

# cours de mathématiques en première

## Dérivée et dérivation.

### A. Nombre dérivé

#### 1- Limite finie d'une fonction en 0.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  tel que 0 est à l'intérieur de  $D$  ou est une borne de  $D$ .  
On dit que  $f$  a pour limite le nombre  $l$  lorsque  $x$  tend vers 0 et on écrit  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l$  si les nombres  $f(x)$  peuvent devenir aussi proches de  $l$  qu'on le désire pour  $x$  suffisamment proche de 0.

##### Exemple :

$\lim_{x \rightarrow 0} 5 + 2x = 5$  en effet pour que  $5 + 2x$  soit compris entre  $5 - \epsilon$  et  $5 + \epsilon$ , c'est à dire  $5 - \epsilon < 5 + 2x < 5 + \epsilon$ , il suffit de choisir  $x$  entre  $-\epsilon/2$  et  $\epsilon/2$ .

#### 2- Fonction dérivable en un point

Soit  $f$  une fonction et  $a$  un point de son ensemble de définition.  
Dire que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  signifie que la fonction qui à  $h$  associe  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  admet une limite finie lorsque  $h$  tend vers 0.

Cette limite est le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , on la note  $f'(a)$ .  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

##### Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 - 2$ . Montrons que  $f$  est dérivable en 2 et calculons  $f'(2)$ .

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2 - 2}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} 4 + h = 4.$$

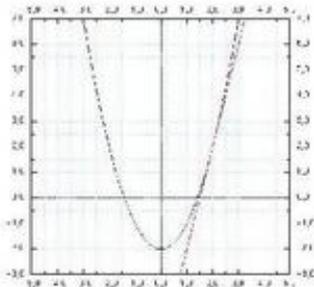
On en déduit que  $f$  est dérivable en 2 et que  $f'(2) = 4$ .

#### 3- Interprétation graphique du nombre dérivé

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ . On appelle  $C$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère. La courbe  $C$  admet une tangente au point d'abscisse  $a$  et  $f'(a)$  est le coefficient directeur de cette tangente.

Une équation de la tangente au point d'abscisse  $a$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

##### Exemple



Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 - 2$ .

Cette fonction est dérivable en 2 et  $f'(2) = 4$ .

L'équation de la tangente en 2 est  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

soit  $y = 4(x - 2) + 2$

soit  $y = 4x - 6$ .

La fonction  $x \rightarrow 4x - 6$  est une approximation affine de la fonction

$x \rightarrow x^2 - 2$  au voisinage de 2.

Pour  $x$  proche de 2,  $4x - 6$  et  $x^2 - 2$  donnent des résultats très voisins.

## B. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $D$ .

La fonction qui à  $x$  associe  $f'(x)$ , le nombre dérivé de  $f$  en  $x$ , est appelée fonction dérivée de  $f$  sur  $D$  et on la note  $f'$ .

Le tableau suivant donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles.

Fonction constante	$\mathbb{R}$	$k$	0
Fonction affine	$\mathbb{R}$	$ax+b$	$a$
Carré	$\mathbb{R}$	$x^2$	$2x$
Cube	$\mathbb{R}$	$x^3$	$3x^2$
Puissance de $x$	$\mathbb{R}$	$x^n$ ( $n > 0$ )	$n x^{n-1}$
Fonction inverse	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$\mathbb{R}^{++}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

## C. Opérations sur les fonctions dérivables

### 1- Somme et produit par un réel

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $D$  et  $k$  un réel.

La fonction dérivée de  $u + v$  est  $(u + v)' = u' + v'$ .

La fonction dérivée de  $ku$  est  $(ku)' = ku'$ .

#### Exemple

Calculer la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ .

La dérivée de  $x^2$  est  $2x$ , donc la dérivée de  $2x^2$  est  $2 \times 2x = 4x$ .

La dérivée de  $-3x$  est  $-3$ .

La dérivée de  $5$  est  $0$ .

On en déduit que la dérivée de  $f$  est  $f'(x) = 4x - 3$ .

### 2- Produit et quotient de deux fonctions

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $D$ .

La fonction dérivée de  $uv$  est  $(uv)' = u'v + v'u$ .

Si  $v$  ne s'annule pas sur  $D$ ,

- la fonction dérivée de  $\frac{1}{v}$  est  $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

- la fonction dérivée de  $\frac{u}{v}$  est  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

#### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$ .

On pose  $u(x) = 2x + 1$ , d'où  $u'(x) = 2$  et  $v(x) = x^2 - 3$ , d'où  $v'(x) = 2x$ .

On a alors :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 2(x^2 - 3) + 2x(2x + 1) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6.$$

Remarque : on aurait pu développer  $f(x)$ ;  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$  d'où  $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$ .

### 3- Dérivée de $u(ax + b)$

Soit  $u$  une fonction dérivable sur  $D$ ,  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $ax + b \in D$ .

La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = u(ax + b)$  est  $f'(x) = u'(ax + b) \times a$ .

#### Remarque

La fonction  $f$  est la composée de la fonction  $u$  et de la fonction affine définie par  $ax + b$ .

#### Exemple

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{2x+3}$ .

On pose  $u(x) = \sqrt{x}$ ; on a alors  $f(x) = u(2x+3)$ .

Comme  $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , la dérivée de  $f$  est  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ .

## D. Dérivée et sens de variation

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et soit  $f'$  sa dérivée.

Si  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , sauf peut être en quelques points où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Si  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , sauf peut être en quelques points où  $f'$  s'annule, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

#### Exemple

Etudier les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 3x$  sur  $\mathbb{R}$ .

La dérivée de  $f$  est  $f'(x) = 2x - 3$ .

C'est une fonction affine qui s'annule pour  $x = 3/2$ .

Sur  $]-\infty; 3/2[$   $f'$  est négative donc  $f$  est décroissante.

Sur  $]3/2; +\infty[$   $f'$  est positive donc  $f$  est croissante.

On résume cette étude dans le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-9/4$	

#### Remarque

La fonction  $f$  admet un minimum en  $x = 3/2$ .

Quel que soit  $x$ ,  $f(x) \geq f(3/2)$ .

Comme la dérivée s'annule en  $x = 3/2$ , la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.