cours de mathématiques en quatrième

.

Le théorème de Pythagore

0-Introduction : un peu d'histoire….

Pythagore de Samos, né vers -580 et mort vers -490, était un mathématicien, philosophe et astronome de la Grèce antique.

1- La racine carrée d'un nombre :

Définition :

Soit a un nombre positif.
On appelle Racine Carrée de a notée $\sqrt{a}$ l'unique nombre positif dont le carré est égal à a.

C'est à dire : $(\sqrt{a})^2 = a$

Exemple :

$(\sqrt{16}) = (\sqrt{4})^2 = 4$

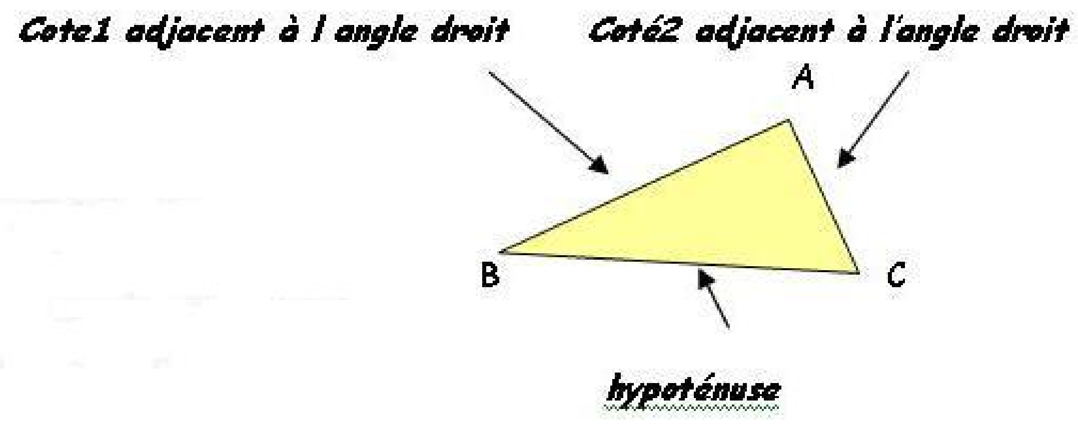
$\sqrt{-9}$ n'a pas de sens car – 9 est un nombre négatif .

application :

A l'aide de la calculatrice calculer $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{81}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{0{,}36}$, $\sqrt{104} \approx$, $\sqrt{7} \approx$

2- Le théorème de Pythagore:

2.1. Partie directe :



Théorème de la partie directe :

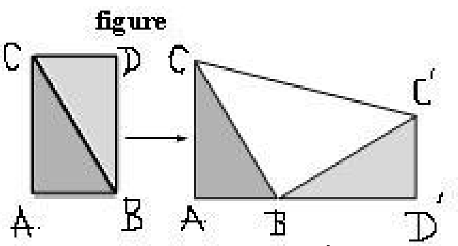
Si un triangle ABC est rectangle en A

ALORS BC²=AB²+AC².

(hypoténuse)²=(coté1)²+(coté2)²

Preuve avec un trapèze ::

Une des démonstrations de la partie directe du théorème de Pythagore.
Soit un triangle ABC rectangle en A,
montrons que BC² =AB² + AC².
Dans la figure ci-dessous, ABDC est rectangle de sens direct.



On pose BC = a, AC = b et AB = c.

On considère le quart de tour de centre B (rotation de 90°)
qui transforme le triangle BCD en le triangle BC'D'.
Évidemment le triangle CBC' est rectangle en B 'car rotation de 90°).
Les points A, B et D'sont alignés
et le quadrilatère AD'C'C est un trapèze.
En traduisant de deux manière l'aire de ce trapèze :

aire (AD'C'C) =aire (ABC) + aire (CBC') + aire (BC'D')

$$\frac{(b+c)^2}{2}=\frac{bc}{2}+\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{2}$$

En multipliant par deux chaque membre de l'équation, nous obtenons :

$(b+c)^2=a^2+2bc$
$(b+c)(b+c)=a^2+2bc$ (voir chapître caclcul littéral...)
$b^2+bc+bc+c^2=a^2+2bc$
$b^2+2bc+c^2=a^2+2bc$

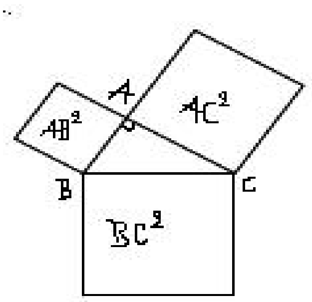
En simplifiant par 2bc dans les deux membres,
Nous obtenons au final :
$a^2 = b^2 + c^2$
soit $BC^2 = AC^2 + AB^2$ cqfd

Remarque :

la partie directe du théorème de Pythagore, nous permet de déterminer une longueur du triangle connaissant les deux autres.

Signification géométrique :

$BC^2=AB^2+AC^2$
L’aire du carré de coté [BC] est égale à la somme des aires des carrés de coté [AB] et [AC]



2.2.- La réciproque du théorème de Pythagore.

B

Théorème de la partie réciproque :

Soit un triangle ABC.

Si $BC^2=AB^2+AC^2$ ALORS le triangle ABC est rectangle en A.

Théorème de la partie contraposée :

Soit un triangle ABC tel que BC est la plus grande longueur Si $BC^2=AB^2+AC^2$ ALORS le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque :

la réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore, nous permettent de déterminer si un triangle est rectangle connaissant les trois mesures de ses cotés.