cours de mathématiques en seconde

.

Vecteurs, translations et coordonnées dans le plan.

0. Point de vue historique :

Le mot « vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)
La notion de vecteur est le fruit d‘une longue histoire, commencée voici plus de deux mille ans.

I. Les vecteurs :
1.Définition et vocabulaire :
Définitions :

Un vecteur $\vec{u}$ est un objet mathématique défini par :
- une direction;
- un sens;
- une longueur.

On le représente par une flèche .
Si on représente cette flèche à partir d‘un point A (appelée origine) et qu‘on note B son extrémité,

alors :

- La direction du vecteur $\vec{u}$ est celle de la droite (AB),
- Le sens du vecteur $\vec{u}$ est le sens de l‘origine A vers l‘extrémité B,
- La longueur (appelée norme) du vecteur $\vec{u}$ est la longueur AB du segment [AB].

On a :

$$\|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$$

Vocabulaire :

- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l‘opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

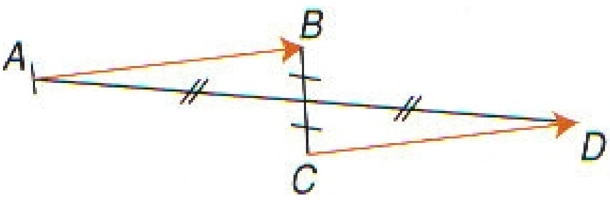
On a $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$

- $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ est appelé le vecteur nul et est noté $\vec{0}$.

2. Egalité de deux vecteurs :
Propriétés :

- a. Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même direction, le même sens et la même longueur (norme).
- b. La translation qui transforme A en B transforme aussi C en D;
- c. Le quadrilatère ABDC, est un parallélogramme.(éventuellement aplati) ;

Réciproquement,
si ABDC est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

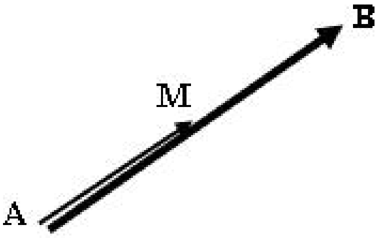


3. Milieu d'un segment : Propriété :

Soint A et B deux points distincts du plan .

- Si M est le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

- Réciproquement, si
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ alors M est le milieu de [AB].

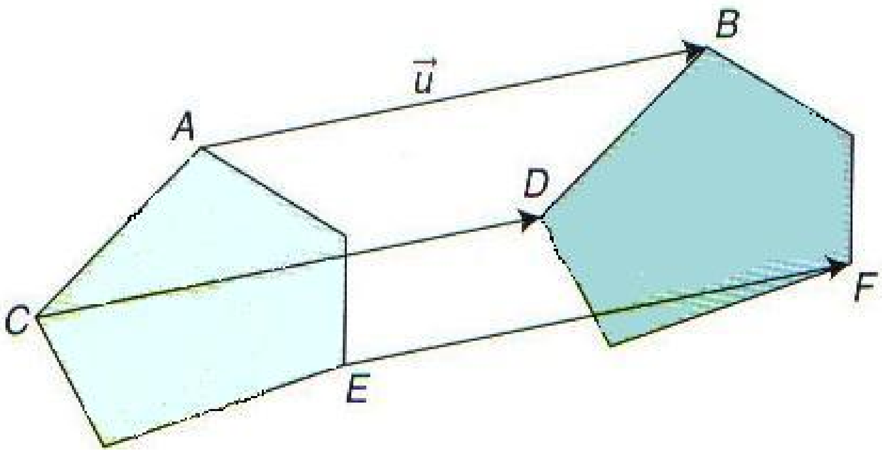


HAUT

II. La translation :

1. Vocabulaire :
- Lorsque deux droites sont parallèles, on dit qu'elles ont la même direction

- Il y a deux sens de parcours sur une droite : de A vers B ou bien de B vers A



Le déplacement de la figure a été effectué :
- dans la direction de la droite (AB)
- dans le sens A vers B, que l‘on indique par la flèche
- d‘une longueur égale à AB.

On dit que le dessin en position B est l‘image du dessin en position A par la translation qui transforme A en B
ou, autrement dit,
par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Propriétés des translations :

Construire l‘image d‘une figure par une translation revient à faire glisser cette figure dans une direction, un sens et avec une longueur donnée.
Un tel glissement n‘entraîne pas de déformation ni de changement de disposition .

Propriétés :

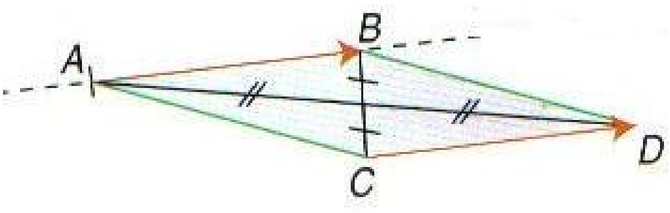
Dans une translation ;
- les longueurs;
- le parallélisme;
- la perpendicularité;
- les angles

sont conservés.

- Une translation transforme une droite en une droite parallèle.
- Par une translation, une figure géométrique est transformée en une figure géométrique semblable.
- Pour construire l‘image d‘une figure géométrique, on ne construit donc que l‘image de ses points caractéristiques :
- pour un segment, ses extrémités;
- pour un triangle, ses trois sommets;
- pour un cercle, son centre et son rayon.

2. Egalité de deux vecteurs : Propriétés : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si :

- a. La translation qui transforme A en B transforme aussi C en D;
- b. Le quadrilatère ABDC, est un parallélogramme.(éventuellement aplati) ;



HAUT

III. Composée de deux translations et somme de deux vecteurs : Propriétés :

Soient A, B et C trois points du plan, la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

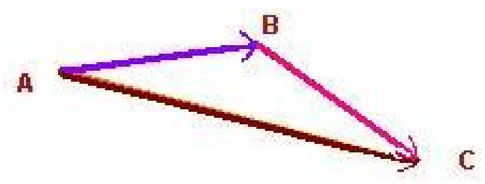
On dit que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

On note : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

(cette relation est appelée « relation de Chasles »)

Construction de la somme de deux vecteurs :

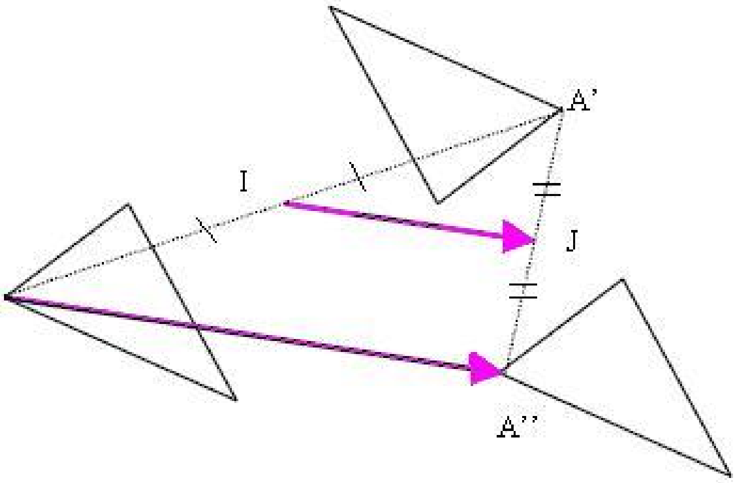
On utilise la méthode du << bout à bout>>,
C'est à dire qu'on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et a son extrémité on ajoute le vecteur $\overrightarrow{BC}$ et on obtient le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ qui est égal au vecteur $\overrightarrow{AC}$ (d'après la relation de Chasles).
L'extrémité de l'un est aussi l'origine de l'autre .



IV. Composée de deux symétrie centrales : Propriété :

Soient I et J deux points du plan,
la composée de la symétrie de centre I suivie de la symétrie de centre J est la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}$,

que l'on note $2\overrightarrow{IJ}$.



Preuve :

I milieu de [AA'] et J milieu de [A'A'']
On en déduit que $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{IJ}$ d'après le théorème des milieux (étudié en quatrième).

cqfd

HAUT

V. Coordonnées dans un repère :

1. Repères :

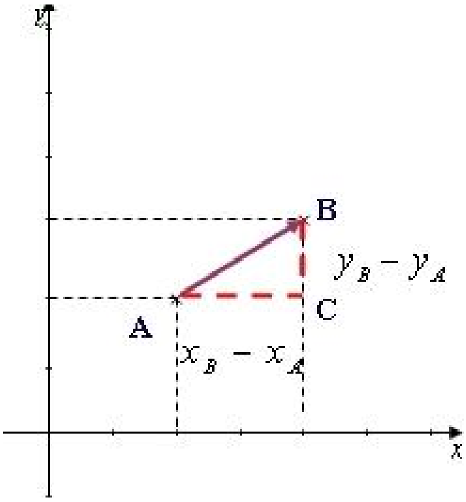
Trois points non alignés O,I,J ,tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, définissent un repère du plan. On note souvent $R(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ou $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

Repère quelconque	Repère orthogonal	Repère orthonormé
O,I,J non alignés	$\vec{i} \perp \vec{j}$	$\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

2. Coordonnées d'un vecteur.

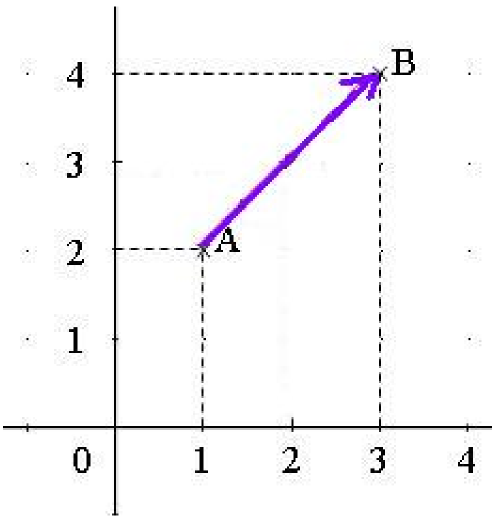
Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,
si deux points A et B ont pour coordonnées respectives (xA ; yA) et (xB ; yB), alors le vecteur AB a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).



Exemple :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan, soient A(1 ; 2) et B(3 ; 4)



$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

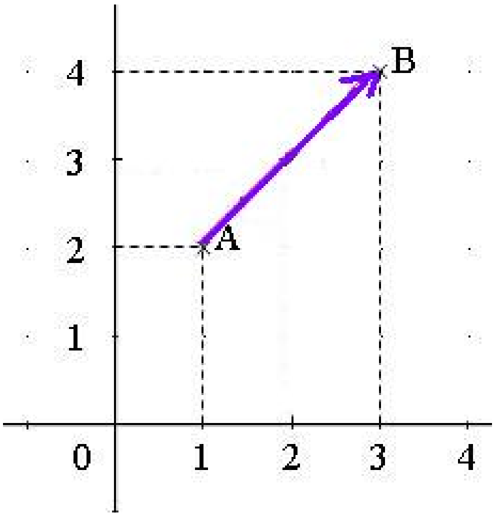
3. Coordonnées du milieu d‘un segment :
Propriété :

Dans le plan muni d‘un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,
si deux points A et B ont pour coordonnées respectives (xA ; yA) et (xB ; yB),
alors
le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Exemple :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,
on donne A(1 ; 2) et B(3 ; 4) :



conclusion :
Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont (2 ; 3)

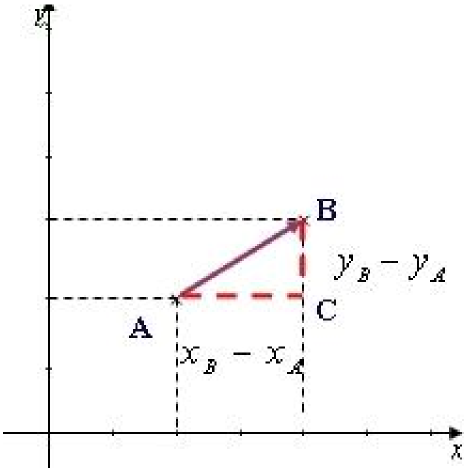
Propriété :

Dans le plan muni d‘un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$,
si deux points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A ; x_B) et (y_A ; y_B),
alors la distance entre les deux points A et B se calcule en utilisant la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Attention : aucune simplification
n‘est possible dans cette formule entre la racine et les carrés .

Preuve :



Considérons le triangle ABC de la figure rectangle en C,
d'après le théorème de Pythagore (étudié en quatrième)
$AB^2=AC^2+BC^2$

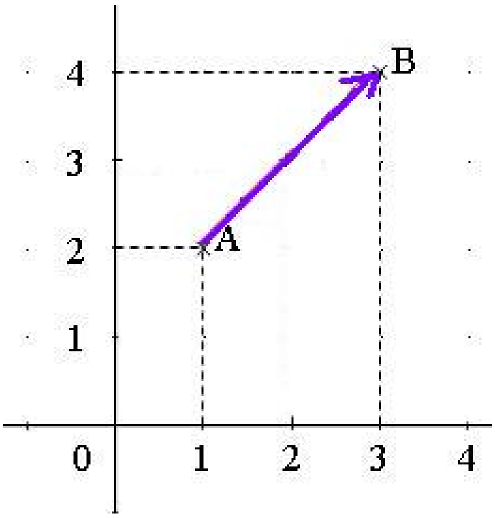
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

d' où

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ du plan ,
Reprenons l'exemple précédent avec A(1 ; 2) et B(3 ; 4) :



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

conclusion :

La distance AB vaut $\sqrt{8}$.