

Dénombrement

I. Ensembles finis et cardinal

Dénombrer, c'est compter les éléments d'un ensemble fini sans les énumérer un par un. Pour cela, on ramène l'ensemble étudié à un ensemble plus simple, dont on connaît déjà le nombre d'éléments. L'outil central est donc la bijection. Dans tout le chapitre, n et p désignent des entiers naturels, et l'on note $[[1, n]]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n .

1. Définition du cardinal

Définition :

Un ensemble E est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier $n \geq 1$ et une bijection de $[[1, n]]$ sur E . Cet entier n est alors unique : c'est le **cardinal** de E , noté $\text{card}(E)$, $|E|$ ou $\# E$. Par convention, $\text{card}(\emptyset) = 0$.

L'unicité de n repose sur un lemme admis ici : il n'existe pas de bijection de $[[1, n]]$ sur $[[1, m]]$ lorsque $n \neq m$. On en déduit une règle simple et très utile. En effet, deux ensembles finis en bijection ont le même cardinal. Autrement dit, pour compter les éléments de E , il suffit de construire une bijection entre E et un ensemble dont on connaît le cardinal.

Propriété :

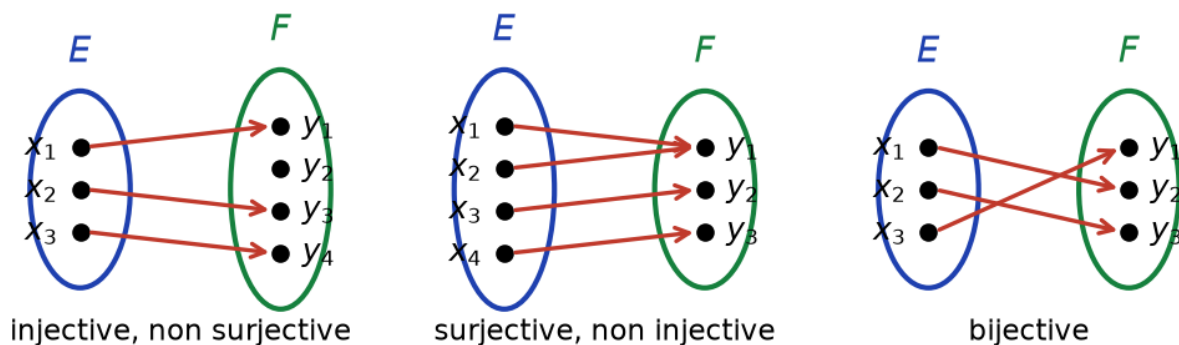
Soit E un ensemble fini et A une partie de E . Alors A est finie et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$. De plus, l'égalité $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ a lieu si et seulement si

$$A = E.$$

Cette propriété sert souvent pour prouver une égalité d'ensembles. Ainsi, si $A \subset E$ et si les deux ensembles ont le même cardinal, alors ils sont égaux. On évite de cette façon de démontrer l'inclusion réciproque.

2. Applications entre ensembles finis

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre ensembles finis. Si f est injective, elle réalise une bijection de E sur $f(E)$, qui est une partie de F . Par conséquent, $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$. De même, si f est surjective, on a $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$. La figure ci-dessous rappelle ces trois situations avec des diagrammes « patates et flèches ».



Théorème :

Soient E et F deux ensembles finis de **même cardinal** et $f : E \rightarrow F$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- f est surjective ;
- f est bijective.

Démonstration :

Notons $n = \text{card}(E) = \text{card}(F)$. Si f est injective, alors $f(E)$ est en bijection avec E , donc $\text{card}(f(E)) = n$. Or $f(E) \subset F$ et $\text{card}(F) = n$. D'après la propriété précédente, $f(E) = F$: f est surjective, donc bijective.

Réciproquement, supposons f surjective. Pour chaque $y \in F$, choisissons un antécédent $g(y)$. On obtient ainsi $g : F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$. Alors g est injective, donc bijective d'après le premier point. Finalement, $f = f \circ g \circ g^{-1} = g^{-1}$ est bijective.

Attention :

L'hypothèse de finitude est indispensable. Par exemple, l'application $n \rightarrow n + 1$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est injective, mais 0 n'a pas d'antécédent. De même, l'égalité des cardinaux est nécessaire : une injection de $[[1, 2]]$ dans $[[1, 3]]$ n'est jamais surjective.

Exemple :

Soit $n \geq 2$ et a un entier premier avec n . L'application qui envoie $x \in [[0, n-1]]$ sur le reste de ax modulo n est injective, d'après le lemme de Gauss. Comme elle va d'un ensemble à n éléments dans lui-même, elle est bijective. En particulier, 1 possède un antécédent : a est inversible modulo n .

II. Principe additif : réunion, complémentaire, différence

1. Réunion disjointe

Propriété :

Si A et B sont deux ensembles finis **disjoints**, alors
 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$. Plus généralement, si $A_1, \dots, A_p$ sont finis et deux à deux disjoints, alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(A_i).$$

C'est le **principe additif**. On l'applique dès que l'on répartit les objets à compter en plusieurs cas qui ne se recouvrent pas. Par exemple, on classe les mains de cartes selon leur nombre d'as, ou les parties d'un ensemble selon leur cardinal. En revanche, il faut vérifier soigneusement que les cas sont disjoints et qu'ils couvrent toutes les situations.

2. Complémentaire et différence

Propriété :

Soient E un ensemble fini et A, B deux parties de E .

- $\text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$;
- $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Démonstration :

D'abord, E est la réunion disjointe de A et de $E \setminus A$, d'où la première formule. Ensuite, B est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de $B \setminus A$, d'où la seconde.

Méthode :

Pour compter les objets qui vérifient « **au moins un** » critère, il est souvent plus simple de **passer au complémentaire**. On compte alors ceux qui ne vérifient **aucun** critère, puis on soustrait du total. Les mots « au moins », « pas tous » ou « au plus » signalent en général cette méthode.

Exemple :

Combien de codes à trois chiffres (de 000 à 999) contiennent au moins un 7 ? Il y a 1000 codes en tout. Or les codes sans 7 sont formés de trois chiffres pris parmi neuf : il y en a $9^3 = 729$. Par conséquent, $1000 - 729 = 271$ codes contiennent au moins un 7.

3. Réunion quelconque de deux ensembles

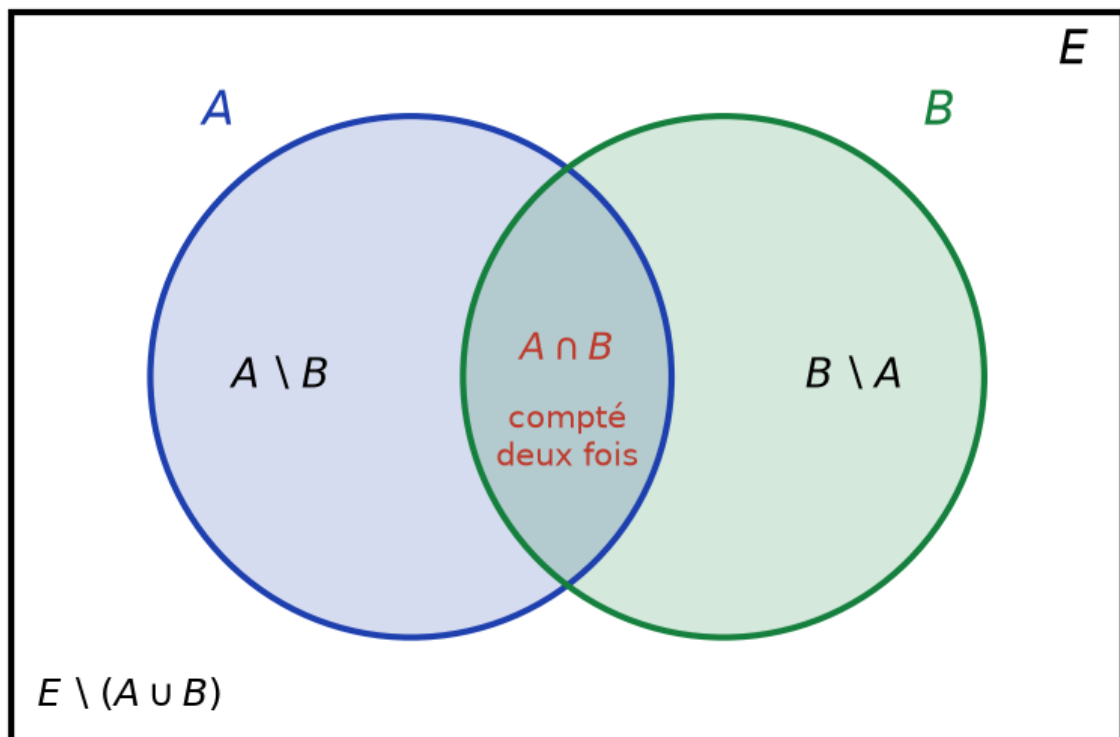
Propriété :

Pour deux ensembles finis A et B , on a

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

En effet, $A \cup B$ est la réunion disjointe de A et de $B \setminus A$. Il suffit donc d'appliquer la formule de la différence. Intuitivement, la somme $\text{card}(A) + \text{card}(B)$ compte deux fois les éléments de l'intersection, comme le montre le diagramme de Venn ci-dessous. On retire donc une fois

$\text{card}(A \cap B)$.



Remarque :

Il existe une généralisation à $\mathcal{P}$ ensembles, appelée formule du crible. Elle est **hors programme** en première année. Pour trois ensembles ou plus, on se ramène donc à des réunions disjointes ou à un passage au complémentaire.

III. Principe multiplicatif : produits, applications et parties

1. Produit cartésien

Propriété :

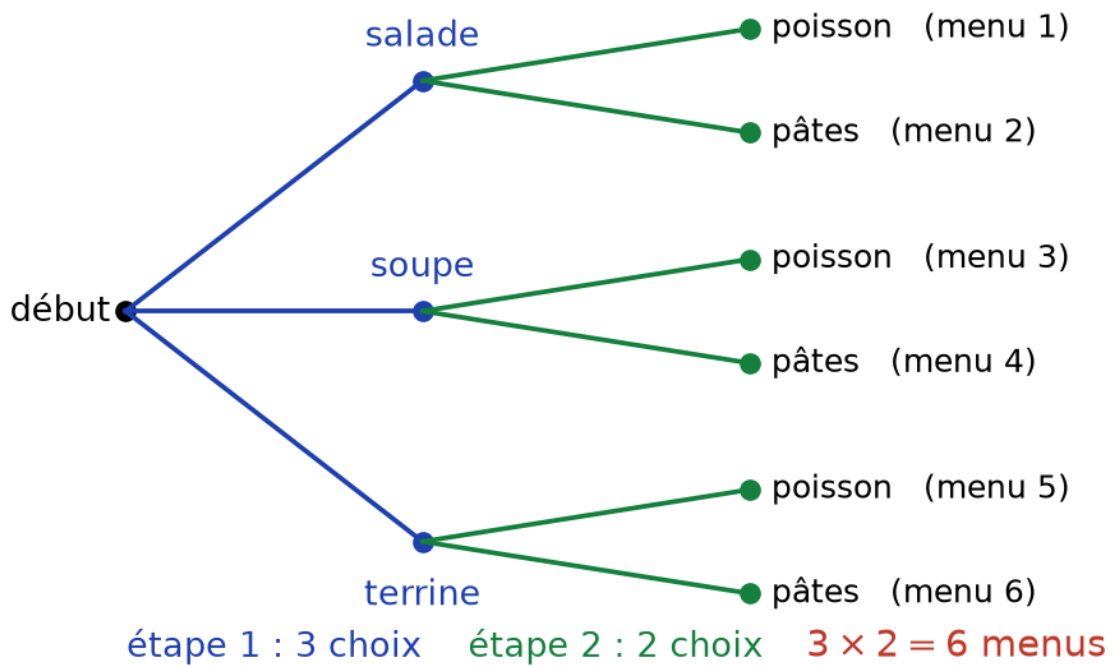
Si E et F sont finis, alors $E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.
Plus généralement,

$$\text{card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \prod_{i=1}^p \text{card}(E_i), \quad \text{card}(E^p) = \text{card}(E)^p.$$

Démonstration :

Notons $F = \{y_1, \dots, y_m\}$. Alors $E \times F$ est la réunion disjointe des ensembles $E \times \{y_j\}$, pour j allant de 1 à m . Or chacun est en bijection avec E . Le principe additif donne donc $\text{card}(E \times F) = m \text{card}(E)$. Le cas général s'obtient ensuite par récurrence sur p .

Cette formule justifie le **principe multiplicatif**. Supposons qu'un objet se construise en plusieurs étapes successives. Supposons aussi que le nombre de choix à chaque étape ne dépende pas des choix précédents. Alors le nombre d'objets est le produit des nombres de choix. L'arbre ci-dessous illustre ce principe pour un menu composé d'une entrée parmi trois et d'un plat parmi deux.



Attention :

Le principe multiplicatif exige que chaque objet soit obtenu par **une seule** suite de choix. Si deux suites de choix différentes produisent le même objet, on compte cet objet plusieurs fois. C'est l'erreur la plus fréquente en dénombrement : elle survient dès que l'on choisit des éléments « un par un » alors que l'ordre n'importe pas.

2. Ensemble des applications

Théorème :

Si $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$, l'ensemble F^E des applications de E dans F est fini et $\text{card}(F^E) = n^p$.

Démonstration :

Écrivons $E = \{x_1, \dots, x_p\}$. L'application $f \rightarrow (f(x_1), \dots, f(x_p))$ est une bijection de F^E sur F^p . En effet, une application est entièrement déterminée par ses valeurs, qui sont arbitraires. Donc $\text{card}(F^E) = \text{card}(F)^p = n^p$.

3. Ensemble des parties

Théorème :

Si $\text{card}(E) = n$, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration :

À toute partie A de E , associons sa fonction indicatrice $1_A : E \rightarrow \{0, 1\}$. Cette correspondance est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\{0, 1\}^E$. En effet, la réciproque associe à g la partie $g^{-1}(\{1\})$. Par le théorème précédent, $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Autrement dit, choisir une partie revient à décider, pour chaque élément de E , s'il est dedans ou dehors. On fait ainsi n choix binaires indépendants, d'où 2^n possibilités.

IV. Listes, arrangements et permutations

1. Les p-listes

Définition :

Soit E un ensemble fini à n éléments. Une **p -liste** d'éléments de E est un élément

$(x_1, \dots, x_p)$ de E^p . L'ordre compte et les répétitions sont permises. Il y a donc n^p p -listes.

Les p -listes modélisent les tirages **successifs avec remise**, les mots de longueur p sur un alphabet, ou encore les résultats de p lancers de dé. Par exemple, il existe $26^4 = 456\,976$ mots de quatre lettres, sans se soucier du sens.

2. Listes d'éléments distincts et injections

Théorème :

Si $0 \leq p \leq n$, le nombre de p -listes d'éléments **distincts** d'un ensemble à n éléments vaut

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Si $p > n$, il n'y en a aucune.

Démonstration :

On choisit x_1 parmi n éléments. Ensuite, x_2 se choisit parmi les $n - 1$ éléments restants, et ainsi de suite. Enfin, x_p se choisit parmi $n - p + 1$ éléments. Le nombre de choix à chaque étape ne dépend pas des choix précédents. Le principe multiplicatif donne donc le produit annoncé. Une récurrence sur p rend ce raisonnement rigoureux.

Les listes d'éléments distincts modélisent les tirages **successifs sans remise**, les classements ou l'attribution de postes différents à des personnes. De plus, se donner une injection de

$E = \{x_1, \dots, x_p\}$ dans F revient à se donner la liste $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'éléments distincts de F .

Corollaire :

Si $\text{card}(E) = p$ et $\text{card}(F) = n$, le **nombre d'injections** de E dans F vaut $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$, et 0 sinon.

Remarque :

Le cas $p > n$ est le **principe des tiroirs**. Si l'on range p objets dans n tiroirs avec $p > n$, un tiroir contient au moins deux objets. En effet, aucune application de l'ensemble des objets vers celui des tiroirs n'est injective.

3. Permutations

Définition :

Une **permutation** d'un ensemble fini E est une bijection de E sur lui-même. Si $\text{card}(E) = n$, il y a exactement $n!$ permutations de E .

En effet, d'après le théorème de la partie I, une application de E dans E est bijective si et seulement si elle est injective. On applique donc le corollaire avec $p = n$. Concrètement, $n!$ est le nombre de façons d'ordonner n objets distincts. Par exemple, dix coureurs peuvent franchir la ligne d'arrivée de $10! = 3\,628\,800$ façons.

Exemple :

Combien d'anagrammes a le mot **RADAR** ? Si les cinq lettres étaient distinctes, on en trouverait $5! = 120$. Or échanger les deux R, ou les deux A, ne change pas le mot. Chaque anagramme est donc comptée $2! \times 2! = 4$ fois. Finalement, il y a $120 / 4 = 30$ anagrammes.

V. Combinaisons : parties à p éléments

1. Définition et formule

Définition :

Soit E un ensemble à n éléments. Une **combinaison** de p éléments de E est une partie de E à p éléments. Leur nombre est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ». Il ne dépend que de n et p .

Théorème :

Pour $0 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}.$$

Pour $p > n$, on pose $\binom{n}{p} = 0$, ce qui est cohérent avec la définition.

Démonstration :

Comptons de deux façons les p -listes d'éléments distincts de E . D'une part, il y en a $\frac{n!}{(n-p)!}$. D'autre part, on obtient chacune d'elles en choisissant d'abord la partie $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, puis un ordre sur ses éléments. Il y a $\binom{n}{p}$ choix de la partie, puis $p!$ ordres. Ainsi,

$$\binom{n}{p} p! = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Propriété :

Pour $0 \leq p \leq n$, on a la **symétrie** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. De plus, $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.

Ces deux formules ont une preuve combinatoire immédiate. D'abord, l'application $A \rightarrow E \setminus A$ est une bijection entre parties à p éléments et parties à $n - p$ éléments. Ensuite, on classe les parties de E selon leur cardinal. Le principe additif donne alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_p \binom{n}{p}$.

2. Choisir le bon modèle

Méthode :

Pour **modéliser** une situation, posez-vous deux questions.

- L'ordre compte-t-il ? Si oui, on travaille avec des listes ; sinon, avec des parties.
- Les répétitions sont-elles possibles ? Si oui, on prend des p -listes quelconques (n^p) ; sinon, des listes d'éléments distincts ($\frac{n!}{(n-p)!}$) ou des combinaisons ($\binom{n}{p}$).

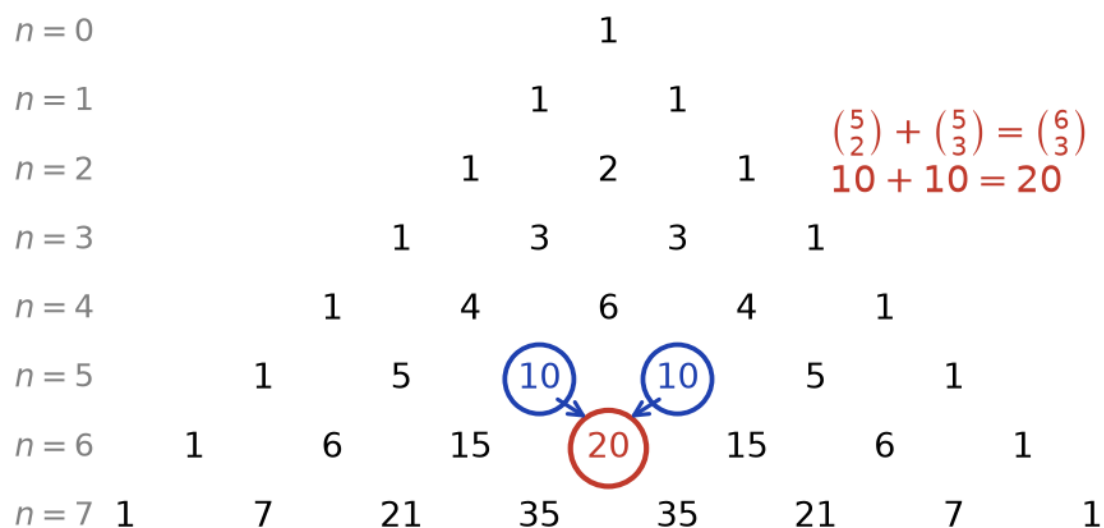
Ensuite, découpez la construction en étapes : on multiplie les choix successifs et on additionne les cas disjoints.

Exemple :

Une urne contient 6 boules blanches et 4 noires. On tire simultanément 3 boules. Un tirage est

une partie à 3 éléments parmi 10 : il y en a $\binom{10}{3} = 120$. Pour obtenir exactement 2 blanches, on choisit 2 blanches parmi 6, puis 1 noire parmi 4. Il y a donc $\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 15 \times 4 = 60$ tels tirages.

Les coefficients binomiaux se rangent dans le **triangle de Pascal**. Chaque ligne correspond à une valeur de n . Comme le montre la figure ci-dessous, chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui.



VI. Démonstrations combinatoires des identités

Un calcul algébrique prouve la plupart des identités sur les coefficients binomiaux. Cependant, une preuve combinatoire est souvent plus courte et plus éclairante. Elle repose sur le **double dénombrement** : on compte un même ensemble de deux façons différentes, puis on égale les deux résultats.

Méthode :

Pour démontrer une identité par **double dénombrement** :

- interprétez chaque membre comme le cardinal d'un ensemble concret (comités, chemins, mots, parties) ;
- choisissez un ensemble unique que les deux membres comptent ;
- pour le membre qui est une somme, trouvez le critère qui découpe l'ensemble en cas disjoints ;
- concluez par l'égalité des deux décomptes.

1. Formule de Pascal

Théorème :

Pour $n \geq 1$ et $1 \leq p \leq n$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Démonstration :

Soit E un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E . Les parties de E à p éléments se répartissent en deux classes disjointes. D'abord, celles qui contiennent a : il reste à choisir $p - 1$ éléments parmi les $n - 1$ autres, d'où $\binom{n-1}{p-1}$ parties. Ensuite, celles qui ne contiennent pas a : on choisit alors p éléments parmi $n - 1$, d'où $\binom{n-1}{p}$ parties. Le principe additif conclut.

2. Formule du binôme de Newton

Théorème :

Pour a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

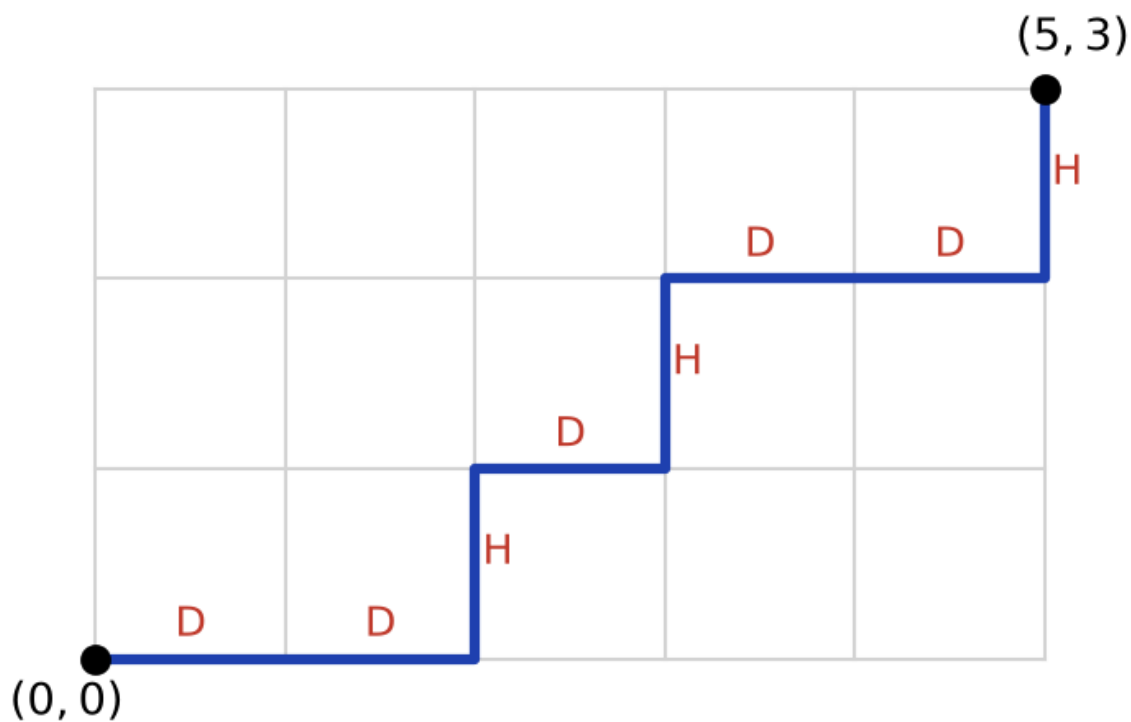
Démonstration :

Écrivons $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b)$ avec n facteurs numérotés. En développant, on obtient une somme de 2^n produits. Chacun résulte du choix, dans chaque facteur, soit de a , soit de b . Un tel choix est déterminé par l'ensemble K des numéros des facteurs où l'on prend a . Le produit correspondant vaut $a^k b^{n-k}$, avec $k = \text{card}(K)$. Or il y a $\binom{n}{k}$ parties K à k éléments. Par conséquent, le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît exactement $\binom{n}{k}$ fois.

Exemple :

Démontrons que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$. Comptons les comités de k personnes, parmi n , munis d'un président choisi dans le comité. D'une part, on choisit le comité ($\binom{n}{k}$ façons), puis son président (k façons). D'autre part, on choisit d'abord le président (n façons), puis les $k-1$ autres membres parmi les $n-1$ personnes restantes. Les deux décomptes donnent l'identité.

Le double dénombrement s'applique aussi aux **chemins**. Considérons les chemins formés de pas vers la droite et vers le haut dans un quadrillage. Un chemin de $(0, 0)$ à (p, q) compte $p + q$ pas, dont p vers la droite. Il est donc déterminé par la position de ces p pas. Ainsi, il existe $\binom{p+q}{p}$ tels chemins. La figure ci-dessous montre un de ces chemins.



mot DDHDHDDH : 5 pas D et 3 pas H parmi 8

Classer ces chemins selon leur dernier pas redonne d'ailleurs la formule de Pascal. En effet, le dernier pas vient soit de $(p-1, q)$, soit de $(p, q-1)$.

Ce qu'il faut retenir

- Deux ensembles finis en bijection ont le même cardinal : compter, c'est construire une bijection.
- Entre deux ensembles finis de même cardinal, une application est injective si et seulement si elle est surjective, si et seulement si elle est bijective.
- Principe additif : on additionne les cardinaux de cas disjoints ; et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- Passer au complémentaire simplifie les dénombrements du type « au moins un ».
- Principe multiplicatif : $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E)\text{card}(F)$, à condition que chaque objet corresponde à une seule suite de choix.

- Il y a n^p applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments, et 2^n parties d'un ensemble à n éléments.
- Il y a n^p p -listes, $\frac{n!}{(n-p)!}$ p -listes d'éléments distincts (autant que d'injections) et $n!$ permutations.
- Il y a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ parties à p éléments : l'ordre ne compte pas.
- La formule de Pascal et le binôme de Newton se démontrent par double dénombrement, comme de nombreuses identités binomiales.

Questions fréquentes sur dénombrement

Comment savoir s'il faut utiliser des listes ou des combinaisons ?

Demandez-vous si l'ordre compte. S'il compte, comme pour un code ou un classement, on utilise des listes : n^p avec répétitions, $\frac{n!}{(n-p)!}$ sans répétition. S'il ne compte pas, comme pour une main de cartes, on compte des parties à p éléments, au nombre de $\binom{n}{p}$.

Pourquoi passer au complémentaire ?

Les dénombrements du type « au moins un » obligent sinon à distinguer de nombreux cas qui se chevauchent. Le complémentaire « aucun » se compte en général directement. On soustrait ensuite ce nombre du total, grâce à la formule $\text{card}(E \setminus A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

La formule du crible est-elle au programme de MPSI ?

Non, elle est hors programme en première année. Seule la formule pour deux ensembles, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$, est exigible. Pour plus d'ensembles, on se ramène à des réunions disjointes ou au complémentaire.

Qu'est-ce qu'une démonstration par double dénombrement ?

On compte un même ensemble fini de deux façons différentes, puis on égale les deux résultats. Par exemple, compter les comités munis d'un président donne $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Cette méthode évite souvent de longs calculs de factorielles.

Pour aller plus loin en maths sup

- Les énoncés : [exercices de maths sup sur dénombrement](#)
- À maîtriser avant : [Logique, ensembles, applications et relations](#), [Calculs algébriques : sommes, produits, inégalités](#)
- Chapitre précédent : [Familles sommables](#)
- Chapitre suivant : [Probabilités sur un univers fini et variables aléatoires](#)
- Tester vos connaissances : [QCM de maths sup par chapitre](#)
- Le sommaire : [tous les chapitres de maths sup](#) et les [chapitres de maths spé](#)