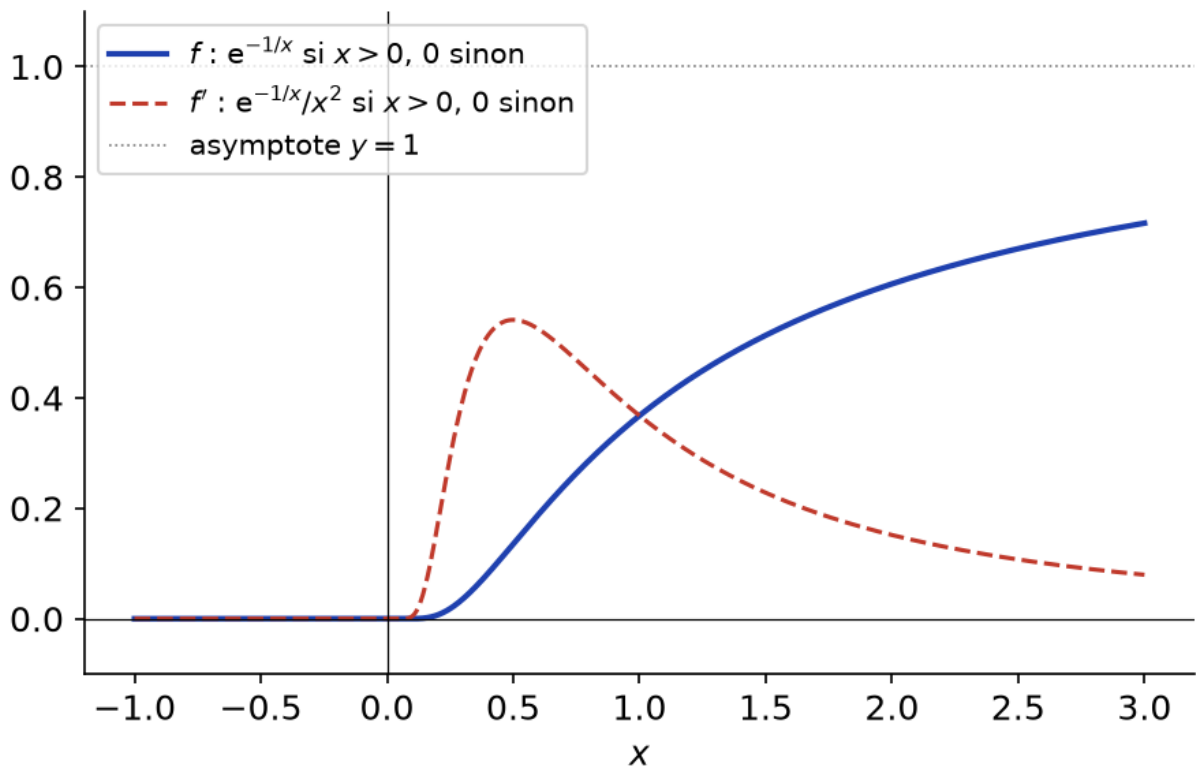
2. Posons $X = 1/x$, qui tend vers $+\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$. Il suffit de montrer que $Q(X)e^{-X} \rightarrow 0$ en $+\infty$. Or Q est une combinaison linéaire de monômes X^k , et $X^k e^{-X} \rightarrow 0$ par croissances comparées. **Donc** $Q(1/x)e^{-1/x} \rightarrow 0$ **quand** $x \rightarrow 0^+$.
3. Montrons par récurrence que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$. De plus, on a $f^{(n)}(x) = 0$ pour $x < 0$ et $f^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$ pour $x > 0$.

Pour $n = 0$: f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $f(x) \rightarrow 0$ à droite de 0 par la question 2, et $f = 0$ à gauche. Donc f est continue en 0 .

Hérédité : supposons le résultat vrai au rang n . La fonction $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sa dérivée vaut 0 à gauche et $P_{n+1}(1/x)e^{-1/x}$ à droite, qui tend vers 0 par la question 2. Donc $f^{(n+1)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, avec $x \neq 0$. Par le théorème de la limite de la dérivée, $f^{(n)}$ est dérivable en 0 , $f^{(n+1)}(0) = 0$, et $f^{(n+1)}$ est continue en 0 . Ailleurs, elle est continue comme produit et composée de fonctions continues. **Donc f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}(0) = 0$.**

4. La question 3 vaut pour tout n . **Donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n .** Cependant, pour tout $\eta > 0$, on a $f(\eta/2) = e^{-2/\eta} > 0$. Ainsi, f n'est nulle sur aucun voisinage de 0 . Autrement dit, la connaissance de toutes les dérivées en un point ne détermine pas une fonction de classe C^∞ .

La figure ci-dessous montre la fonction et sa dérivée : toutes deux se raccordent à 0 de façon extrêmement plate.



Corrigé de l'exercice 12 : Dérivées n-ièmes par la formule de Leibniz

1. Posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{3x}$. On a $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$, et $v^{(j)}(x) = 3^j e^{3x}$. Par la formule de Leibniz, il ne reste que trois termes :

$$f^{(n)}(x) = 3^n x^2 e^{3x} + n \cdot 2x \cdot 3^{n-1} e^{3x} + \binom{n}{2} \cdot 2 \cdot 3^{n-2} e^{3x}.$$

Donc $f^{(n)}(x) = 3^{n-2} e^{3x} (9x^2 + 6nx + n(n-1))$, formule valable aussi pour $n = 0$ et $n = 1$. Par exemple, pour $n = 1$, on retrouve $e^{3x}(3x^2 + 2x)$.

2. Posons $u(x) = x^2 + 1$. Seules ses trois premières dérivées sont non nulles : u , $2x$ et 2 . La formule de Leibniz donne, pour $n \geq 2$:

$$g^{(n)}(x) = (x^2 + 1) \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \cos\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) + n(n-1) \cos\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right).$$

Or $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$ et $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$. En posant $\theta = x + \frac{n\pi}{2}$, on obtient $g^{(n)}(x) = (x^2 + 1 - n(n-1))\cos\theta + 2nx\sin\theta$.

3. Posons $u(x) = x^3$ et $v = \ln$. Pour $k \geq 1$, on a $v^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$. De plus, $u^{(j)} = 0$ pour $j \geq 4$. Pour $n \geq 4$, les indices $n-j$ avec $j \leq 3$ sont tous supérieurs ou égaux à 1. La formule de Leibniz donne alors

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n-3}} \left(-(n-1)! + 3n(n-2)! - 3n(n-1)(n-3)! + n(n-1)(n-2)(n-4)! \right).$$

Mettons $(n-4)!$ en facteur. La parenthèse devient $(n-4)! S$, où

$$S = -(n-1)(n-2)(n-3) + 3n(n-2)(n-3) - 3n(n-1)(n-3) + n(n-1)(n-2).$$

En développant,

$$S = -(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) + (3n^3 - 15n^2 + 18n) - (3n^3 - 12n^2 + 9n) + (n^3 - 3n^2 + 2n) = 6. \text{ Donc}$$

$$h^{(n)}(x) = \frac{6(-1)^n(n-4)!}{x^{n-3}} \text{ pour } n \geq 4.$$

Vérification directe : $h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$, puis $h''(x) = 6x \ln x + 5x$, ensuite $h'''(x) = 6 \ln x + 11$ et enfin $h^{(4)}(x) = \frac{6}{x}$. La formule donne bien $\frac{6 \cdot 1 \cdot 0!}{x} = \frac{6}{x}$.

Corrigé de l'exercice 13 : Formule de Leibniz et dérivées de arctan en 0

- La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Cette dérivée est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc de classe C^∞ . **Par conséquent, f est de classe C^∞ et $(1+x^2)f'(x) = 1$.**
- Soit $n \geq 1$. On dérive n fois la relation. Le membre de droite donne 0. À gauche, on applique la formule de Leibniz au produit de $u(x) = 1+x^2$ par f' . Or $u' = 2x$, $u'' = 2$ et $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$. Donc

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + \binom{n}{1}2x f^{(n)}(x) + \binom{n}{2}2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Comme $2\binom{n}{2} = n(n-1)$, on obtient la relation demandée.

- En $x = 0$, la relation devient $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0)$ pour $n \geq 1$. De plus, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Indices pairs : $f^{(0)}(0) = 0$. Si $f^{(2p)}(0) = 0$, la relation avec $n = 2p+1$ donne

$f^{(2p+2)}(0) = 0$. Donc toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles en 0 .

Indices impairs : posons $a_p = f^{(2p+1)}(0)$. Avec $n = 2p$, on obtient

$a_p = -2p(2p-1) a_{p-1}$ et $a_0 = 1$. Par récurrence, si $a_{p-1} = (-1)^{p-1}(2p-2)!$, alors $a_p = (-1)^p 2p(2p-1)(2p-2)! = (-1)^p (2p)!$.

Donc $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p (2p)!$. Par exemple, $f'''(0) = -2$ et $f^{(5)}(0) = 24$.

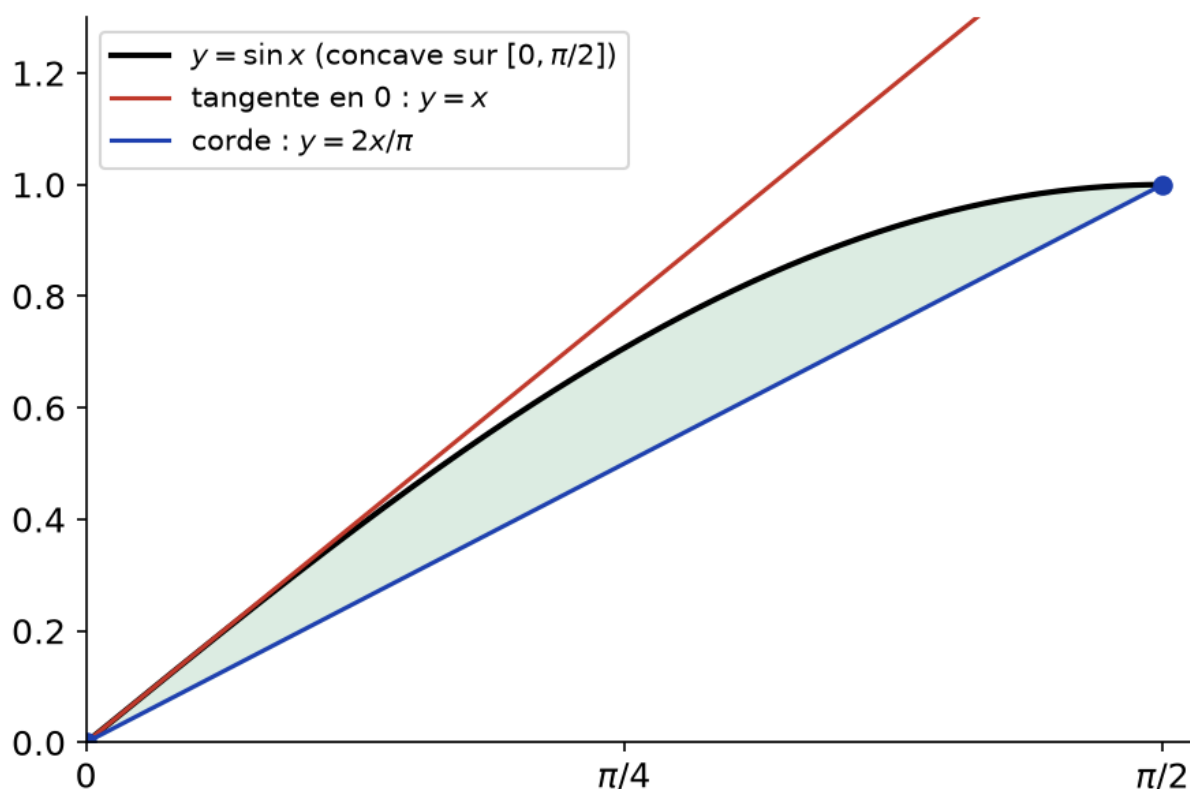
Corrigé de l'exercice 14 : Fonctions à valeurs complexes

- On a $\varphi(0) = 1 = e^{2i\pi} = \varphi(2\pi)$. De plus, $\varphi'(t) = ie^{it}$, de module 1 , donc jamais nul. Pourtant, φ est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$. **Le théorème de Rolle est donc faux pour les fonctions à valeurs complexes.**
- La fonction $\cos$ vérifie $\cos 0 = \cos 2\pi$. Sa dérivée $-\sin$ s'annule sur $]0, 2\pi[$ seulement en π . De même, $\sin 0 = \sin 2\pi$, et $\cos$ s'annule en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. Le théorème de Rolle s'applique donc à chaque partie. **Cependant, les points obtenus sont différents : aucun réel n'annule à la fois $\cos'$ et $\sin'$.** C'est pourquoi on ne peut pas obtenir un point où φ' s'annule.
- Posons $m = \frac{a+b}{2}$ et $d = \frac{b-a}{2}$. Alors $e^{ib} - e^{ia} = e^{im}(e^{id} - e^{-id}) = 2i \sin(d) e^{im}$. En prenant le module, $|e^{ib} - e^{ia}| = 2 \left| \sin \frac{b-a}{2} \right|$. Ensuite, $|\sin u| \leq |u|$ (exercice 7). Donc $|e^{ib} - e^{ia}| \leq |b - a|$. **La fonction $t \mapsto e^{it}$ est 1-lipschitzienne**, comme le prévoit l'inégalité des accroissements finis avec $|\varphi'| = 1$.
- Posons $\psi(x) = e^{(1+i)x}$. Alors $\psi(x) = e^x(\cos x + i \sin x)$, donc $g = \operatorname{Im} \psi$. Ensuite, $\psi^{(n)}(x) = (1+i)^n \psi(x)$. Or $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, d'où $\psi^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x e^{i(x + n\pi/4)}$. Enfin, la dérivée de la partie imaginaire est la partie imaginaire de la dérivée. **Donc** $g^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$.

Corrigé de l'exercice 15 : Inégalités classiques par convexité

1. La fonction $\exp$ est deux fois dérivable et $\exp'' = \exp > 0$. Elle est donc convexe sur $\mathbb{R}$, et sa courbe est au-dessus de ses tangentes. Sa tangente en 0 a pour équation $y = 1 + x$.
Donc $e^x \geq 1 + x$ **pour tout réel** x .
2. La fonction $u : x \rightarrow \ln(1+x)$ vérifie $u''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$ sur $] -1, +\infty[$. Elle est donc concave, et sa courbe est sous ses tangentes. Sa tangente en 0 est $y = x$. **Donc**
 $\ln(1+x) \leq x$ **pour tout** $x > -1$.
3. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin'' = -\sin \leq 0$, donc $\sin$ y est concave. D'une part, la courbe est sous sa tangente en 0, d'équation $y = x$. Donc $\sin x \leq x$. D'autre part, une fonction concave est au-dessus de ses cordes. La corde joignant $(0,0)$ à $(\frac{\pi}{2}, 1)$ a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$.
Ainsi, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$ **sur** $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. On écrit $2^x = e^{x \ln 2}$. Sa dérivée seconde vaut $(\ln 2)^2 2^x > 0$, donc $x \rightarrow 2^x$ est convexe. Sur $[0,1]$, la courbe est sous la corde qui joint $(0,1)$ à $(1,2)$, d'équation $y = 1 + x$. **Donc** $2^x \leq 1 + x$ **pour tout** $x \in [0,1]$.

La figure ci-dessous illustre l'encadrement de la question 3 : la courbe du sinus est coincée entre sa corde et sa tangente en 0.



Corrigé de l'exercice 16 : Inégalité de Jensen et moyennes

1. La fonction $\ln$ est concave sur $]0, +\infty[$, car $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. On applique l'inégalité de Jensen à la fonction convexe $-\ln$, avec les poids $\lambda_i = \frac{1}{n}$. On obtient $\frac{1}{n} \sum \ln x_i \leq \ln\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)$. Le membre de gauche vaut $\ln \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$. Comme $\exp$ est croissante, $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

2. On applique la question 1 aux réels $\frac{1}{x_i} > 0$. On obtient $\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}} \leq \frac{1}{n} \sum \frac{1}{x_i}$. Les deux membres sont positifs ; en passant aux inverses, $\frac{n}{\sum 1/x_i} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$.

3. En combinant les questions 1 et 2, on obtient $\frac{n}{\sum 1/x_i} \leq \frac{1}{n} \sum x_i$. Ensuite, on multiplie par $n \sum \frac{1}{x_i} > 0$. **Donc** $(\sum x_i)(\sum \frac{1}{x_i}) \geq n^2$.

4. D'abord, la question 1 avec $n = 3$ donne $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = 1$, donc $abc \leq 1$. Ensuite, la question 3 donne $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$. Or $a + b + c = 3$. **Donc** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$.

5. La fonction $x \rightarrow x^2$ est convexe, car sa dérivée seconde vaut $2 > 0$. L'inégalité de Jensen avec les poids $\frac{1}{n}$ donne directement $\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right)^2 \leq \frac{1}{n} \sum x_i^2$.

Point de méthode : on obtient ainsi la chaîne classique, moyenne harmonique $\leq$ géométrique $\leq$ arithmétique $\leq$ quadratique, avec égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Corrigé de l'exercice 17 : Inégalités de Young et de Hölder

1. Si $a = 0$ ou $b = 0$, le membre de gauche est nul et l'inégalité est claire. Supposons $a, b > 0$. La fonction $\ln$ est concave et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec des poids positifs. Par concavité,

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln a + \ln b = \ln(ab).$$

Comme $\exp$ est croissante, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2. Posons $A = \left(\sum x_i^p\right)^{1/p}$ et $B = \left(\sum y_i^q\right)^{1/q}$. Si $A = 0$, tous les x_i sont nuls et l'inégalité est une égalité $0 = 0$. De même si $B = 0$. Supposons donc $A, B > 0$. On applique l'inégalité de Young à $a = \frac{x_i}{A}$ et $b = \frac{y_i}{B}$:

$$\frac{x_i y_i}{AB} \leq \frac{x_i^p}{p A^p} + \frac{y_i^q}{q B^q}.$$

On somme sur i . Comme $\sum x_i^p = A^p$ et $\sum y_i^q = B^q$, le membre de droite vaut $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. **Donc $\sum x_i y_i \leq AB$, ce qui est l'inégalité de Hölder.**

3. Pour $p = q = 2$, on obtient $\sum x_i y_i \leq \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2}$. **C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz** pour des réels positifs. Elle s'étend aux réels quelconques en remplaçant x_i, y_i par $|x_i|, |y_i|$.

4. On applique Hölder avec $p = 3$ et $q = \frac{3}{2}$, qui vérifient $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. On prend $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ et $y_1 = y_2 = y_3 = 1$. On obtient $x + y + z \leq (x^3 + y^3 + z^3)^{1/3} \cdot 3^{2/3}$. **C'est l'inégalité demandée.**

Corrigé de l'exercice 18 : Dérivées à gauche et à droite d'une fonction convexe

1. Soit $a \in I$. Comme I est ouvert, il existe $\alpha, \beta \in I$ avec $\alpha < a < \beta$. Le taux τ_α est croissant sur $I \cap]\alpha, +\infty[$, et minoré par $\tau_\alpha(\alpha)$ grâce à la croissance. Par le théorème de la limite monotone, il admet une limite finie à droite en a , égale à $\inf_{x > a} \tau_\alpha(x)$. De même, sur $I \cap]-\infty, a[$, il est croissant et majoré par $\tau_\alpha(\beta)$. Il a donc une limite finie à gauche, égale à $\sup_{x < a} \tau_\alpha(x)$. Enfin, pour $x < a < y$, on a $\tau_\alpha(x) \leq \tau_\alpha(y)$. En passant au sup puis à l'inf, **f est dérivable à gauche et à droite en a , avec $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.**
2. Pour $x > a$, on a $f(x) - f(a) = (x - a)\tau_\alpha(x)$. Quand $x \rightarrow a^+$, le premier facteur tend vers 0 et le second vers $f'_d(a)$, qui est fini. Donc $f(x) \rightarrow f(a)$. Le même argument vaut à gauche. **Ainsi, f est continue en tout point de I .**
3. Soient $a < b$ dans I . D'une part, $f'_d(a) = \inf_{x > a} \tau_\alpha(x) \leq \tau_\alpha(b)$. D'autre part, $\tau_\alpha(b) = \tau_b(a)$ et $f'_g(b) = \sup_{x < b} \tau_b(x) \geq \tau_b(a)$. **Donc $f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b)$.** Avec la question 1, $f'_g(b) \leq f'_d(b)$. **Donc $f'_d(a) \leq f'_d(b)$: la fonction f'_d est croissante.**
4. La valeur absolue est convexe par l'inégalité triangulaire : $|(1-t)x + ty| \leq (1-t)|x| + t|y|$. **Elle vérifie $f'_g(0) = -1 < 1 = f'_d(0)$.**
5. Soient $x, y \in [0, 1]$ et $t \in [0, 1]$, avec $m = (1-t)x + ty$. Si $m < 1$, alors $u(m) = 0 \leq (1-t)u(x) + tu(y)$, car $u \geq 0$. Si $m = 1$, alors $x = y = 1$, ou bien $t = 0$ et $x = 1$, ou bien $t = 1$ et $y = 1$. Dans chaque cas, l'inégalité est une égalité. **Donc u est convexe, mais elle n'est pas continue en 1.** Cela ne contredit pas la question 2, car $[0, 1]$ n'est pas ouvert. **L'hypothèse essentielle est que l'intervalle est ouvert.**

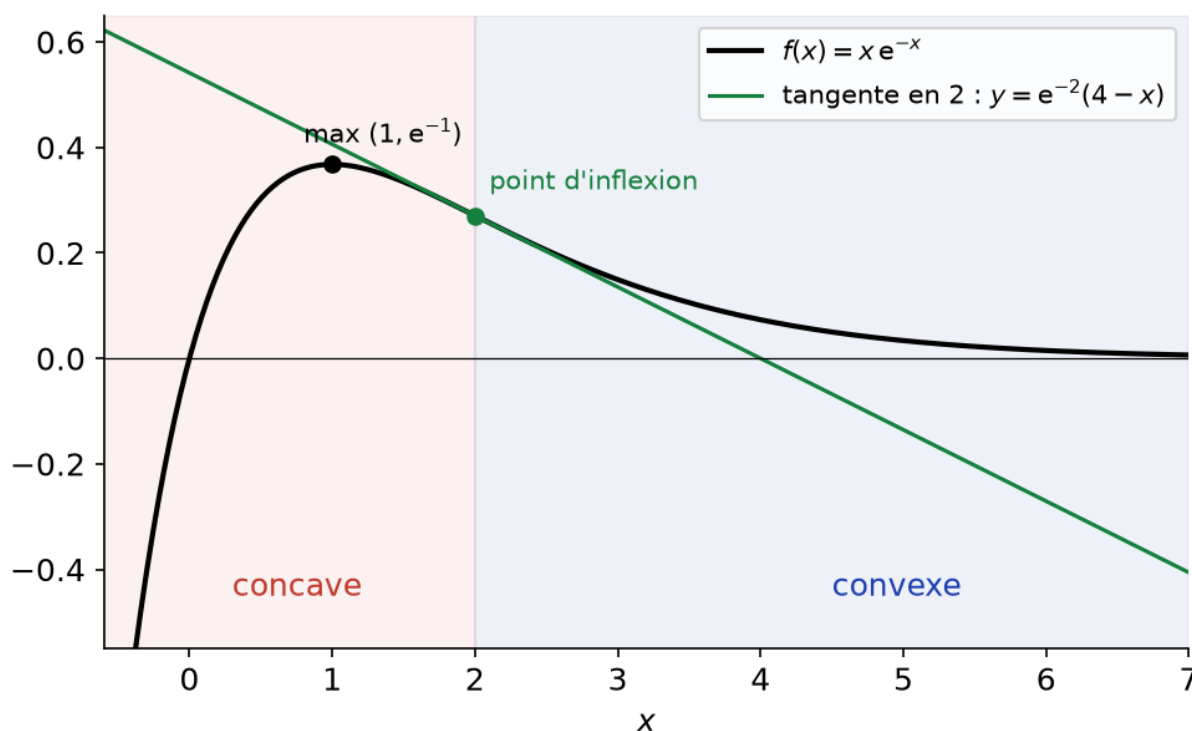
Corrigé de l'exercice 19 : Convexité et point d'inflexion

1. La fonction f est de classe C^∞ . On calcule $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ et $f''(x) = (x-2)e^{-x}$. Le signe de f' est celui de $1-x$. Donc f croît sur $]-\infty, 1]$ et décroît sur $[1, +\infty[$. De plus, $f(x) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$, et $f(x) \rightarrow 0$ en $+\infty$ par croissances comparées. **Le maximum de f vaut $f(1) = e^{-1}$, donc $f(x) \leq e^{-1}$ pour**

tout réel x .

2. Le signe de f'' est celui de $x - 2$. Donc f est concave sur $]-\infty, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 2. Le point $(2, 2e^{-2})$ est un point d'inflexion.
3. On a $f(2) = 2e^{-2}$ et $f'(2) = -e^{-2}$. La tangente T a pour équation $y = 2e^{-2} - e^{-2}(x - 2)$. Autrement dit, $T : y = e^{-2}(4 - x)$. Sur $]-\infty, 2]$, f est concave, donc sa courbe est sous sa tangente en 2. Sur $[2, +\infty[$, elle est convexe, donc sa courbe est au-dessus. La courbe traverse donc sa tangente au point d'inflexion.
4. C'est la position obtenue sur $[2, +\infty[$. Donc $x e^{-x} \geq e^{-2}(4 - x)$ pour tout $x \geq 2$.

La figure ci-dessous résume l'étude : zone concave, zone convexe, maximum en 1 et tangente traversante au point d'inflexion.



Corrigé de l'exercice 20 : Fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$

1. Posons $s = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Par hypothèse, $s > 0$. Soit $z > y$. D'après le lemme des trois pentes appliqué à $x < y < z$, on a $\frac{f(z) - f(y)}{z - y} \geq s$. Donc $f(z) \geq f(y) + s(z - y)$. Or $s > 0$, donc le membre de droite tend vers $+\infty$. **Par comparaison, $f(z) \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow +\infty$.**
2. Soit f convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1, il n'existe pas $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Donc f est décroissante. Ensuite, la fonction $z \rightarrow f(-z)$ est aussi convexe et majorée. Elle est donc décroissante, ce qui signifie que f est croissante. **Finalement, f est à la fois croissante et décroissante : elle est constante.**
3. Sur $]0, +\infty[$, la fonction $x \rightarrow e^{-x}$ est convexe, car sa dérivée seconde vaut $e^{-x} > 0$. Elle est majorée par 1. **Pourtant, elle n'est pas constante : le résultat devient faux.** La preuve échoue car on ne peut pas faire tendre la variable vers $-\infty$.
4. Supposons que f ne soit pas décroissante. Il existe alors $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$. Par la question 1, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit l'existence d'une limite finie. **Donc f est décroissante.**

Corrigé de l'exercice 21 : Problème : méthode de Newton et convexité

Partie A.

1. La fonction f est continue et strictement croissante, car $f' > 0$. De plus, $f(a) < 0 < f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur $]a, b[$. Par stricte monotonie, **ce zéro c est unique.**
2. Soit $x \in [c, b]$. Comme f est croissante, $f(x) \geq f(c) = 0$. De plus, $f'(x) > 0$. Donc $\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$ et $N(x) \leq x$. Ensuite, $f'' \geq 0$, donc f est convexe et sa courbe est au-dessus de sa tangente en x . En particulier, au point c : $0 = f(c) \geq f(x) + f'(x)(c - x)$. On divise par $f'(x) > 0$: $c - x \leq -\frac{f(x)}{f'(x)}$, c'est-à-dire $c \leq N(x)$. **Ainsi, $c \leq N(x) \leq x$.**
3. Montrons par récurrence que $u_n \in [c, b]$. C'est vrai pour $u_0 = b$. Si $u_n \in [c, b]$, la question

2 donne $c \leq u_{n+1} \leq u_n \leq b$. Donc la suite est bien définie, à valeurs dans $[c, b]$, et décroissante. Décroissante et minorée par c , elle converge vers un réel $L \in [c, b]$. Or N est continue sur $[a, b]$, car f et f' sont continues et f' ne s'annule pas. En passant à la limite dans $u_{n+1} = N(u_n)$, on obtient $L = N(L)$. Donc $\frac{f(L)}{f'(L)} = 0$, soit $f(L) = 0$. **Par unicité du zéro, $L = c$: la suite converge vers c .**

Partie B.

- La fonction $f(x) = x^2 - 2$ est de classe C^2 . De plus, $f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$, $f'(x) = 2x > 0$ sur $[1, 2]$ et $f'' = 2 \geq 0$. Les hypothèses sont vérifiées, avec $c = \sqrt{2}$. Ensuite, $N(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. **On obtient**
 $u_1 = \frac{1}{2}(2 + 1) = \frac{3}{2}$ **et** $u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}$.
- On calcule

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2} u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.$$

Donc $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$. Par la partie A, $u_n \geq \sqrt{2} \geq 1$, donc $2u_n \geq 2$. **Ainsi,**
 $0 \leq e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2}$.

- On a $e_0 = 2 - \sqrt{2} \leq 0,6$, car $\sqrt{2} \geq 1,4$. D'abord, $e_1 = \frac{e_0^2}{2u_0} = \frac{e_0^2}{4} \leq \frac{0,36}{4} = 0,09$.
 Ensuite, $e_2 = \frac{e_1^2}{2u_1} = \frac{e_1^2}{3} \leq \frac{0,0081}{3} = 0,0027$. **Donc** $e_2 \leq 3 \times 10^{-3}$. Puis, avec la majoration de la question 2 : $e_3 \leq \frac{(3 \times 10^{-3})^2}{2} = 4,5 \times 10^{-6}$. Enfin,
 $e_4 \leq \frac{(4,5 \times 10^{-6})^2}{2} \approx 1,01 \times 10^{-11}$. **Donc** $e_4 \leq 10^{-10}$: **quatre itérations suffisent.**

Point de méthode : la relation $e_{n+1} \leq C e_n^2$ traduit une convergence **quadratique**. Le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape, bien plus vite qu'avec une simple contraction.

[Revenir aux énoncés des exercices](#)

Pour aller plus loin en maths sup

- Le cours : [dérivabilité et convexité, cours de maths sup](#)
- Les énoncés : [exercices de maths sup sur dérivabilité et convexité](#)
- À maîtriser avant : [Limites et continuité des fonctions](#), [Suites particulières et suites récurrentes](#)
- Chapitre précédent : [Limites et continuité des fonctions](#)
- Chapitre suivant : [Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)