cours de mathématiques en seconde

.

Généralités sur les fonctions et fonctions usuelles.

1) Domaine de définition

- Le domaine de définition d'une fonction f est l'ensemble des x pour lesquels f(x) existe.

- **A retenir**
  - Si f(x) contient une racine carré, l'expression sous la racine carrée doit être positive (ou nulle).
  - Si f(x) est un quotient dans lequel le dénominateur dépend de x, celui-ci doit être différent de 0.
  - Dans tous les autres cas rencontrés en première (fonctions polynômes, cosinus, sinus...), $D_f = \mathbb{R}$.

exemple
Déterminer le domaine de définition de f définie par : $f(x) = \sqrt{3 - 5x} + 1$.

2) Parité d'une fonction

définitions
Soit f une fonction définie sur un ensemble E.

- f est **paire** lorsque $\begin{cases} \text{E est symétrique par rapport à zéro} \\ \text{pour tout } x \in E,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$
- f est **impaire** lorsque $\begin{cases} \text{E est symétrique par rapport à zéro} \\ \text{pour tout } x \in E,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

conséquence graphique
Dans un repère orthogonal :

- la représentation graphique d'une fonction paire est une courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
- la représentation graphique d'une fonction impaire est une courbe symétrique par rapport à l'origine du repère.

exemple
Etudier la parité des fonctions suivantes :

- f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x}$
- g définie par $g(x) = -3x^3 + x$
- h définie par $h(x) = \sqrt{x + 3}$

3) Symétrie

On a vu en TD que l'on peut utiliser des changements de repère pour prouver qu'une courbe $\mathcal{C}$ admet un axe ou un centre de symétrie.
Voici une autre méthode :

> La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$
> si et seulement si
> $$\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ f(a+h) = f(a-h) \end{cases}$$

exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$.

Démontrer que la droite d'équation $x = \dfrac{5}{6}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

> Le point $A(a\,;\,b)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$
> si et seulement si
> $$\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ \dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b \end{cases}$$

exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Démontrer que le point $A(-1\,;\,2)$ est centre de symétrie pour $\mathcal{C}_g$.

4) Sens de variation d'une fonction

définition

f étant une fonction définie sur un intervalle I,
x_1 et x_2 étant deux nombres appartenant à l'intervalle I tels que $x_1 < x_2$.

- f est **croissante sur I** si, et seulement si, $f(x_1) < f(x_2)$ *(on dit encore que f conserve l'ordre)*.
- f est **décroissante sur I** si, et seulement si, $f(x_1) > f(x_2)$ *(on dit que f renverse l'ordre)*.

Les fonctions affines $x \xrightarrow{f} ax+b$

$\boxed{a > 0}$

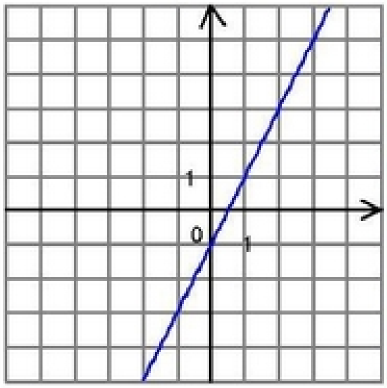
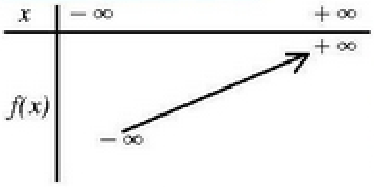


Tableau de variations :



$\boxed{a < 0}$

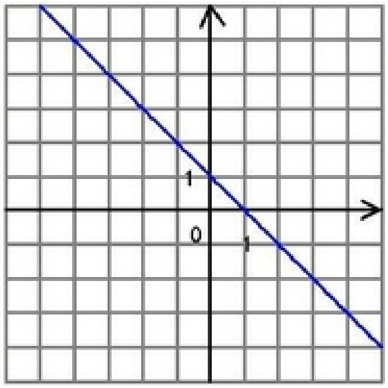
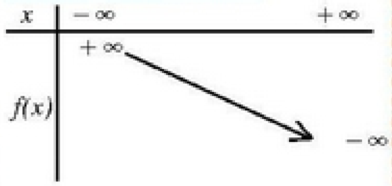


Tableau de variations :



$\boxed{a = 0}$

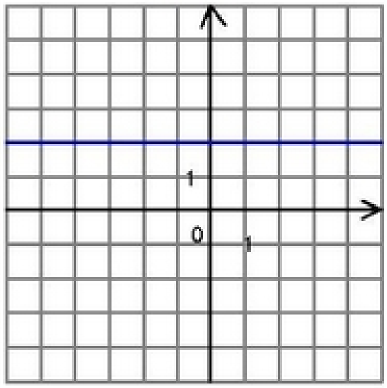
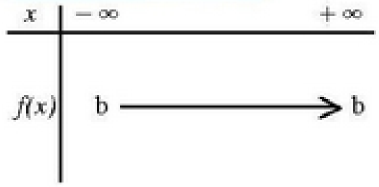
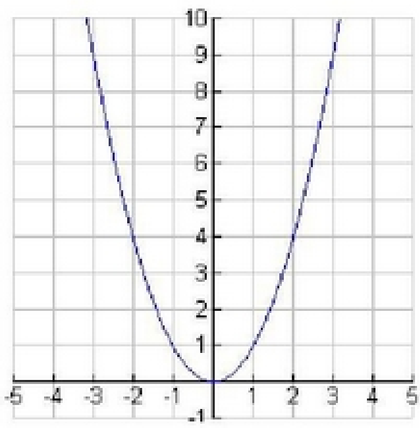


Tableau de variations :



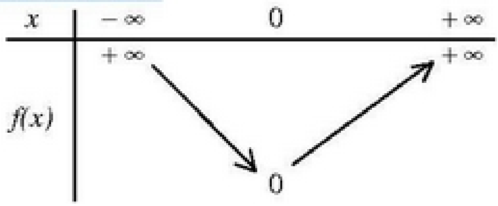
Remarques : Leurs courbes sont des droites.
Une fonction affine est impaire si et seulement si b = 0.

La fonction carrée $x \xrightarrow{f} x^2$

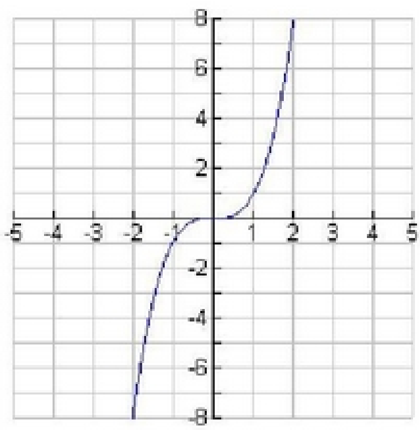


La fonction carrée est une fonction paire.
Sa courbe s'appelle parabole.

Tableau de variations :

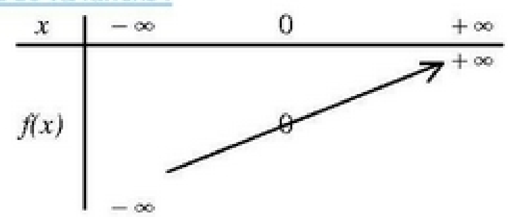


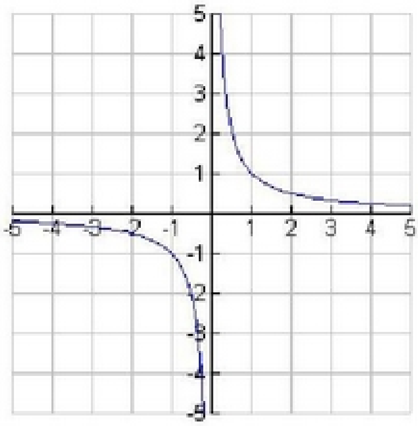
La fonction cube $x \xrightarrow{f} x^3$



La fonction cube est une fonction impaire.

Tableau de variations :

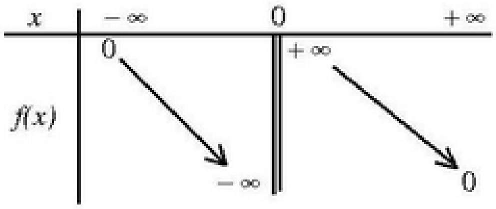


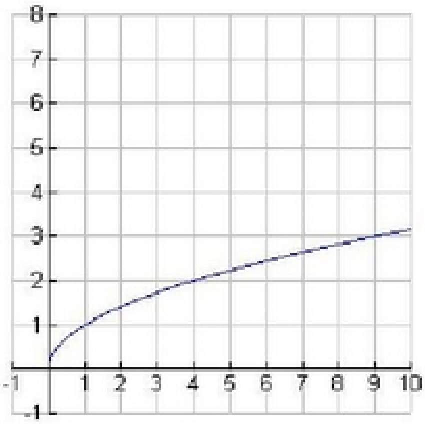


La fonction inverse $x \xrightarrow{f} \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est une fonction impaire.
Sa courbe s'appelle hyperbole.

Tableau de variations :

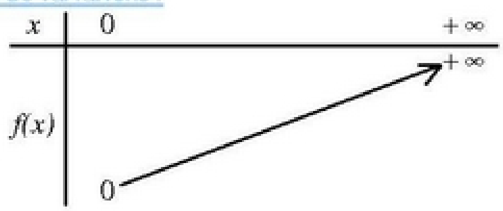


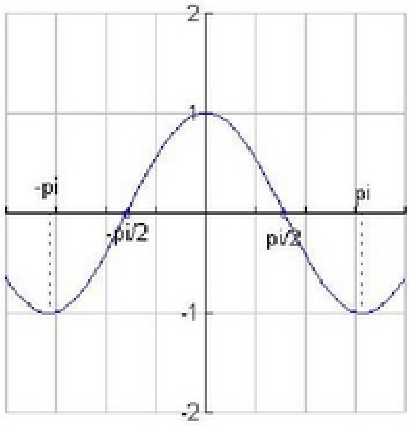


La fonction racine carrée $x \xrightarrow{f} \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est une fonction ni paire ni impaire.

Tableau de variations :

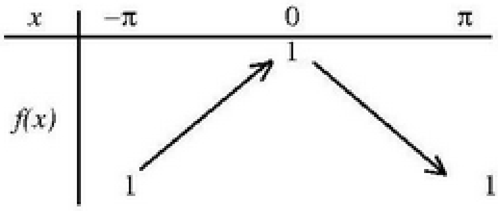


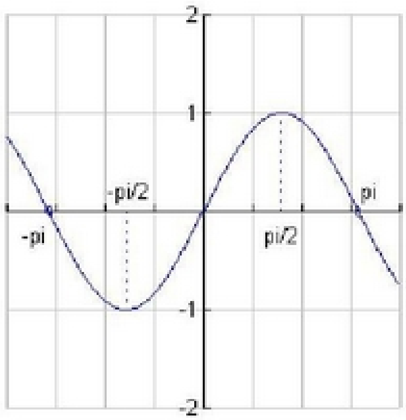


La fonction cosinus $x \xrightarrow{f} \cos(x)$

La fonction cosinus est une fonction paire et périodique de période 2π . Sa courbe s'appelle sinusoïde.

Tableau de variations : sur $[-\pi;\pi]$





La fonction sinus $x \xrightarrow{f} \sin(x)$

La fonction sinus est une fonction impaire et périodique de période 2π . Sa courbe s'appelle sinusoïde.

Tableau de variations : sur $[-\pi;\pi]$